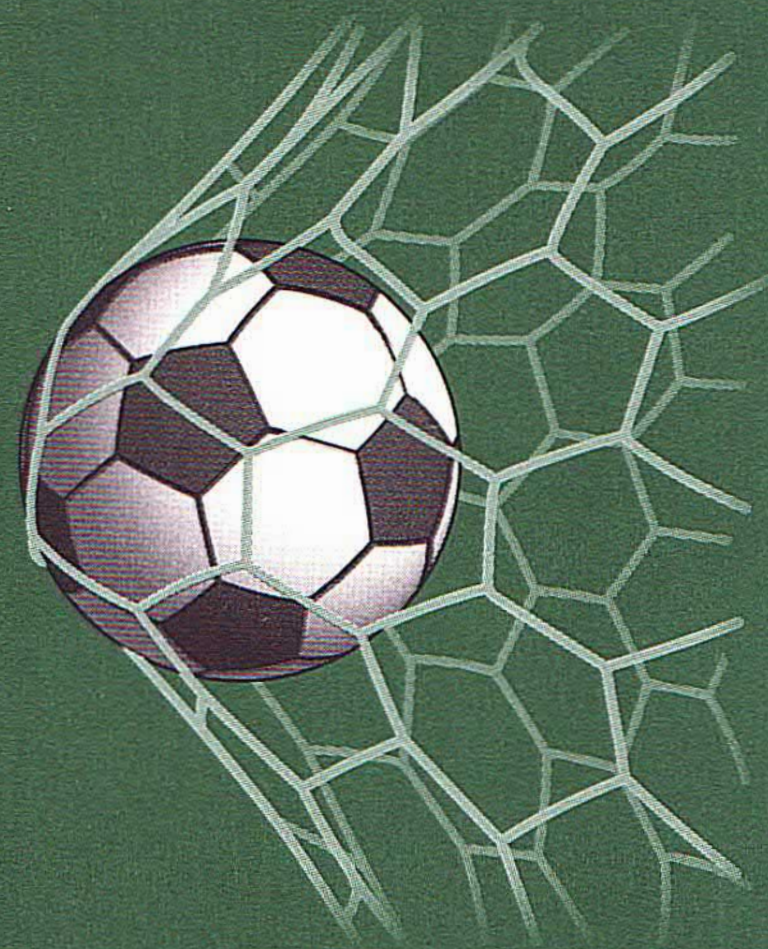
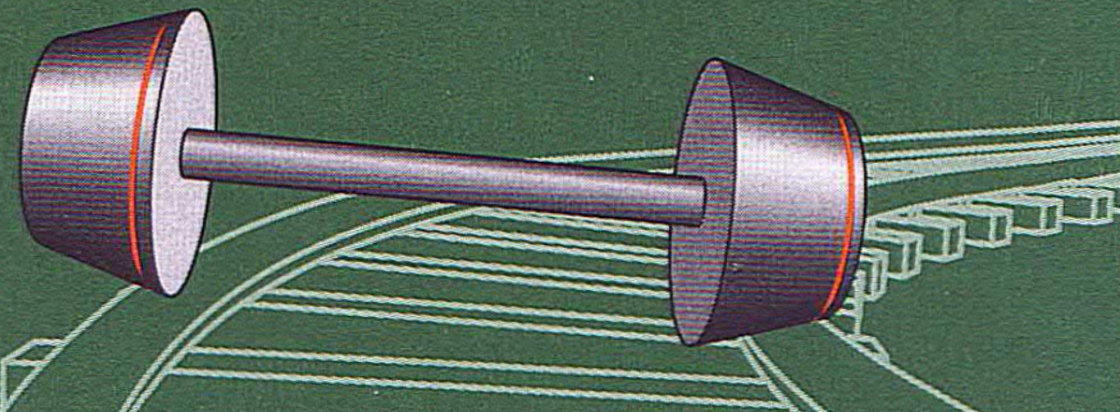


Математическая составляющая



Математические этюды
Москва • 2019



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ

Редакторы-составители

Н. Н. Андреев, С. П. Коновалов, Н. М. Панюнин

Художник-оформитель

Р. А. Кокшаров

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ,
РАСШИРЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Математические этюды

Москва — 2019

УДК 51.001.83
ББК 22.1ф
М340

М340 Математическая составляющая / Редакторы-составители Н. Н. Андреев, С. П. Коновалов, Н. М. Панюнин ; Художник-оформитель Р. А. Кокшаров. — 2-е изд., расш. и доп. — М. : Фонд «Математические этюды», 2019. — 367 с. : ил.

ISBN 978-5-906825-02-5

В сюжетах, собранных в книге, рассказывается как о математической «составляющей» крупнейших достижений цивилизации, так и о математической «начинке» привычных, каждодневных вещей. Все авторы — известные учёные.

Увлекательный, популярно-описательный стиль изложения делает материалы книги доступными для широкого круга читателей.

Во втором издании представлены новые авторы и сюжеты, объём книги вырос вдвое. Добавлены разделы «Дополнения и комментарии» и «Книжная полка».

УДК 51.001.83
ББК 22.1ф

ISBN 978-5-906825-02-5 © Авторы статей, 2019
© Фонд «Математические этюды», 2019
© Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, 2019

Предисловие

То, что математика является и языком, и главным инструментом естественных наук и техники, читателю известно. Математика играет эту роль и в физике, от теории до приложений, и в осуществлении космических полётов, и в укрощении атомной энергии, и в жизни компьютерного мира. Менее очевидна для широкой публики важность математики в таких дисциплинах, как медицина или лингвистика.

Но даже читатель, догадывающийся о значительной математической «составляющей» в различных сферах деятельности, не всегда может оценить степень зависимости этих областей от математики. Основная причина — сложность применяемых математических инструментов, часто — специально разработанных для конкретного приложения. И признавая на словах роль математики, люди редко задумываются над математической «начинкой» окружающих нас предметов и явлений, а иногда и просто не замечают её.

Существующие прикладные задачи являются постоянным и требовательным заказчиком, ставящим всё новые и новые проблемы перед самой математикой. С другой стороны, прогресс в математике открывает новые возможности, порождает такие технические задачи и решения, о которых до того нельзя было и подозревать. А бывает и так, что результаты теоретической математики ждут своего практического воплощения долгими десятилетиями, а потом «выстреливают» неожиданно и с невероятной эффективностью. Ряд примеров такого двустороннего взаимодействия читатель найдёт в этой книге.

Книга состоит из трёх частей, каждая имеет свой цветовой код.

В первой («синей») части собраны короткие тексты, демонстрирующие жизненную необходимость для человечества математических исследований.

Во второй («зелёной») части содержатся математические «проявления» в повседневной жизни. Большинство сюжетов — из математического фольклора, они приводятся в обработке составителей сборника.

В первых двух частях формул почти нет, просмотреть их и ощутить необходимую и незаменимую роль математики в жизни современного общества сможет любой читатель. Нам кажется, что такое представление должны получить самые широкие круги читателей, и в особенности — те, кто принимает важные решения: от школьника, выбирающего свою будущую профессию, до государственного деятеля, определяющего приоритеты в развитии страны.

В третьей («красной») части собраны тексты, допускающие, по сравнению с «синей» и «зелёной» частями, более сложные математические детали или больший объём. Этот раздел в большей степени, чем другие, рассчитан на читателя, заинтересованного в прояснении сути описанных математических «механизмов».

Во втором издании основные части книги дополнены разделами «Книжная полка», «Дополнения, комментарии, литература», «Указатель».

На «Книжной полке» представлены проверенные временем книги, дающие возможность читателю получить более глубокое и всестороннее представление о мире математики.

В разделе «Дополнения, комментарии, литература» развиваются и обсуждаются темы, рассмотренные в основных частях книги. Ссылку на страницу с соответствующими дополнительными материалами и списком книг по теме сюжета можно найти в конце каждой статьи.

Раздел «Указатель» предметно классифицирует сюжеты книги. Отражены и области математики, и используемые термины.

У всех материалов книги есть общая черта. По замыслу составителей пёстрый калейдоскоп представленных сюжетов должен познакомить читателя с тем особым взглядом на мир, который отличает математиков. Это не только развитое логическое мышление, владение различными математическими инструментами в виде формул, теорем и теорий, но и умение видеть, находить, использовать общие математические свойства разнородных явлений. Надеемся, что примеры, приведённые в сборнике, позволят читателю почувствовать и оценить подобный подход к изучению окружающего нас мира.

Особенность книги — то, что первая и третья части содержат статьи, написанные российскими математиками, результаты которых определяют мировой уровень математики. Для читающей публики получение научной информации из первых рук — редкая удача.

Появление известных математиков как авторов на страницах этой книги объясняется тем, что она создавалась в Математическом институте имени В. А. Стеклова Российской академии наук — ведущем научном центре страны.

Традицией российского математического сообщества является деятельное участие в организации математического образования, борьба за сохранение уровня в этом важном деле. Поэтому просьбы составителей к коллегам находили доброжелательный, заинтересованный и деятельный отклик.

Чтобы не оттолкнуть читателя, опасющегося текстов с формулами и теоремами, для данного сборника сознательно выбран популярно-описательный стиль изложения. Понятно, что у части читателей такой стиль может вызвать ощущение недостаточной строгости и чёткости. Авторы старались этого избежать. В случае выявления неточностей изложения и прочих погрешностей, просьба относить их исключительно к недоработке редакторов-составителей.

Математические факты, на которых основаны сюжеты второй части, а также некоторые из упоминаемых в сюжетах третьей части вдумчивый читатель сможет восстановить и проанализировать самостоятельно. Подобный сценарий может использовать и учитель, который найдёт здесь богатый материал для работы со школьниками.

Важной составляющей данного сборника являются иллюстрации. И рисунки, и весь графический стиль оформления книги созданы Романом Кокшаровым. Математическая точность рисунков, вёрстка книги — заслуга Михаила Панова.

Расширенная электронная версия сборника находится на сайте «Математические этюды» по адресу <http://book.etudes.ru>. Электронная версия будет развиваться, пополняясь дополнительной информацией и ссылками на другие источники по темам, представленным в книге.

Отметим, что без совместной работы над проектом «Математические этюды» не состоялся бы и сам сборник. В свою очередь, проект был осуществлён благодаря самоотверженному труду Михаила Калиниченко, Романа Кокшарова, Никиты Шавельзона.

Книга не претендует на роль полного, универсального сборника примеров проявления математики в жизни. В выборе представленных тем отражены вкусы авторов и составителей сборника. За бортом осталось множество ярких примеров, о которых просто необходимо рассказывать. Надеемся, что в сотрудничестве с читателями эта работа будет продолжена.

Редакторы-составители

**Николай Николаевич Андреев
Сергей Петрович Коновалов
Никита Михайлович Панюнин**

сотрудники лаборатории
популяризации и пропаганды математики
Математического института имени В. А. Стеклова РАН

Авторы

Андрей Александрович Аграчёв — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Математического института имени В. А. Стеклова РАН, профессор Международной школы перспективных исследований в Триесте (Италия).

Григорий Геннадьевич Амосов — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела теории вероятностей и математической статистики Математического института имени В. А. Стеклова РАН.

Юрий Михайлович Батурин — член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник Института истории естествознания и техники имени С. И. Вавилова РАН, лётчик-космонавт Российской Федерации.

Лев Дмитриевич Беклемишев — член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник отдела математической логики Математического института имени В. А. Стеклова РАН, профессор факультета математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», профессор кафедры математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Александр Маркович Гайфуллин — член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник Центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н. Е. Жуковского, заведующий кафедрой теоретической и прикладной аэрогидромеханики Московского физико-технического института.

Александр Владимирович Гасников — доктор физико-математических наук, доцент кафедры математических основ управления факультета управления и прикладной математики Московского физико-технического института.

Николай Петрович Долбилин — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела геометрии и топологии, лаборатории популяризации и пропаганды математики Математического института имени В. А. Стеклова РАН, профессор кафедры теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Андрей Михайлович Зубков — доктор физико-математических наук, академик Академии криптографии Российской Федерации, заведующий отделом дискретной математики Математического института имени В. А. Стеклова РАН, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Валерий Васильевич Козлов — академик РАН, вице-президент Российской академии наук, директор Математического института имени В. А. Стеклова РАН (2004—2016), главный научный сотрудник отдела механики Математического института имени В. А. Стеклова РАН.

Алексей Николаевич Крылов (1863—1945) — академик АН СССР.

Андрей Геннадьевич Куликовский — академик РАН, главный научный сотрудник отдела механики Математического института имени В. А. Стеклова РАН, профессор кафедры гидромеханики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Юрий Иванович Манин — член-корреспондент РАН, заслуженный профессор Математического института Макса Планка (Германия), почётный член попечительского совета Северо-Западного университета Эванстон (США), внештатный сотрудник Математического института имени В. А. Стеклова РАН.

Юрий Владимирович Матиясевич — академик РАН, советник РАН, заведующий лабораторией математической логики Санкт-Петербургского отделения Математического института имени В. А. Стеклова РАН.

Сергей Петрович Новиков — академик РАН, заведующий отделом геометрии и топологии Математического института имени В. А. Стеклова РАН, заведующий кафедрой высшей геометрии механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, профессор Мэрилендского университета в Колледж-Парке. Лауреат Филдсовской медали.

Константин Сергеевич Новосёлов — профессор физики Манчестерского университета, член Лондонского королевского общества, иностранный член Национальной академии наук США. Лауреат Нобелевской премии по физике.

Андрей Юрьевич Окуньков — кандидат физико-математических наук, член Национальной академии наук США, член Американской академии наук и искусств, научный руководитель международной лаборатории теории представлений и математической физики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», профессор Сколковского института науки и технологий, профессор Университета Колумбия в городе Нью-Йорк. Лауреат Филдсовской медали.

Алексей Николаевич Паршин — академик РАН, заведующий отделом алгебры Математического института имени В. А. Стеклова РАН.

Павел Аркадьевич Певзнер — кандидат физико-математических наук, профессор Калифорнийского университета в Сан-Диего.

Александр Чедович Пиперски — кандидат филологических наук, научный сотрудник факультета гуманитарных наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», доцент учебно-научного центра компьютерной лингвистики Российского государственного гуманитарного университета.

Владимир Юрьевич Протасов — член-корреспондент РАН, профессор кафедры общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, профессор факультета компьютерных наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», профессор Университета Аквила (Италия).

Александр Александрович Разборов — член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник отдела математической логики Математического института имени В. А. Стеклова РАН, профессор Университета Чикаго. Лауреат премии Неванлинны.

Андрей Михайлович Райгородский — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, заведующий кафедрой дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий Московского физико-технического института, руководитель исследовательского подразделения компании «Яндекс».

Армен Глебович Сергеев — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела комплексного анализа

Математического института имени В. А. Стеклова РАН, профессор кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Станислав Константинович Смирнов — научный руководитель исследовательской лаборатории имени П. Л. Чебышева Санкт-Петербургского государственного университета, профессор Сколковского института науки и технологий, профессор Университета в Женеве (Швейцария). Лауреат Филдсовской медали.

Владимир Георгиевич Сурдин — кандидат физико-математических наук, доцент физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, старший научный сотрудник Государственного астрономического института имени П. К. Штернберга.

Искандер Асанович Тайманов — академик РАН, главный научный сотрудник Института математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН, заведующий кафедрой геометрии и топологии Новосибирского государственного университета.

Владимир Андреевич Успенский — доктор физико-математических наук, Заслуженный профессор Московского университета, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (1995—2018).

Михаил Владимирович Фейгин — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель департамента математики и статистики Университета Глазго (Великобритания).

Александр Семёнович Холево — член-корреспондент РАН, заведующий отделом теории вероятностей и математической статистики Математического института имени В. А. Стеклова РАН. Лауреат премии Шеннона.

Альберт Николаевич Ширяев — академик РАН, главный научный сотрудник отдела теории вероятностей и математической статистики Математического института имени В. А. Стеклова РАН, Заслуженный профессор Московского университета, заведующий кафедрой теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

От «безумной» геометрии Лобачевского до GPS-навигаторов

Самые отвлечённо-умозрительные научные теории могут через какое-то время (порой — значительное!) стать основой весьма практических дел, причём выгода от только одного применения многократно окупает расходы на чудаков-математиков за всю историю науки...

Вот один из многих примеров.

Первая половина XIX века. Ректор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский предлагает свою «Воображаемую геометрию», в которой сумма углов треугольника не равна 180 градусам, как в существовавшей две тысячи лет геометрии Евклида. Пошли разговоры о безумстве ректора. В это же время великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс пришёл к близким идеям, но побоялся опубликовать свои выводы.

Вторая половина XIX века. Немецкий математик Бернхард Риман построил общую теорию, включающую и геометрию Евклида, и геометрию Лобачевского. Появилась риманова геометрия, чисто абстрактный раздел математики.

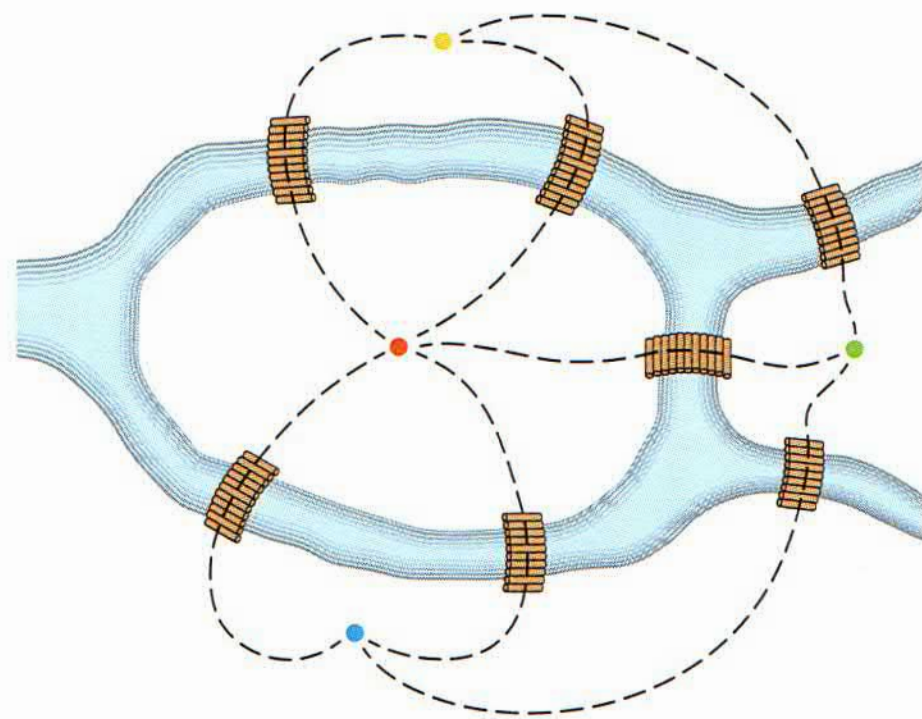
Первая четверть XX века. Альберт Эйнштейн создаёт теорию относительности, сначала специальную (СТО), а потом общую (ОТО), которая целиком основана на римановой геометрии. На СТО основаны все расчёты ядерных реакций, а ОТО долгое время казалась красивой, но бесполезной для реальной жизни игрушкой.

Начало XXI века. Для работы GPS-навигаторов нужны очень точные часы на спутниках орбитальной группировки, поддерживающих работу навигационной системы. Ход часов в этих условиях изменяется благодаря известному в СТО эффекту: из-за большой скорости спутника часы на орбите идут иначе, чем такие же часы на Земле. Но кроме этого, есть и специфический для ОТО эффект такого рода, связанный как раз с неевклидовой геометрией пространства-времени. И если в какой-то момент «отключить» учёт этих эффектов, то уже за сутки работы в показаниях навигационной системы накопится ошибка порядка 10 км.

Итак, если на миг забыть, что наше пространство чуть-чуть неевклидово, то попасть в кювет или врезаться в стену здания нам обеспечено.

От прогулок по Кёнигсбергу до реконструкции генома

Современная биология ещё не может «прочитать» большие молекулы ДНК как книгу, «буква за буквой». Вместо этого учёные расшифровывают последовательности коротких кусочков ДНК, не зная, из какого места генома был вырезан данный кусочек. Процесс сборки генома из огромного числа таких кусочков, полученных из большого числа копий одной ДНК, называется секвенированием (от английского слова *sequence* — последовательность). Этот процесс сродни попытке собрать пазл из миллиарда кусочков и основывается на развитии одной математической теории, зародившейся три столетия назад.



Первая половина XVIII века. Великий математик Леонард Эйлер решает «задачу о кёнигсбергских мостах» — доказывает, что в Кёнигсберге, расположенном на берегах реки и двух её островах, нельзя было пройти по каждому из семи мостов, существовавших в то время, ровно один раз и вернуться после этого в исходную точку. Подобный путь на соответствующем графе называется эйлеровым циклом. У задачи о существовании эйлерова цикла критерий разрешимости очень простой — из каждой вершины графа должно выходить чётное число рёбер. Да и задача нахождения эйлерова цикла (ЗЭЦ) решается относительно быстро даже для очень большого графа.

Вторая половина XIX века. Математик Уильям Гамильтон рассматривает внешне похожую на ЗЭЦ задачу: найти на графе замкнутый путь (гамильтонов цикл), проходящий через каждую вершину по одному разу (ЗГЦ).

Вторая половина XX века. Было установлено, что ЗГЦ (в отличие от ЗЭЦ) является представителем класса задач, для которых эффективные алгоритмы решения неизвестны.

Конец XX века — XXI век. В середине 1990-х годов был секвенирован геном бактерии, в 2001 году — человека. Работа была длительной и дорогостоящей, так как алгоритмы суперкомпьютеров основывались на ЗГЦ. В последнее десятилетие математиками были разработаны быстродействующие методы сборки, связанные с ЗЭЦ, и теперь биологи готовятся к решению фундаментальной задачи: для каждого вида млекопитающих провести сборку генома.

Распространение звуковых волн

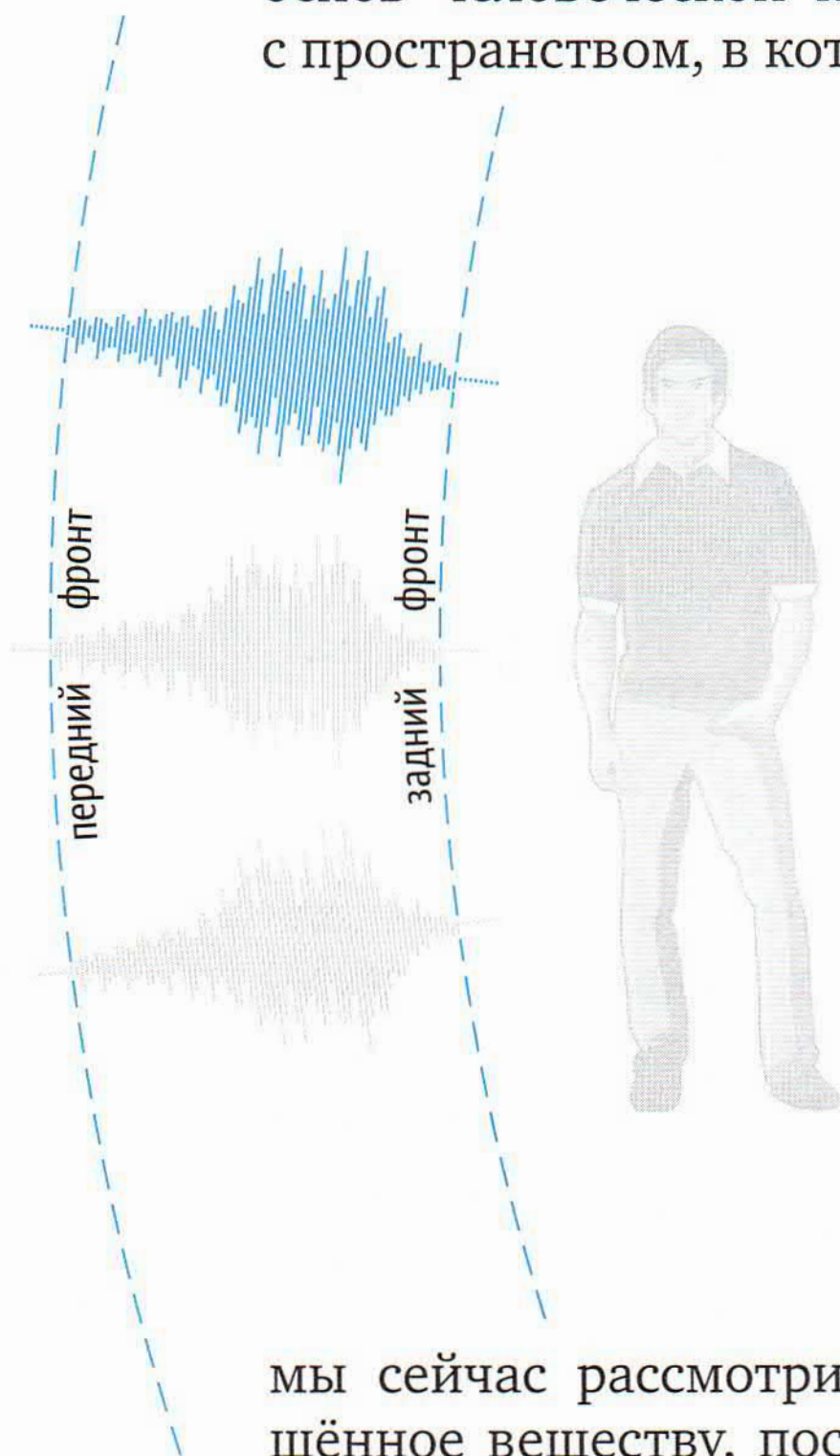
Традиция передачи знаний и эмоций в устной речи — одна из основ человеческой культуры. Оказывается, нам просто повезло с пространством, в котором звуковые волны распространяются так, что мы можем слышать то, что говорят другие.

В конце XVII века выдающийся голландский учёный Христиан Гюйгенс написал «Трактат о свете. В котором объяснены причины того, что с ним происходит при отражении и преломлении...». В отличие от своего великого предшественника Рене Декарта, «полагавшего, что переход света совершается мгновенно» (цитата из упомянутого «Трактата»), Гюйгенс считал скорость света конечной. Это допущение позволило Гюйгенсу рассматривать с единой точки зрения вопросы распространения света и звука. Объединяющим стал термин «волна»: «Поскольку вместе с тем свет употребляет для своего прохождения некоторое время — вопрос, который

мы сейчас рассмотрим, — из этого следует, что движение, сообщённое веществу, постепенно и, следовательно, распространяется так же, как и при звуке, сферическими поверхностями и волнами: я называю эти поверхности волнами по сходству с волнами, которые можно наблюдать на воде, в которую брошен камень...». В «Трактате» Гюйгенс привёл геометрическое описание того, как распространяется фронт волны — граница в пространстве, до которой дошла волна.

В XIX веке математики получили формулы, выражающие решения уравнений, описывающих положение звуковой волны в пространстве, при условии, что известно её состояние в начальный момент времени.

Из этих формул следовало, что помимо наличия переднего фронта волны, описываемого упомянутым принципом Гюйгенса, особенностью звуковых волн в трёхмерном пространстве является наличие заднего фронта. Возникнув в одной точке пространства,



звук доходит до другой части пространства, а после покидает её и распространяется далее. Иначе говоря, моментальный источник волны остаётся моментальным при улавливании его в другой точке пространства. Данный эффект Адамар назвал принципом Гюйгенса в узком смысле.

Рассмотрим принцип Гюйгенса немного подробнее. Если в некоторой точке пространства есть мгновенный источник звука, то за время t звук может распространиться в шаре с центром в этой точке и радиуса ct , где c — скорость звука. Принцип Гюйгенса в узком смысле утверждает, что в действительности в момент времени t звук распространится на сферу — границу этого шара, но он не будет слышен внутри шара.

Именно это свойство — наличие заднего фронта звуковой волны в трёхмерном пространстве — позволяет нам слышать друг друга. Если бы заднего фронта не было, то мы бы слышали одновременно все возможные звуки, дошедшие до нашего положения в пространстве, и они бы накладывались друг на друга. Отметим, что это свойство выполняется и для электромагнитных волн, включая световые.

Выполнение принципа Гюйгенса в узком смысле — явление редкое, зависит и от типа волнового процесса, и от свойств пространства (размерность, однородность). Так, на плоскости принцип перестаёт действовать даже для волнового уравнения, а в трёхмерном пространстве не выполняется для звуковых волн, распространяющихся в неоднородной среде.

Наглядный пример отсутствия заднего фронта — волны на поверхности воды: мгновенный источник фиксируется в другой точке поверхности на протяжении длительного времени. Можно наблюдать это явление, «бросая в воду камешки». Брошенный камень создаёт много расходящихся кругов, которые являются волной на поверхности воды. И эта волна, дойдя в другую точку поверхности воды, ещё долго там наблюдается. Лишь постепенно вода вновь успокаивается.

Доказано, что аналоги звуковых волн удовлетворяют принципу Гюйгенса в узком смысле только в нечётномерных пространствах размерности три и выше. Адамар сформулировал проблему, до сих пор остающуюся нерешённой: найти все дифференциальные уравнения, описывающие волновые процессы, для которых выполняется принцип Гюйгенса в узком смысле. Замечательно, что некоторые примеры таких уравнений в пространствах высоких размерностей можно получить с помощью правильных многогранников.

Математика интернета

Странное название, скажет читатель, проводящий часть жизни в интернете. Ведь возникновение сайтов, их наполнение контентом, установление связей между ними (ссылки) — всё это происходит

стихийно, никем явным образом не управляется. Но, как и другие сложные системы, состоящие из большого числа «свободных» элементов, интернет становится средой, в целом имеющей устойчивые свойства, не зависящие от беспорядка в мелочах и поддающиеся исследованию математическими методами.

Будем представлять интернет в виде графа. Граф — это множество точек (вершин графа), соединённых конечным числом дуг (рёбер графа). Вершинами будем считать интернет-сайты, а рёбрами — гиперссылки, идущие с одних сайтов на другие. Рёбра этого графа — ориентированные (в ссылках важно, кто на кого ссылается), некоторые из них — кратные (несколько ссылок с одного сайта на другой), есть и петли (ссылки между страницами одного и того же сайта).

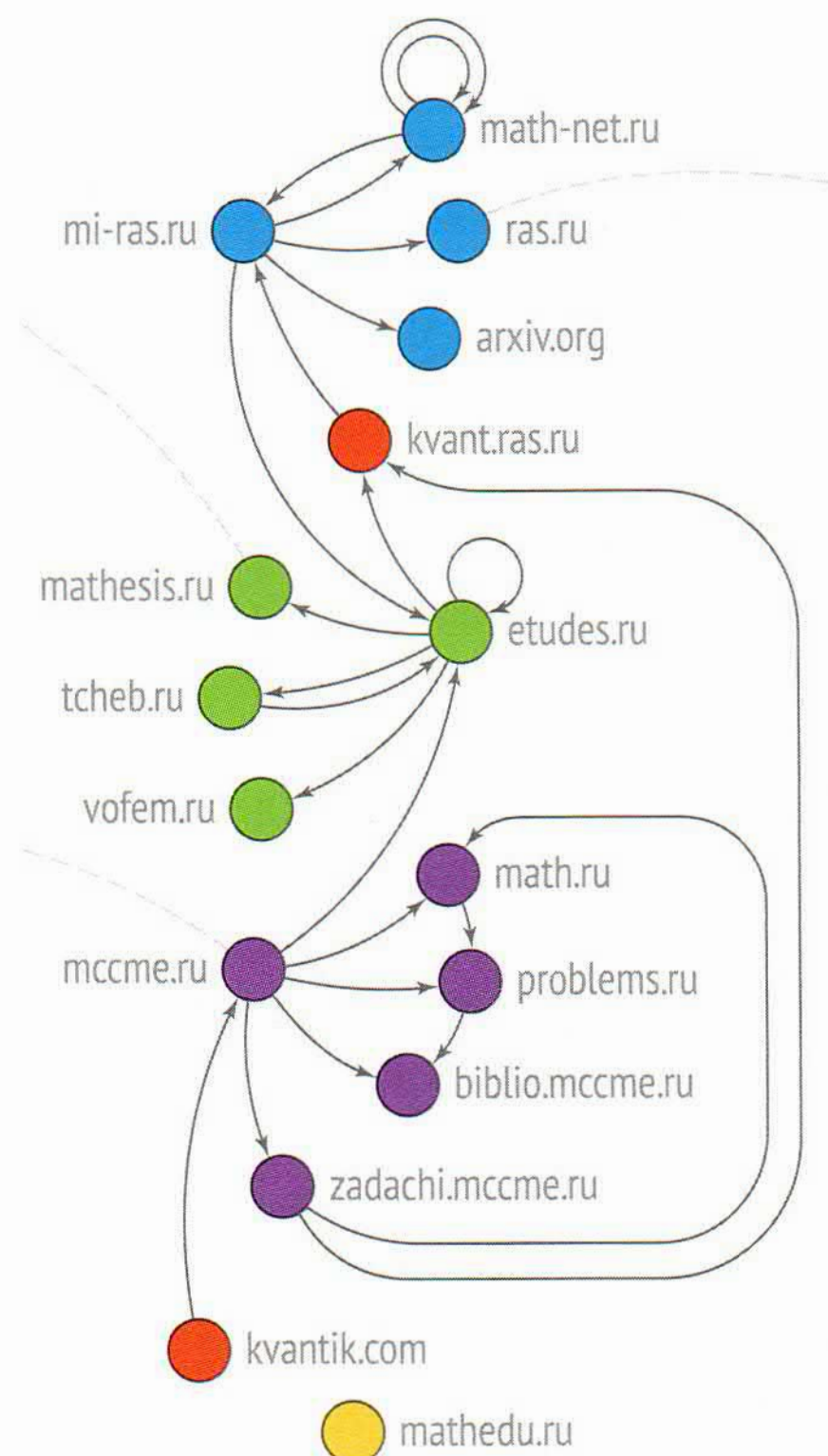
Построенный веб-граф — настоящий монстр с миллиардами вершин и рёбер. Этот граф постоянно меняется: добавляются и исчезают сайты, пропадают и появляются

ссылки. Но при всех изменениях, некоторые свойства интернета остаются неизменными на протяжении всей истории его исследования. Вот несколько примеров таких «устойчивых» свойств.

Веб-граф разрежен. В нём лишь в несколько раз больше рёбер, чем вершин. Казалось бы, странное дело — возможны любые ссылки, а рёбер всё равно мало.

Несмотря на разреженность, интернет-мир очень тесен. А именно, от любого сайта до любого другого можно по ссылкам перейти за 5—6 «кликов» (знаменитый закон «шести рукопожатий»).

В веб-графе высока вероятность того, что «соседи» данной вершины (сайты, связанные ссылками с данным) сами связаны ребром: «мои знакомые знакомы между собой».



Важная характеристика вершины графа — её степень, т. е. число входящих и выходящих рёбер. Оказывается, что степени вершин «правильно», т. е. по определённому закону, распределены: доля вершин данной степени d пропорциональна величине $1/d^\gamma$, где $\gamma \approx 2,3$. В этой формуле есть понятное «ядро» — доля вершин большой степени d (сайтов с большим количеством ссылок) мала. Но есть и удивительная деталь — постоянная γ не зависит от числа вершин веб-графа, т. е. не меняется в процессе развития интернета. Этот степенной закон является универсальным для сложных сетей — от биологических до межбанковских, разве что для разных сетей величина γ немного разная.

Интернет как целое устойчив к случайным атакам на сайты. А именно, если уничтожение сайтов происходит независимо и с одинаковой вероятностью, то веб-граф с вероятностью, близкой к 1, сохраняет «гигантскую» связную компоненту. Эта компонента сохраняется даже при прицельной атаке на хабы — вершины наибольших степеней — пока доля атакованных хабов не превысит некоторое критическое значение.

Для изучения интернета необходимо уметь строить модель «случайного графа», которая с высокой вероятностью обладает ожидаемыми свойствами реального интернета. При этом для практических нужд, да и для чисто математических целей, крайне важно, чтобы модель не была слишком сложной. Эта трудная и привлекательная задача полностью не решена.

Построение хорошей математической модели интернета сразу же даёт качественно новые инструменты для улучшения информационного поиска, выявления спама, прогнозирования распространения информации в социальных сетях и в интернете в целом.

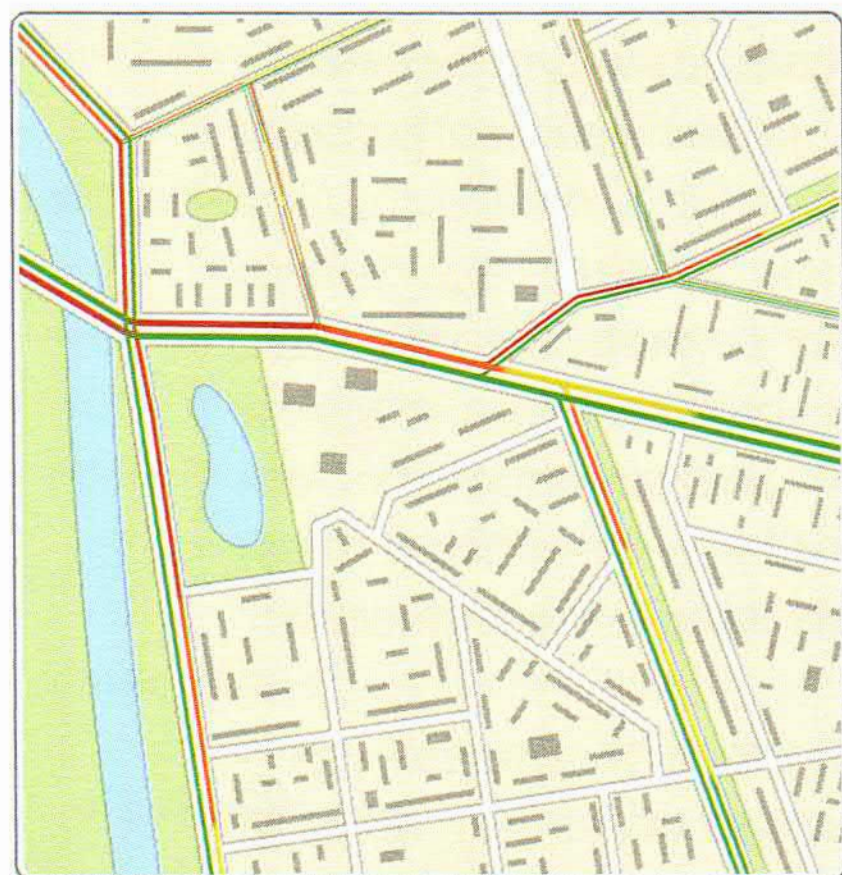
С другой стороны, математические модели интернета оказываются весьма похожими на модели биологических сообществ или модели межбанковского взаимодействия. И хотя изучение биологических или финансовых сообществ началось значительно раньше, чем появился интернет, интенсивность развития последнего и достижения в его изучении делают взаимное влияние всех этих моделей благотворным.

Поэтому математика интернета востребована и биологами (предсказание эпидемий), и создателями лекарств (бактериальные сообщества, живущие в организме человека, тоже похожи на интернет), и финансистами (риски возникновения кризисов).

Изучение подобных систем — один из центральных разделов прикладной математики и неиссякаемый источник новых задач для всей математики.

Математика транспортных потоков

В 70—80-е годы прошлого века США и страны Западной Европы, а затем и Россия столкнулись с серьёзной проблемой. Число пользователей транспортных сетей увеличилось настолько, что те перестали



справляться с нагрузкой. Как следствие — ущерб финансовый, экологический...

И всё это несмотря на то, что задумываться над транспортными проблемами стали ещё раньше, в 50—60-е годы XX века. И уже тогда стало понятно, что для решения этих проблем необходимо участие математиков и физиков.

Наивное представление о том, что для решения проблемы пробок достаточно увеличить количество дорог, было опровергнуто уже тогда. Математики придумали пример дорожной сети, в которой после ввода дополнительной дороги эффектив-

ность сети уменьшалась. Естественное желание автомобилистов использовать новую дорогу для выбора оптимального по времени маршрута неожиданно приводило к увеличению времени проезда для всех водителей!

Было разработано много интересных подходов к моделированию транспортных потоков с целью оптимального управления ими, но основой для всех предлагаемых решений являются два раздела прикладной математики — вычислительная гидродинамика и исследование операций.

Гидродинамика изучает движение жидкости и газа. Применение методов этой науки в транспортных задачах основано на представлении потока машин как течения по системе каналов переменной ширины сжимаемой жидкости, у которой скорость течения падает с возрастанием плотности. Объяснение аналогии следующее: чем больше на дороге машин (т. е. чем выше плотность), тем меньше средняя скорость потока. Так что всем нам «повезло»: достижения классической гидродинамики, накопленные за всю её историю, стали мощными инструментами для изучения транспортных потоков. Гидродинамический подход используется для краткосрочных расчётов потоков, например, с целью оптимального управления светофорной сигнализацией.

Второй подход основан на теории игр и элементах теории макросистем и используется для долгосрочного планирования. Каждый участник движения пытается минимизировать свои затраты (временные, денежные и т. п.) — возникает «игра». Можно показать, что данная игра приходит в равновесное состояние — ни один из участников не может уменьшить свои затраты, изменив стратегию в одностороннем порядке. Однако это равновесное состояние скорее всего не будет социальным оптимумом — ситуацией, когда суммарные потери всех участников движения минимальны. Поэтому целью оптимального управления транспортными потоками становится достижение ситуации, близкой к социальному оптимуму.

Один из основных механизмов борьбы с пробками — оптимальное расщепление транспортного потока на частный и общественный транспорт, оптимизация каждого из выделенных потоков. Инструментов оптимизации много: регулирование стоимости проезда на общественном транспорте и интенсивность его движения, введение выделенных полос для общественного транспорта, введение платных дорог и платных парковок для частного транспорта. Например, доказано (и даже описано, как этого достичь), что всегда можно взимать плату за проезд по участкам дорог так, чтобы в итоге возникла ситуация социального оптимума.

В современном мире в задачах изучения транспортных сетей появились новые обстоятельства. В ближайшей перспективе мы сможем в реальном времени получать информацию о каждом автомобиле. Необходимо научиться обрабатывать эту информацию с такой скоростью, с такой полнотой, чтобы можно было её использовать для решения всевозможных транспортных проблем: от процесса управления дорожной ситуацией до перспективного планирования. Подобная работа с большими массивами данных требует самых современных математических методов.

Но для применения этих инструментов надо перебросить мост от изучаемых данных к математическому инструментарию, надо выбрать математическую модель для описания данного явления. Выбор математической модели — искусство, требующее от исследователя ещё и высочайшей математической культуры, что включает в себя широкие познания в современной математике.

Разработка методов работы с большими объёмами данных позволит не только моделировать транспортные потоки, но и решать задачи биоинформатики, компьютерной безопасности, проектирования конструкций и других областей.

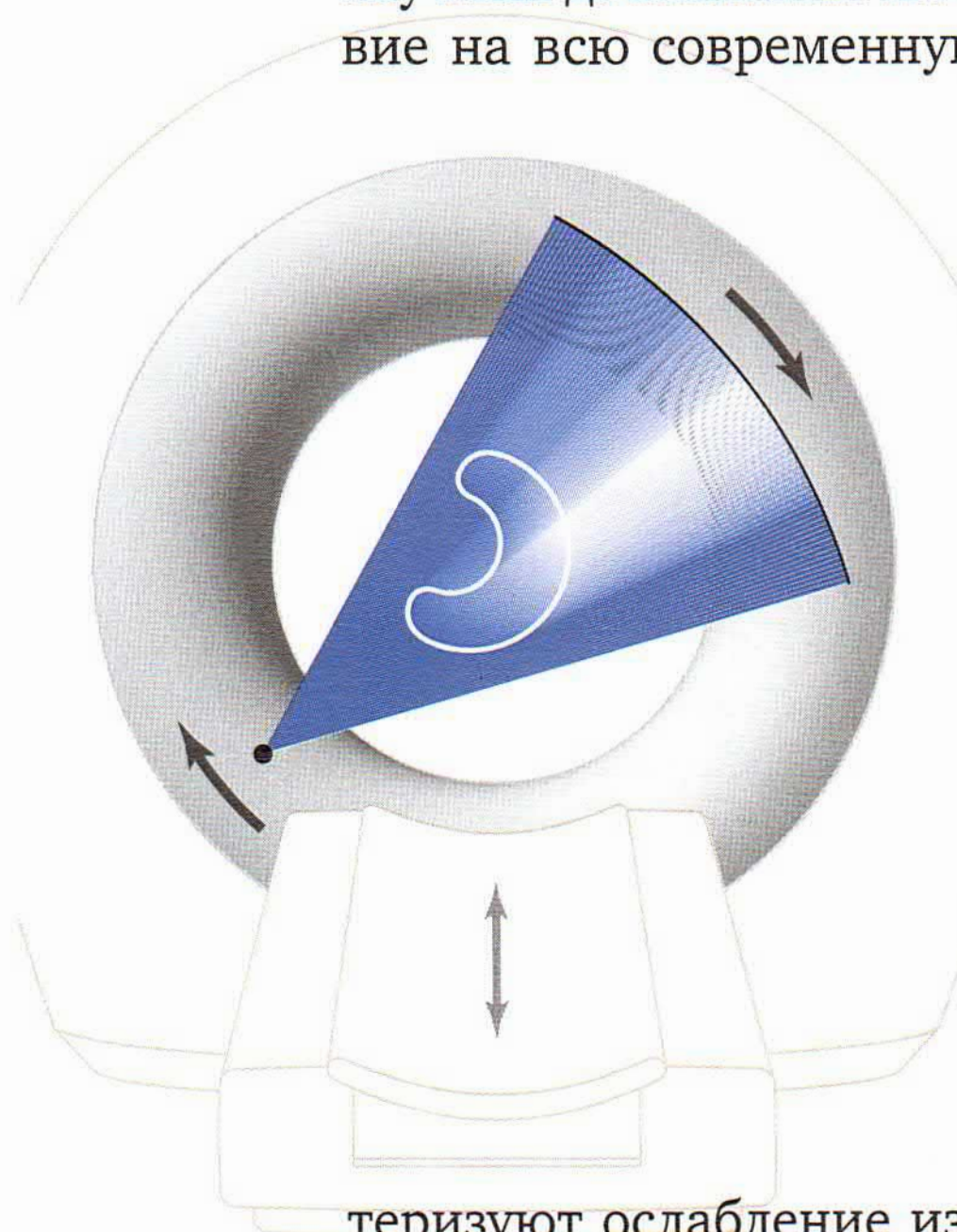
Компьютерная томография

Компьютерная томография — одно из наиболее впечатляющих научных достижений XX века. Оно оказало революционное воздействие на всю современную медицину. За разработку компьютерной томографии А. Кормак и Г. Хаунсфилд были удостоены Нобелевской премии 1979 года в области медицины и физиологии.

При снятии томограммы изучаемую часть тела человека микросдвигами перемещают сквозь кольцо сканирующего устройства. Сканер, состоящий из источника рентгеновского излучения и ряда детекторов, находится в корпусе, имеющем форму тора («бублика») и может вращаться в нём по кругу.

На древнегреческом *τομή* означает «сечение». При фиксированном относительно томографа положении тела происходит следующее. При каждом повороте сканера из источника излучения веером выходят лучи, а данные детекторов характеризуют ослабление излучения вдоль соответствующих направлений. Коэффициент поглощения в каждой точке зависит от плотности тканей организма, а интеграл от функции «коэффициент поглощения» по отрезку движения луча от источника до детектора определит суммарное поглощение луча. Если по значениям таких интегралов удастся восстановить значения интегрируемой функции, то в рассматриваемом сечении человеческий организм будет представлен картой плотности тканей. Набор изображений, полученных в серии параллельных сечений, даёт трёхмерное представление. Расположение и размеры участков с «неправильно» изменённой плотностью позволяют врачу поставить диагноз.

С математической точки зрения восстановление функции на плоскости по её интегралам вдоль всевозможных прямых — классическая задача, решённая Иоганном Радонам в 1917 году. Однако практическая реализация томографических возможностей формулы Радона стала возможной только с приходом эры компьютеров. Задача является трудной не только из-за гигантского объёма данных, для её решения помимо компьютеров потребовались математические



методы, развивавшиеся в течение всего XX столетия. Отметим, что высокая стоимость современных компьютерных томографов больше связана не с инженерной сложностью конструкций, а с защитными в них нетривиальными математическими алгоритмами, представляющими основную коммерческую тайну.

Современные томографы работают в режиме реального времени и отличаются высокой точностью, выявляя малейшие отличия в плотности исследуемых тканей (порядка долей процента).

Однако применение рентгеновской компьютерной томографии не всегда показано из-за жёсткости рентгеновского излучения (например, её не рекомендуется применять для диагностирования беременных женщин). В этой ситуации приходится прибегать к менее жёсткому ультразвуковому исследованию. Ультразвук не обладает мощностью рентгеновского излучения, переменная плотность тканей приводит к тому, что ультразвуковое излучение распространяется вдоль кривых линий, а не прямых. Но криволинейная задача Радона — задача о восстановлении функции на плоскости по её интегралам вдоль всевозможных кривых определённого вида, — до сих пор остаётся нерешённой. По этой причине приходится пользоваться формулой Радона для прямолинейного случая, что сказывается на точности ультразвуковых томографов по сравнению с их рентгеновскими собратьями. Усовершенствование работы ультразвуковых томографов напрямую зависит от прогресса в решении сформулированной математической задачи.

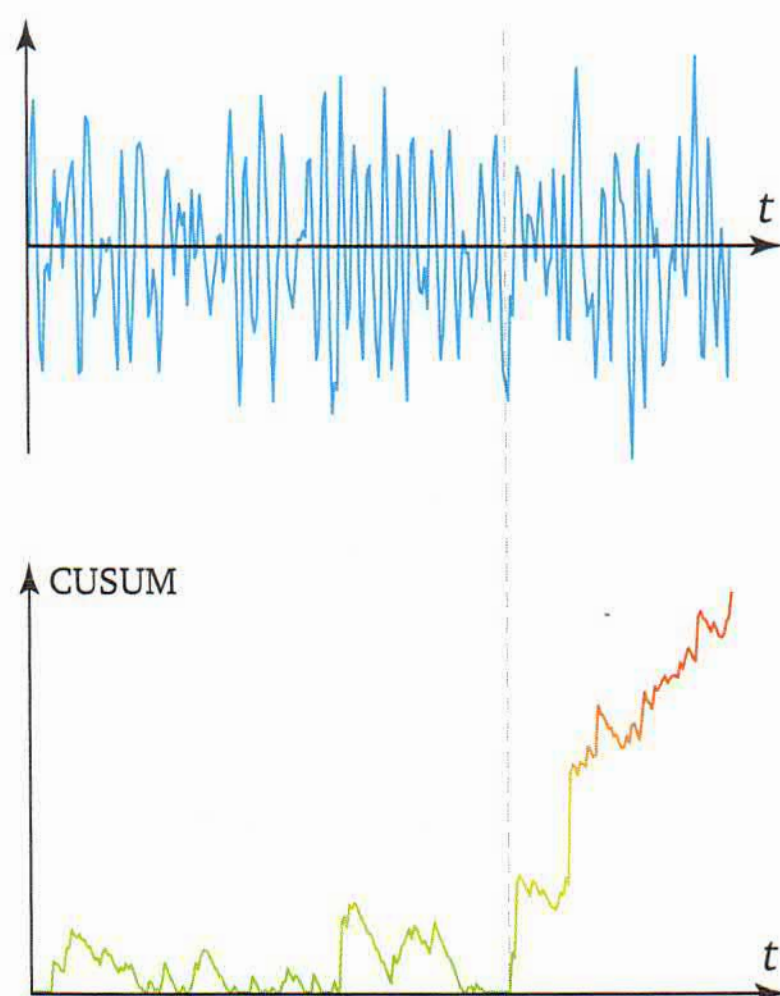
Криволинейная задача Радона имеет важное значение не только в медицине, но и, например, в геологии, где она возникает при сейсморазведке полезных ископаемых. Допустим, требуется найти рудное тело, находящееся на большой глубине. С этой целью на земной поверхности производится серия микровзрывов, эффект от которых фиксируется прилегающими сейсмическими станциями. По скорости распространения сейсмических волн можно получить данные для постановки криволинейной задачи Радона. Её решение в этом случае позволило бы локализовать разыскиваемое полезное ископаемое. Таким образом, и в случае сейсморазведки дальнейший прогресс зависит от решения криволинейной задачи Радона.

Приведено только два примера использования математических методов томографии — в медицине и геологии. На самом деле, таких применений намного больше.

Сформулированные задачи относятся к области математики, называемой интегральной геометрией. В этой науке остаётся ещё много нерешённых задач, но можно не сомневаться, что любой прогресс в их решении найдёт важные практические применения.

Обнаружение разладки

Так устроена природа, что многие реальные процессы являются случайными, наблюдателю неизвестно будущее. Одна из задач теории принятия решений в условиях неопределённости — определение



в реальном времени момента разладки: момента, когда происходит скачкообразное изменение характеристик процесса. Разладка — событие редкое, но существенное, и её своевременное обнаружение при анализе данных часто имеет решающее значение.

Это можно ощутить, почувствовать на следующих примерах из разных областей. Наблюдение и анализ природных явлений — метеорология, предсказание землетрясений на основе анализа показателей датчиков сейсмических станций. В экономике — анализ финансовых рынков и контроль качества выпускаемой продукции. В компьютерных системах — мониторинг динамических факторов, характеризующих изменения системы,

в частности, для обнаружения нежелательных вторжений. Отдельная чувствительная область — медицина: слежение за сигналами жизнедеятельности больного в палате интенсивной терапии, обнаружение эпидемий.

Момент разладки для наблюдателя не известен заранее, причём до этого момента «идёт» один процесс, а затем наблюдается уже другой процесс, часто — весьма сходный «внешне» с первоначальным, и чтобы их различить, необходимо использовать математические инструменты. Например, в радиолокации до неизвестного момента разладки наблюдается «шум», а затем, после него, наблюдается «шум + сигнал», где «сигнал» (может быть, и весьма слабый) отвечает появившейся цели.

Этот пример подсказывает, как следует формулировать задачу обнаружения момента разладки: надо, чтобы вероятность ложной тревоги была мала, но если тревога поднимается «правильно», т. е. после момента разладки, то (среднее) время запаздывания было бы как можно меньше. Подчеркнём, что момент объявления тревоги должен определяться по «прошлым» данным. Эти требования противоречивы, поэтому обычно предполагают, что вероятность ложной

тревоги не больше некоторого малого значения, и надо минимизировать среднее время запаздывания момента поднятия тревоги.

Великий российский математик Андрей Николаевич Колмогоров в первой половине XX века предложил аксиоматику, превратившую теорию вероятностей в стройную математическую дисциплину. В середине XX века он дал строгую постановку задачи о скорейшем обнаружении разладки для винеровского процесса (математической модели многих явлений), сформулировав её как вероятностную экстремальную проблему. Тогда же появился полностью обоснованный теоретически метод обнаружения разладки и даже сам термин «разладка». Существуют и другие методы решения задачи, но возникший в школе Колмогорова метод является и конструктивным, и востребованным на практике.

Формулировка задачи обнаружения разладки в вероятностных терминах связана со случайностью значений наблюдаемых данных. Описать их разнообразный характер как-то просто вряд ли возможно, поэтому и применяется вероятностное описание, учитывающее, что эти величины — случайные, их значения меняются от одного момента времени к другому.

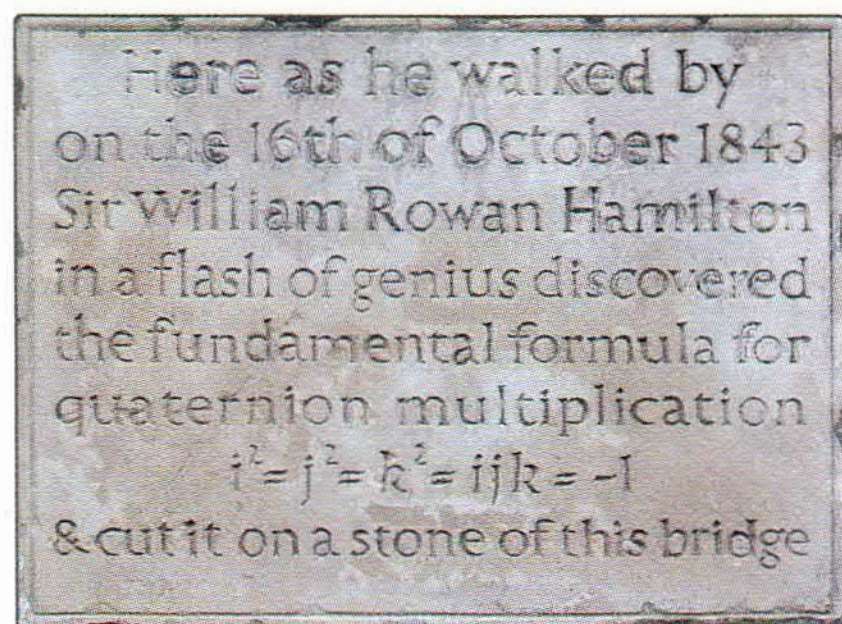
Методы решения задач скорейшего обнаружения в значительной мере опираются на современный аппарат теории случайных процессов, стохастического исчисления, теории мартингалов, нелинейной фильтрации и т. д. В свою очередь, многие из этих разделов получили развитие именно на пути решения задач скорейшего обнаружения. Это служит хорошей иллюстрацией того, как происходит развитие теории, когда она нацелена на решение конкретных задач, имеющих практический интерес. В общем-то, и всё развитие вероятностных дисциплин имеет сходный характер. Из истории науки известно, что зарождение теории вероятностей было связано с оценкой благоприятных исходов в азартных играх, а началом математической статистики стали попытки разрешения вопросов геодезии и астрономии.

Превративший теорию информации в область математики Клод Шеннон писал: «Сознавая, что теория информации является сильнейшим средством решения проблем теории связи (и в этом отношении её значение будет возрастать), нельзя забывать, что она не является панацеей для инженера-связиста и тем более для представителей других специальностей. Очень редко удаётся открыть одновременно несколько тайн природы одним и тем же ключом».

Мы приводим эти слова, чтобы подчеркнуть: постановки задач и известные методы их решения должны побуждать читателя формулировать новые задачи, искать для их решения новые подходы, стимулирующие развитие и собственно теоретических исследований.

Кватернионы выходят в космос

В ирландской столице Дублине на мосту Брум висит памятная табличка: «На этом месте 16 октября 1843 года во время прогулки сэр Уильям Роуэн Гамильтон в минуту гениального прозрения открыл формулу, определяющую умножение кватернионов,



$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

и нацарапал её на камнях этого моста».

Эти правила позволяют определить умножение кватернионов — четвёрок вещественных чисел (на латыни *quaterni* означает «по четыре»). Четвёрку $q = (a; b; c; d)$ можно рассматривать как разложение

$q = a + bi + cj + dk$, где i, j, k — «мнимые единицы» из формулы на мосту Брум.

Одни учёные — например, создатель теории электричества Максвелл — приняли теорию кватернионов и стали её использовать. Другие отвергали, находили её вычурной и непрактичной.

Миновал век, даже больше. И неожиданно вместе с человеком кватернионы вышли в космос. В конце 1960-х годов у конструкторов космических аппаратов появилась техническая возможность установки ЭВМ на борту корабля. Наряду с Центром управления полётами на Земле и космонавтами на борту, вычислительная машина должна была управлять кораблём. Требования к машине были предельно жёсткими: устойчивость к перегрузкам и малый вес необходимо было совместить с высоким быстродействием и достаточным объёмом памяти.

Одна из главных задач для бортового компьютера — постоянный расчёт координат и ориентации корабля. На тот момент было два основных способа описания ориентации: использование углов Эйлера и метод направляющих косинусов. У каждого из этих способов есть существенные практические недостатки. В первом случае опасность возникает, когда описание положения корабля на языке углов Эйлера вырождается, в результате происходит сбой в управлении ориентацией. Во втором варианте вычислительная техника того времени просто не справлялась с необходимостью обновления информации с шагом в сотые или даже тысячные доли секунды (а такая необходимость возникала на активных участках полёта — выведении на орбиту и спуске корабля).

Решение, позволяющее избежать перечисленных проблем, было найдено сотрудниками Центрального конструкторского бюро экспериментального машиностроения (бывшее ОКБ-1 С. П. Королёва). Учёные и инженеры поняли, что описание движений в трёхмерном пространстве на «четырёхмерном» языке кватернионов позволяет разработать систему управления движением (СУД), удобную для вычислений и реализуемую на бортовой ЭВМ.

Дело в том, что движения в трёхмерном пространстве можно представить как алгебраические операции (сложение и умножение) с кватернионами (четвёрками чисел). А это, в свою очередь, означает выполнение ряда арифметических операций с обычными числами — компонентами кватернионов.

В созданной «кватернионной» СУД нет опасностей, связанных с вырождением описания, нет и перегрузки ЭВМ из-за необходимости непрерывно вычислять значения тригонометрических функций.

Курс изучения СУД входит в программу общекосмической подготовки космонавтов, так что всем кандидатам приходится изучать кватернионы.

Представление параметров ориентации в терминах кватернионов не является совершенным — не хватает наглядности. Обычно космонавты ещё на тренировках многократно отрабатывают штатные режимы и запоминают контрольные значения параметров, включая кватернионы.

Одна из самых сложных и ответственных операций в космосе — стыковка кораблей. Вот история одной из нештатных ситуаций на орбите, в которой выручило умение «читать» кватернионы.

Космонавту Александру Сереброву в его третьем полёте довелось с Александром Викторенко принимать на станции «Мир» модуль «Квант-2». Программа автоматической стыковки уже была запущена, как вдруг из-за переполнения памяти бортовой ЭВМ остановились силовые гироскопы (гиродины). Пришлось переходить на ручной режим сближения и стыковки. Викторенко управлял ориентацией станции, а Серебров на экране монитора следил за параметрами процессов. И когда одна из команд Викторенко оказалась ошибочной, Серебров по «кватернионам» сразу это заметил, сказались результаты тренировок. Ошибку исправили, стыковка была успешно завершена.

Эффективность «кватернионных» систем управления ориентацией определила их выбор в качестве международного стандарта, в частности, они применяются на Международной космической станции.

А сейчас ставшие классикой «кватернионные» системы возвращаются на Землю, находя применения в робототехнике и даже в современных автомобилях. Есть работа для кватернионов и в виртуальном мире — это важный инструмент в системах трёхмерной графики и для создания компьютерных игр.

Оптимальное управление

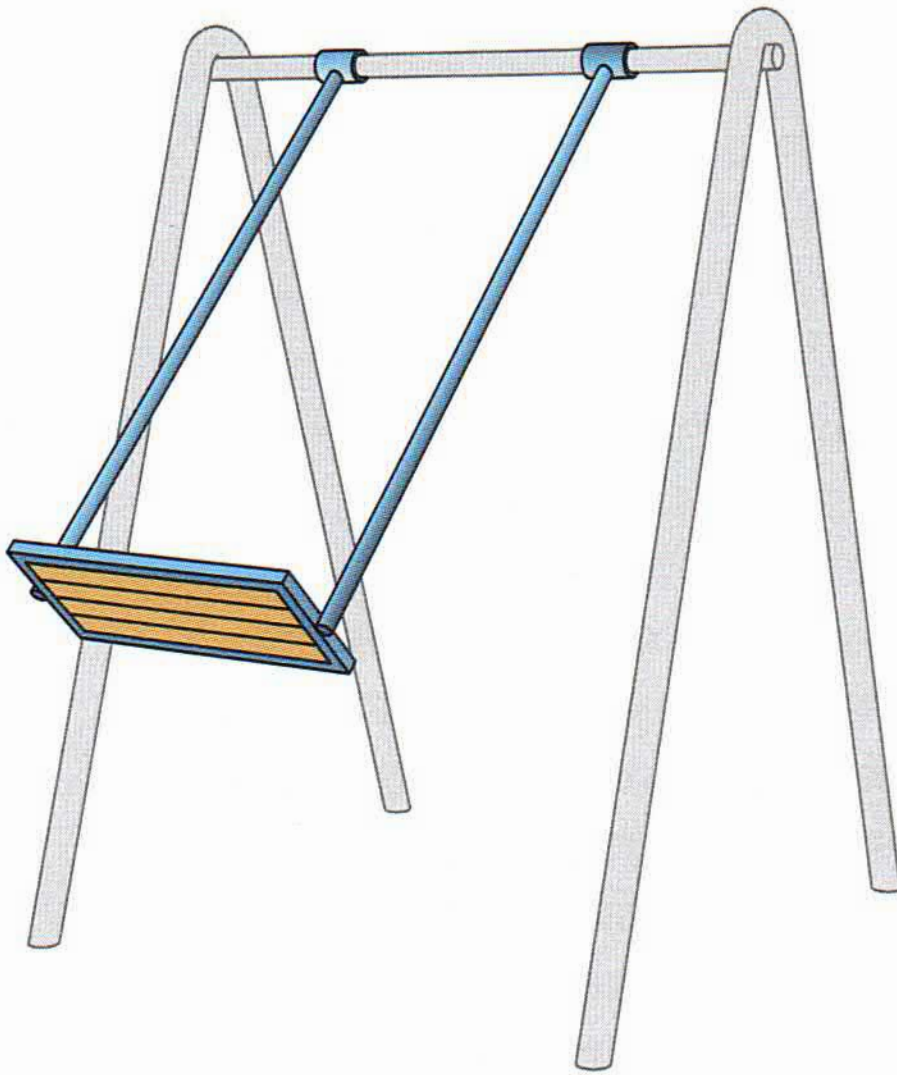
Человеку свойственно стремление к совершенству. В математике оно проявляется в поиске наилучших (оптимальных) решений, включая все задачи на максимум и минимум. К теории оптимального управления относятся те из них, где

решение имеет некоторую протяжённость во времени или в пространстве. Подходящий образ — прокладывание наилучшего пути при движении по сильно пересечённой местности.

Вообще, математики, как и все люди, очень любят зрительные образы, но в действительности речь идёт о любой системе, которую можно непрерывно менять в определённых пределах, как мы меняем направление движения при прокладывании пути. Другие подходящие примеры: управление автомобилем, летательным аппаратом, технологическим процессом, своим телом, в конце концов.

Требуется наилучшим образом перевести систему из заданного состояния в желаемое: как можно быстрее, или наиболее экономным образом, или с наибольшей выгодой, или в соответствии с каким-то более сложным критерием; мы сами решаем, что важнее. Если мгновенная реакция системы на наши действия хорошо известна, то теория оптимального управления призвана помочь нам найти наилучшую долговременную стратегию. Вот простой пример: нужно как можно быстрее остановить колебания (скажем, остановить «качели»), прикладывая свою невеликую силу то с одной стороны, то с другой. Переходить с одной стороны на другую придётся многократно. По какому правилу это делать? Понятно, что «качели» могут быть и финансовыми, и экономическими, и физико-техническими...

Стоит заметить, что такой очевидно прикладной предмет, как теория оптимального управления, был создан в Математическом институте имени Стеклова чистыми математиками, Львом Семёновичем Понтрягиным и его учениками, профессиональными топологами. Первые впечатляющие применения этой теории, принесшие



ей славу, относятся к советской космической программе и американской программе «Аполлон». В этих программах всё делалось на пределе возможностей, и без умной оптимизации было не справиться. Среди популярных тогда задач можно отметить наиболее экономный перевод космического аппарата с одной эллиптической орбиты на другую и мягкое прилунение. Главное достижение того периода — принцип максимума Понтрягина — мощное универсальное средство, позволяющее отобрать достаточно узкий класс управляющих стратегий, среди которых только и может быть оптимальная.

Принцип максимума Понтрягина особенно хорош в применении к простым «линейным» моделям, но теряет свою эффективность и должен быть дополнен другими средствами при исследовании систем с более сложной нелинейной структурой. Вернёмся к примеру с качелями. Если амплитуда колебаний небольшая, то система почти линейна и период колебаний почти не зависит от амплитуды. Принцип максимума даёт простой и однозначный закон оптимального поведения для линейного приближения: надо переходить с одной стороны на другую ровно через полпериода и всякий раз применять максимально возможную силу. В то же время при большой амплитуде, когда система существенно нелинейна, рекомендации принципа максимума сильно усложняются и перестают быть однозначными.

Новые правила оптимального поведения, дополняющие принцип максимума, даёт активно развиваемая в настоящее время геометрическая теория управления. Дело в том, что современная геометрия позволяет очень сильно расширять возможности управления, играя порядком и длительностью применения нескольких простых манёвров, отбирая оптимальные «гармоничные» сочетания манёвров, результат каждого из которых хорошо известен и вполне банален. Похоже на то, как из нескольких нот составляется симфония, только в математике всё точнее, строже и симметричнее, хотя и не столь эмоционально.

Геометрическая теория управления применяется в космической навигации, робототехнике и многих других областях, но наиболее популярные современные приложения относятся, пожалуй, к квантовым системам (от медицинских аппаратов ядерного магнитного резонанса до химических манипуляций с отдельными молекулами). Обаяние геометрической теории управления состоит, среди прочего, в редкой возможности материализовать, увидеть и «пощупать» красивые и глубокие абстрактные математические концепции, ну и, конечно, создавать новые!

Математические модели механики

Механика — наука о движении и равновесии тел и сплошных сред под действием сил различной природы и о взаимодействиях, процессах, которые сопутствуют этим движениям.

Ряд разделов механики связан с основным значением слова «механика» у древних греков — наука о машинах, механизмах. И в наше время создание новых самолётов, судов, ракет, автомобилей — всё это области приложения механики. Ещё одна задача механики — разработка методов управления подобными системами, например, полётом ракеты или движениями робота. К предмету исследования механики относятся и такие области знаний, как прогнозирование погоды, основанное на расчёте сложных движений атмосферы, связанных с переносом тепла и влаги, или изучение системы кровообращения человека в здоровом состоянии и состоянии болезни, конструирование новых материалов.

Один из основных методов современной механики — создание и исследование математических моделей изучаемых явлений. При рассмотрении сложных процессов невозможно полностью учесть все обстоятельства и процессы, которые связаны с изучаемым явлением. Поэтому в механике (да и вообще в науке) изучение реального явления заменяют изучением его модели. Модель — это представление (схема) явления, более простое, чем оригинал, но отражающее его основные свойства. Математическая модель — описание этой схемы математическим языком. Важное требование — математическая модель должна быть такой, чтобы при её изучении можно было надеяться на получение результатов, отражающих существенные свойства исследуемого явления. Как правило, отсутствие решений у какой-либо математической задачи в рамках выбранной модели свидетельствует о её несоответствии реально наблюдаемому процессу, т. е. о том, что выбранная модель требует корректировки.

Существуют стандартные, общеупотребительные модели, например, материальная точка, абсолютно твёрдое тело, упругая сплошная среда, различные модели упругопластических сред, идеальная (невязкая) жидкость и газ, вязкие жидкости и газы, модели смесей и многие другие. Моделируются не только объекты изучения, но также способы их взаимодействия, т. е. вводятся понятия различного рода сил и полей, понятия потоков тепла, диффузии и т. д. Главные инструменты в этих моделях — дифференциальные уравнения.

Искусство учёного-механика состоит в том, чтобы при рассмотрении явлений и решении технических проблем выбрать наиболее простую модель, адекватно описывающую изучаемый процесс. Например, земную кору в медленно протекающих процессах, длящихся десятки тысяч лет, рассматривают как очень вязкую жидкость, в то время как при землетрясениях земная кора моделируется как упругое тело. Движение металла при кумулятивном пробивании брони в классической модели М. А. Лаврентьева описывается как течение идеальной, т. е. невязкой, жидкости. Основанием для возможности подобного описания служит то, что при гигантских скоростях прочностные свойства металла кумулятивной струи и брони оказываются ничтожными по сравнению с силами давления, которое возникает в результате инерционных эффектов. С другой стороны, при взаимодействии водяной струи с ударяющей по ней быстро летящей пулей струя разваливается на куски (обломки, а не капли), как твёрдое тело.

Как и в каждой развивающейся науке, в механике постоянно разрабатываются новые модели. Например, в середине XX века были созданы и ныне активно используются модели жидкостей и газов, взаимодействующих с электромагнитным полем, — магнитная гидродинамика, электрогидродинамика, гидродинамика намагничивающихся жидкостей.

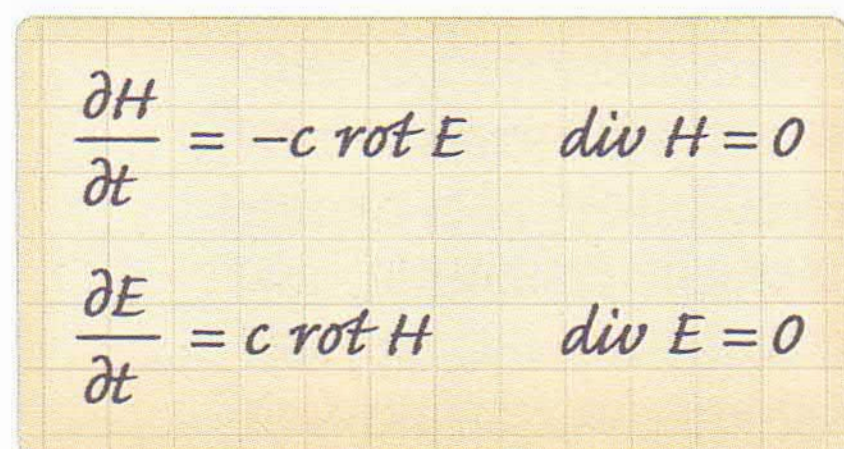
Между математиками и механиками нет чёткой границы. Своими работами механики развивают и математику, формулируя и решая новые математические задачи. У многих математиков предметом гордости являются результаты, имеющие отношение к механике.

Особенность работы учёного-механика — стремление понять внутренние механизмы изучаемого явления. Эта работа предшествует выбору модели, а её результаты позволяют механикам, полагаясь на интуицию, использовать и те модели, в которых для поставленных задач ещё не доказаны теоремы существования и единственности решений. Так, уже более полутора веков активно используется модель течения вязкой жидкости Навье—Стокса, в то время как теорема существования и единственности для этой модели до сих пор не доказана.

Сложность современных математических моделей в механике, переплетение в них физических, геометрических и других характеристик процессов приводят к необходимости применения всех средств современной математики. В одних случаях для решения задачи достаточно применения существующих методов и подходов, в других — требуется разработка нового математического аппарата.

Уравнения электродинамики

Какое научное открытие XX века следует считать наивысшим достижением? Наверное, создание квантовой механики. При этом мы помним и о релятивистской механике (как специальной, так



The image shows a piece of yellowed graph paper with handwritten equations in dark ink. The equations are arranged in two rows. The first row contains $\frac{\partial H}{\partial t} = -c \operatorname{rot} E$ and $\operatorname{div} H = 0$. The second row contains $\frac{\partial E}{\partial t} = c \operatorname{rot} H$ and $\operatorname{div} E = 0$.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -c \operatorname{rot} E \quad \operatorname{div} H = 0$$
$$\frac{\partial E}{\partial t} = c \operatorname{rot} H \quad \operatorname{div} E = 0$$

и общей), и о двойной спирали в генетике. Особая роль квантовой механики состоит не только в объяснении происходящего в микромире (на уровне атомов и частиц), но и в порождённых ею новых технологиях. Достаточно упомянуть транзисторы и лазеры, сверхпроводимость и атомную промышленность. Кстати сказать, в кванто-

вую механику существенный вклад внесли математики, разработав для описания квантовых закономерностей адекватный математический аппарат. Более того, даже первое квантовое уравнение для атома водорода решил математик Вейль по просьбе Шрёдингера.

Аналогичный вопрос можно задать и про XIX век. Ответ очевиден: создание электромагнитной теории, ключевым элементом которой являются уравнения Максвелла. Конечно, и здесь мы не забываем другие выдающиеся достижения, такие, как создание термодинамики и статистической механики. Но уравнения Максвелла дали возможность «управлять» электричеством, на смену эпохе пара пришла эра электрической энергии.

В электродинамике у Максвелла были выдающиеся предшественники: Эрстед, Ампер и, конечно, Фарадей. Они экспериментально установили основные законы электродинамики. Были открыты индукционные токи, силовые магнитные линии, явление самоиндукции и т. д. Но, наверное, одно из самых ярких достижений в этой области — это введение в обиход понятия поля. Речь идёт о том, что электричество и магнетизм, так сказать, «пронизывают» всё пространство. Они присутствуют даже тогда, когда в этом месте пространства нет «пробных» зарядов и токов, по действию на которые мы могли бы судить о наличии электрического и магнитного полей.

Итак, по Максвеллу, у нас есть два векторных поля: электрическое и магнитное. Они зависят от точки пространства и ещё от времени. Учитывая результаты экспериментов, Максвелл вывел систему уравнений, которым эти поля подчиняются.

Путь к простым по виду уравнениям был мучительно долгим, поскольку длительное время искали подходящие механические аналогии.

Главная идея, которой руководствовались Томсон (лорд Кельвин) и Максвелл, — аналогия с вихревым течением идеальной несжимаемой жидкости. Эта жидкость мыслилась как некоторое безмассовое вещество — тончайший эфир, которое заполняет всё пространство и находится в непрерывном движении. Идея восходит к знаменитому математику Декарту, который пытался построить на подобной основе вихревую теорию материи. Механические аналогии выполнили эвристическое предназначение, и в современных учебниках по электромагнетизму нет даже следов их использования. Но в самих уравнениях отголоски о вихрях и несжимаемости остались — в виде ротора и дивергенции.

Отметим два важных следствия уравнений Максвелла, сыгравших фундаментальную роль в развитии телекоммуникационных технологий и в становлении современных физических представлений о пространстве-времени.

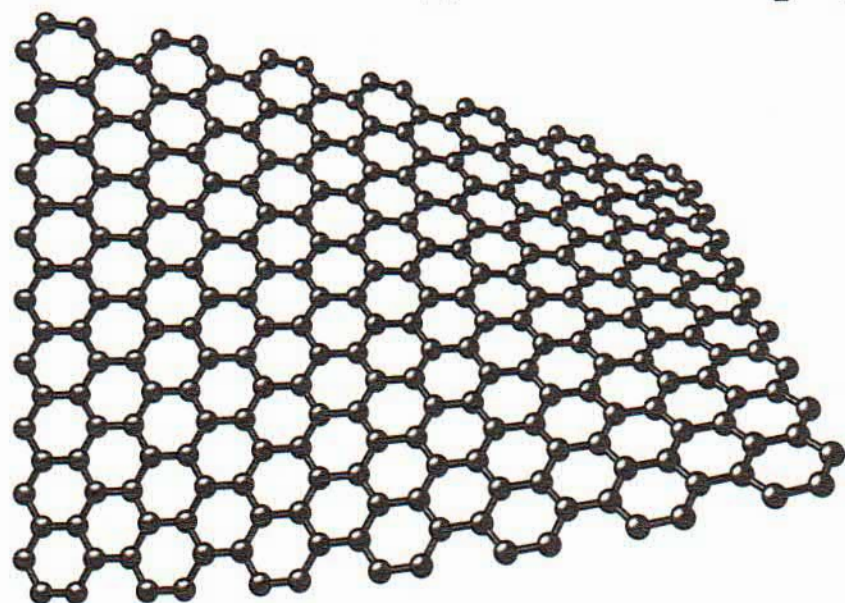
Уравнения Максвелла имеют простые частные решения в случае, когда в каждой точке пространства электрическое и магнитное поля перпендикулярны друг другу и одновременно совершают гармонические колебания с одинаковой частотой, не меняя своего направления. В результате образуется волна, которая распространяется прямолинейно со скоростью света. Тем самым проясняется электромагнитная природа света. В 1888 году Герц нашёл способ генерации электромагнитных волн. Сразу же после этого Попов и Маркони использовали идеи Герца для осуществления практической радиосвязи на расстоянии. Теперь невозможно представить современную цивилизацию без средств связи, основанных на уравнениях Максвелла.

Другое важное последствие уравнений Максвелла — это релятивистская механика. Она создана, в основном, усилиями физиков Лоренца и Эйнштейна, а также математиков Пуанкаре и Минковского. Оказалось, что уравнения Максвелла сохраняют свой вид относительно десятипараметрической группы линейных преобразований четырёхмерного пространства-времени, которую Пуанкаре назвал группой Лоренца. С другой стороны, уравнение второго закона Ньютона в трёхмерном пространстве допускает группу преобразований Галилея, также зависящую от 10 параметров. Основная идея релятивистской динамики состоит в том, что для согласования механики с электродинамикой группу Галилея следует заменить группой Лоренца. Идеи релятивистской механики сформировали наши современные представления о пространстве и времени.

Уравнения Максвелла не только стали математическим фундаментом электродинамики, но и позволили сохранить целостность всей физической картины мира.

Графен

Графен — один из самых интересных материалов, известных человечеству. Это первый двумерный материал — толщина графена всего один атом. В графене атомы углерода соединены в двумерную



решётку из правильных шестиугольников.

Графен можно представить себе как один слой графита — слоистого материала, из которого, например, состоит грифель простого карандаша. Слои графита соединены между собой слабым ван-дер-ваальсовым взаимодействием, вследствие чего графит легко расслаивается, что и обеспечивает возможность его использования в карандашах:

при трении тонкие слои графита отслаиваются и остаются в виде чешуек на поверхности бумаги. Удивительно, но именно так и были получены первые образцы графена — он просто был отщеплён от кристалла высококачественного графита обычной липкой лентой.

Несмотря на некоторую прозаичность получения, графен обладает целым букетом необычных физических свойств. Причём эти свойства часто отличаются от свойств не только исходного графита, но и двуслойного графена. Например, графен является замечательным проводником электричества и может выдерживать плотности тока, на порядки превышающие те, которые могут пропускать такие проводники, как медь или золото. Причём проводимостью графена можно управлять в широких пределах, что позволяет использовать его во многих электронных и оптоэлектронных приборах. Так, уже промышленно выпускаются фотодетекторы на основе графена, которые могут работать в сверхшироком диапазоне длин волн. А графеновые электронно-оптические модуляторы позволят в будущем значительно увеличить пропускную способность сетей Интернета. Графен также обладает рекордно высокой теплопроводностью и уже сейчас используется во многих мобильных телефонах и планшетах для эффективного теплоотвода. Список уникальных свойств графена и основанных на них применениях можно продолжать очень долго.

Ещё одно применение графена связано с измерением на нём квантового эффекта Холла. Этот эффект состоит в том, что в сильных магнитных полях сопротивление двумерного образца (где электроны могут передвигаться только в плоскости), измеренное вдоль

тока, зануляется (не путать со сверхпроводимостью), а измеренное поперёк тока (холловское сопротивление) — принимает квантованные значения в единицах $\frac{\hbar}{ne^2}$ (здесь \hbar — постоянная Планка, e — заряд электрона, n — целое число). За открытие этого эффекта в двумерном электронном газе на поверхности кремния Клаусу фон Клитцингу в 1985 году была присуждена Нобелевская премия по физике. Поскольку холловское сопротивление определяется только фундаментальными постоянными, этот эффект используется в качестве стандарта сопротивления во всех метрологических лабораториях мира.

Оказалось, что квантовый эффект Холла в графене имеет свои особенности из-за того, что электроны в этом материале ведут себя как безмассовые частицы (а это является следствием сотовидной решётки графена). Квантование сопротивления в графене наблюдается при относительно высоких температурах (порядка 1 Кельвин) и в относительно низких магнитных полях (несколько Тесла), в то время как в других материалах для достижения той же точности необходимо было опускаться до температур ниже 0,1 К и достигать магнитных полей выше 10 Тл, что сопряжено с определёнными технологическими трудностями. Существует несколько причин, почему квантовый эффект Холла настолько устойчив в графене; одна из них — то, что энергетический уровень в графене, возникающий в магнитном поле (так называемые уровни Ландау) при нулевой энергии (как раз тот уровень, который даёт наиболее устойчивое квантование), является топологически защищённым.

Существование энергетического уровня точно при нулевой энергии является следствием математической теоремы Атьи—Зингера об индексе. В применении к случаю графена эта теорема гласит, что индекс гамильтониана (числовая характеристика оператора, задающего поведение системы) определяется исключительно полным потоком магнитного поля через образец. Поэтому даже в пределах больших магнитных полей на нулевом уровне остаются электроны способные переносить заряд. Причём неоднородности магнитного поля, которые могут возникать по причине, например, изогнутости плёнки графена, никак не влияют на количество электронов на нулевом уровне. Изгиб и стабильность двумерных мембран — это ещё одна интересная математическая задача, которая обрела практическую значимость в связи с появлением графена.

Теорема Атьи—Зингера заложила основу целого раздела математики — теории индекса. Эта теория, связывающая анализ и топологию, в настоящее время активно используется в физике при изучении топологических свойств физических объектов.

Теоретическая физика и современная математика

Теоретическая физика всегда рассматривалась в некотором смысле как математика реального мира, как основной источник математических идей начиная с XVII века, как основная движущая сила для 90% математиков и основная связующая нить между математикой и остальными естественными науками.

В XX веке теоретическая физика достигла своего наивысшего расцвета, она стала главной точной наукой. Великие лидеры теоретической физики были способны использовать, а иногда и создавать очень глубокие абстрактные математические теории, когда это было нужно для исследования реальности. Язык математики и техника теоретической физики были специально разработаны как наилучшие математические инструменты для исследования проблем реального мира. Были открыты новые законы природы, в наши дни на их основе разработаны новые технологии невероятной практической эффективности, и это навсегда изменило наш мир.

На протяжении нескольких столетий задача решения (интегрирования) дифференциальных уравнений, описывающих явления природы, была центральной во взаимодействии физики и математики.

Всем известно, какую роль сыграла решённая Ньютоном знаменитая проблема двух тел в развитии математических методов физики. В течение долгого времени после этого нахождение точного аналитического решения дифференциальных уравнений оставалось основным инструментом математической физики: если задача была или выглядела слишком трудной, то надо было её упростить, а затем искать точное решение.

Много усилий было потрачено на поиск специальных «интегрируемых случаев» таких знаменитых задач, как, например, задача о движении волчка. Ради этого в XIX веке открывали и разрабатывали все математические методы, включая степенные и тригонометрические ряды, интегральное преобразование Фурье—Лапласа, комплексный анализ, соображения симметрии. Иногда эти методы приводили к замечательным отрицательным результатам — доказательствам того, что та или иная модель неразрешима в принципе.

В XIX веке были открыты некоторые странные интегрируемые случаи, в которых никакой очевидной симметрии не просматривалось: интегрируемость геодезического потока на двумерных эллипсоидах в трёхмерном евклидовом пространстве (Якоби), движение

волчка со специальными параметрами в постоянном поле сил тяжести (Ковалевская) и некоторые другие. Какая же скрытая симметрия стоит за всем этим? Ответ был неясен до появления теории солитонов.

Солитоны (или уединённые волны) на воде были известны ещё в XIX веке, но с появлением первых компьютеров в 1960-х годах стали возможны численные эксперименты, показавшие новые замечательные свойства этих нелинейных волн. Их математическое объяснение привело к созданию теории интегрируемых солитонных моделей, связавшей различные разделы математики и физики. В этом ряду: нелинейные волны в сплошной среде (включая теорию плазмы и нелинейную оптику); квантовая теория, теория рассеяния и периодические кристаллы; гамильтонова динамика; алгебраическая геометрия римановых поверхностей и абелевых многообразий (тета-функции).

Выдвину следующий тезис: значительная часть наиболее важных открытий в математике и математической физике была сделана в процессе развития теории интегрируемых моделей.

В 70-е годы XX века в сотрудничестве математиков и физиков произошли важные сдвиги. Например, с помощью результатов топологии были объяснены важные экспериментальные наблюдения, ждавшие этого в течение полувека. В начале 80-х физики были единодушны в том отношении, что главное, что физики взяли из математики за последние 10 лет, — это топология.

В то же время в топологии начали применять открытия, сделанные физиками. Напомним, что из теории автодуального уравнения Янга—Миллса выросла теория инстантонов с её замечательными приложениями к четырёхмерной топологии. Теория уравнения Янга—Бакстера привела к теории полиномов Джонса в теории узлов. Знаменитые двумерные конформные теории поля дали множество интегрируемых моделей, также представляющих собой новые алгебраические объекты, имеющие глубокие связи с теорией солитонов и квантовыми группами.

В последнее десятилетие, уже в XXI веке, математические идеи, пришедшие от теоретических физиков, оказали большое влияние на развитие алгебраической геометрии. Взаимодействие математики и теоретической физики не прекратилось, достижения каждой из этих наук обогащают и другую.

В заключение хочу обратиться с пожеланием к молодым математикам: расширяйте спектр посещаемых научных семинаров и по математике, и по физике. Набирайтесь понимания, которое проявится, пусть и со временем.

О применениях математики в криптографии

Одной из важнейших областей применений математики является криптография — наука о шифрах, т. е. способах преобразования информации, позволяющих скрывать её содержание от посторонних. Государство, не имеющее возможности защищать дипломатическую, военную и иную секретную переписку, неизбежно проиграет в борьбе с конкурентами.

С развитием электронных коммуникаций криптография стала предметом интереса более широкого круга потребителей: возникла необходимость защиты технических, коммерческих, персональных и других данных, передаваемых негосударственными организациями по общедоступным каналам связи.

Основы современной теории секретной связи были разработаны Клодом Шенноном во время Второй мировой войны. Им была теоретически обоснована возможность построения совершенного шифра — такого способа шифрования, что у перехватившего преобразованное сообщение злоумышленника не будет ни одной «зацепки» для выделения исходного сообщения.

Допустим, что есть сообщение, которое надо зашифровать и передать получателю. Сначала исходное сообщение «оцифровывают», записав его в виде двоичной последовательности, состоящей из нулей и единиц. Способы преобразования сообщения (и шифрование, и расшифрование) можно подготовить заранее, если условиться, что сообщение в виде двоичной последовательности должно иметь не более T знаков. Строится секретная случайная двоичная последовательность длины T (например, её можно получить, подбрасывая T раз идеальную монету и полагая очередной знак равным 1, если выпал «орёл», и 0, если выпала «решка»). Эту секретную последовательность («ключ») необходимо доставить отправителю и получателю так, чтобы никому, кроме них, она не была известна. Когда придёт время передачи, отправитель воспользуется ключом: «сложит по модулю 2» (т. е. по правилу $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 0$) каждый знак передаваемого сообщения с соответствующим знаком ключа. Полученная последовательность и будет зашифрованным сообщением. Приняв зашифрованное сообщение, получатель также воспользуется секретным ключом: прибавит (по модулю 2) к каждому знаку зашифрованного сообщения соответствующий знак ключа и восстановит исходное сообщение.

Описанный шифр является совершенным, так как прибавление к шифрованному сообщению всех возможных двоичных последовательностей длины T даёт все возможные двоичные последовательности, и выделить из них истинное сообщение без знания ключа будет невозможно. Однако если использовать ту же секретную последовательность ещё хотя бы раз, то шифр перестанет быть совершенным.

Понятно, что применять подобные шифры при больших объёмах переписки неудобно. Как правило, для шифрования используют электронные устройства или компьютерные программы, реализующие сложные алгоритмы преобразования сколь угодно длинных сообщений с помощью секретных ключей. Таким образом, при выбранном алгоритме зашифрованное сообщение является функцией от исходного сообщения и ключа. Эту связь можно рассматривать как уравнение относительно ключа, если известны алгоритм, исходное и зашифрованное сообщения. Чтобы обеспечить практическую невозможность решения таких уравнений перебором всех возможных ключей, множество этих ключей должно быть астрономически велико.

В последние десятилетия в криптографии стали появляться шифры, стойкость которых обосновывается сложностью решения чисто математических задач: разложения больших чисел на множители, решения показательных сравнений в целых числах и других. Стойкость шифров зависит также и от качества генераторов случайных чисел, порождающих ключи.

Методы и результаты различных разделов математики (в частности, алгебры, комбинаторики, теории чисел, теории алгоритмов, теории вероятностей и математической статистики) используются как при разработке шифров, так и при их исследованиях, в частности, при поиске методов вскрытия шифров. Шифр можно считать стойким, пока при его исследовании не выявляются особенности, которые потенциально можно использовать для вскрытия шифра. Для пользователей шифра очень важно узнать, что он ненадёжен, раньше, чем этим смогут воспользоваться злоумышленники.

Криптография является богатым источником трудных математических задач, а математика — одной из основ криптографии. История показывает, что рано или поздно развитие математических методов и техники приводит к тому, что задачи, казавшиеся неразрешимыми, находят решение. Отставание в творческом соревновании математиков разных стран может привести к поражениям в экономике, дипломатии и военных операциях.

Квантовая информатика

Классическая теория информации — сравнительно молодая ветвь математики. Но порождённый ею мир мобильных телефонов, персональных компьютеров, цифровых фотокамер и других электронных устройств уже успел кардинально изменить нашу жизнь.

Исторический момент, предопределивший принципиальный переход к «цифре», можно указать точно: в 1948 году были совершены два революционных открытия. Первое — изобретение транзистора, проложившее путь к миниатюризации электронных устройств. Второе — возникновение математической теории информации, обосновавшей переход к цифровому представлению данных и предложившей универсальные методы обработки цифровых данных. Именно в 1948 году был опубликован основополагающий труд американского инженера-математика К. Шеннона, хотя некоторые его идеи были предвосхищены в работах по основам помехоустойчивой связи нашего учёного В. А. Котельникова.

Одна из целей теории информации — совершенствовать методы передачи информации и её хранения (можно считать, что это тоже передача, только во времени). Здесь есть два особо важных аспекта: скорость и качество (точность воспроизведения) передачи данных. Между этими двумя характеристиками имеется обратная зависимость: повышение точности достигается добавлением избыточной информации, что замедляет передачу. Максимально возможная скорость передачи данных, при которой обеспечивается исправление ошибок, вызванных помехами, называется пропускной способностью канала. Это важное понятие было введено К. Шенноном, им же была доказана теорема, определяющая верхний предел пропускной способности в рамках классической теории.

Сильной (и в то же время слабой) стороной классической теории информации, обусловившей её универсальность, является перевод информации в «цифру»: абстрагирование от содержания и природы передаваемых данных.

Но «информация — физична»: фундаментальным носителем информации является электромагнитное поле, например, в форме видимого света либо радиосигнала. Не учитывать физическую природу иногда просто невозможно: канал передачи информации по сути является квантовым, пределы скорости и точности передачи информации в нём — квантово-механические.

Квантовая информатика — это новое научное направление, синтез математических идей теории информации и физических законов микромира (квантовой механики). Информация представляется не числами, а состояниями поля, являющегося её носителем.

Два фундаментальных отличия квантового мира от классического — это дополнительность и сцепленность. Дополнительность означает, что у объекта (явления) квантового мира есть свойства, которые в принципе невозможно одновременно точно измерить. В частности, измерение одного свойства меняет другое. Сцепленность — характеристика составных квантовых систем. Две части такой системы находятся в сцепленном состоянии, если между ними установлена квантовая связь, действующая даже при их значительном удалении друг от друга. Для сцепленных объектов измерение одного приводит к изменениям в другом, причём моментально (при этом моментальная передача информации исключена). Оба свойства не имеют классических аналогов и даже контринтуитивны, но они подтверждены экспериментально.

Дополнительность и сцепленность позволяют создавать квантовые каналы связи и криптографические протоколы, защищённые самой природой — несанкционированное вмешательство будет сразу заметно. Эти свойства определяют и демонстрируют вероятностный по сути характер физики микромира. Умение извлечь эту «чистую» вероятность, не связанную с неполнотой наших знаний, уже воплощено в квантовых датчиках подлинно случайных чисел.

Квантовая информатика предлагает эффективные алгоритмы для решения сложнейших задач, которые недоступны никаким «классическим» суперкомпьютерам. Эти возможности потенциально можно реализовать в квантовом компьютере, элементы которого, кубиты, находятся в сцепленном состоянии, обеспечивающем особый «квантовый параллелизм» операций.

Теоретические достижения квантовой информатики опираются на методы и результаты как классических, так и современных, быстро развивающихся разделов математики — теории гильбертовых пространств, матричного и операторного анализа, некоммутативной теории вероятностей и статистики. Эти достижения открывают человечеству возможность совершить технологический прорыв, пройти путь от экспериментальных установок до создания действующих устройств.

С другой стороны, квантовая информатика даёт ключ к пониманию некоторых фундаментальных закономерностей природы: проясняются основания физики микромира, её соотношение с реальностью. Может оказаться и так (вспомните дополнительность!), что результаты на этом пути обозначат границы возможного.

Математика — язык описания возможностей

Когда мы занимаемся биологией, мы изучаем живые организмы. Когда мы занимаемся астрономией, мы изучаем небесные тела. Когда мы занимаемся химией, мы изучаем разновидности материи и их взаимопревращения. Мы наблюдаем и измеряем нечто в реальном мире, мы разрабатываем специализированные эксперименты в точно определённых условиях (впрочем, не в астрономии), и в результате всего этого мы строим объясняющую парадигму, которая становится на текущий момент вехой в развитии науки. Но что же мы изучаем, когда занимаемся математикой? Один из возможных ответов таков: мы изучаем идеи, с которыми можно обращаться так, как если бы они были реальными предметами.

Каждая такая идея должна быть достаточно жёсткой, чтобы сохранять свою форму во всяком контексте, где она может быть использована. В то же время у каждой такой идеи должен быть богатый потенциал для создания связей с другими математическими идеями. Когда первоначальный комплекс идей сформировался, связи между этими идеями также могут приобрести статус математических объектов, образуя тем самым первый уровень гигантской иерархии абстракций. В самом низу этой иерархии лежат мысленные образы самих вещей и способов манипулирования ими. Чудесным образом оказывается, что даже абстракции высокого уровня могут каким-то образом отражать реальность: например, знания о мире, полученные физиками, можно выразить только на языке математики.

Чтобы понять, как именно математика применяется к пониманию реального мира, удобно рассмотреть её в трёх модальностях: как модель, теорию и метафору. Математическая модель описывает (количественно или качественно) определённый класс явлений, но ни на что большее предпочитает не претендовать.

Качественные модели помогают понимать такие явления, как устойчивость и неустойчивость, аттракторы (предельные состояния, не зависящие, как правило, от начальных условий), фазовые переходы, происходящие, когда сложная система переходит границу между двумя фазами или между двумя бассейнами с разными аттракторами.

Теорию от модели отличают в первую очередь большие притязания. Та сила, что побуждает всё время создавать теории — это концепция реальности, существующей независимо от материального

мира и возвышающейся над ним, реальности, которую можно познать только с помощью математических инструментов.

Математическая метафора, в тех случаях, когда она претендует на статус инструмента познания, постулирует, что некоторый сложный набор явлений можно сравнить с какой-то математической конструкцией.

Математическая теория — это приглашение к построению работающих моделей. Математическая метафора — это приглашение к размышлению о том, что мы знаем. Разумеется, такое подразделение не является ни жёстким, ни абсолютным.

В структурном плане развитие математики идёт параллельно развитию языка. И математика, и язык служат мостиком между реальностью (в той мере, в которой она объективно существует) и наблюдаемым, т. е. тем, как реальность отражена в сознании.

Я убеждён, что наука, и в частности математика, не является движущей силой нашей цивилизации. Карты и машины у нас есть действительно благодаря науке, но наука не решает за нас, куда нам идти надо, а куда не следует. Думать иначе значило бы вернуться в эпоху архаического восприятия знания как одного из видов магии, когда человек, предсказавший затмение или то, как разрешится некоторая ситуация с неясным исходом, рассматривался как колдун, вызывающий события с помощью манипуляций с их символическими представлениями. На самом деле биологическая функция мысли состоит не в том, чтобы вызывать спонтанные реакции, а в том, чтобы их предотвращать.

Когда-то волхвы, шаманы описывали пространство возможностей, а не непосредственно окружавшее поселение племени пространство со всеми событиями, обитателями и прочим. Волхвы не занимались решением практических задач, это делал вождь племени. Но он прислушивался к своему шаману, советнику, который при нём находился и помогал принимать решения при выборе действий.

Знаменитый античный пример — история лидийского царя Крёза. Готовясь к войне с Персией он обратился к оракулу в Дельфах за советом и тот ответил: «Крёз, Галис перейдя, ты великое царство разрушишь», не уточняя, какое именно царство имеется в виду. Крёз перешёл через границу — реку Галис, и был разбит.

Математика описывает фазовое пространство реального мира, пространство возможностей. Она изучает законы, которые определяют возможные траектории в этом фазовом пространстве, а также условия — тот набор информации, который необходим для выбора конкретной фазовой траектории.

Инструментарий инженера

Для геометра математика сама по себе есть *конечная цель*, для инженера — это есть *средство*, это есть инструмент такой же, как штангель, зубило, ручник, напильник для слесаря или полусаженки, топор и пила для плотника.

Инженер должен по своей специальности уметь владеть своим инструментом, но он вовсе не должен уметь его делать; плотник не должен уметь выковать или наварить топор, но должен уметь отличить хороший топор от плохого; слесарь не должен уметь сам насекать напильник, но должен выбрать тот напильник, который ему надо.

Так вот, геометра, который создаёт новые математические выводы, можно уподобить некоему воображаемому универсальному инструментальщику, который готовит на склад инструмент на всякую потребу; он делает всё, начиная от кувалды и кончая тончайшим микроскопом и точнейшим хронометром. Геометр создаёт методы решения вопросов, не только возникающих вследствие современных надобностей, но и для будущих, которые возникнут, может быть, завтра, может быть, через тысячу лет.

Вообразите же теперь инженера, вошедшего в этот склад и желающего в нём найти нужный ему инструмент. Он прежде всего будет поражён огромным, подавляющим количеством всего накопленного за 2500 лет материала, его изумительным разнообразием. При более внимательном рассмотрении он заметит среди массы других вещей, кажущихся простыми, и некоторые сложнейшие аппараты непонятного ему назначения, но изумительные по отделке их многочисленных деталей, по тщательной их пригонке, да к тому же оправленные в серебро и золото.

Среди аппаратов новейшего изготовления он увидит множество приборов, служащих для самой точной, самой тщательной отделки изделий, т. е. множество разных шаберов и шлифовальных станков. Заметит он и много устарелого, вышедшего из употребления, местами будет попадаться и просто разный хлам.

Но ведь инженер пришёл сюда не затем, чтобы любоваться неисчислимыми сокровищами: не золото и серебро ему нужны, а быстрорежущая сталь, ему нужен не столько шабер, сколько грубая обдирка, грубое надёжное зубило, ведь не шабером же будет он выбирать шпунт у ахтерштевня. Присмотревшись ещё ближе, он среди этого бесчисленного разнообразия заметит ряд, видимо,

издавна систематически подобранных ассортиментов, остающихся почти неизменными в течение 150 лет, к тому же кладовщик ему подскажет, что их так часто требуют, что и не напасёшься, а за остальным заходят лишь знатоки — мастера и любители.

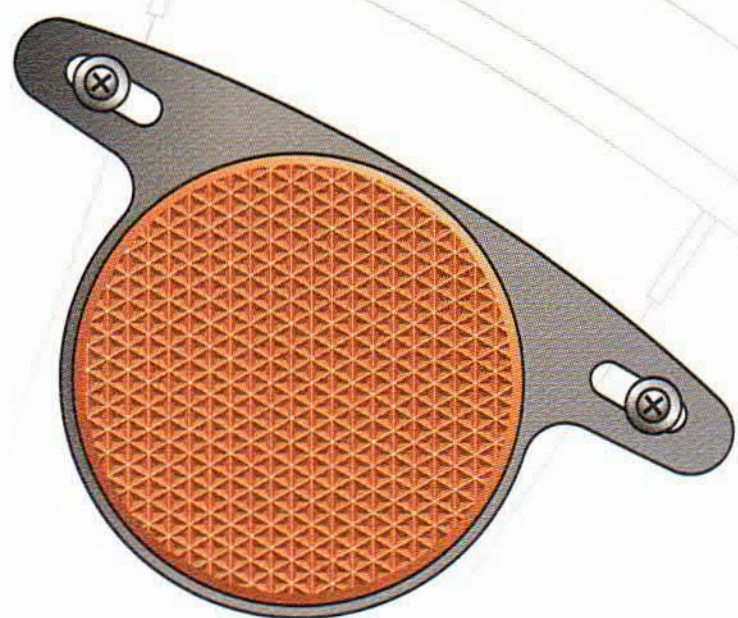
Не отнестись ли ему с доверием к этим ещё издавна великими мастерами подобранным ассортиментам и не следует ли ему воспользоваться этими готовыми и десятилетиями, если не столетиями, испытанными инструментами и научиться ими правильно и искусно владеть, а затем уже, когда он сам станет знатоком и мастером, порыться и в остальных сокровищах и попытаться извлечь из них именно то, что ему надо, не брезгуя и шаберами.

Так вот, эти систематические ассортименты — это те курсы, которые вам читают, и те руководства, изучение которых вам рекомендуют, а кладовщики и инструментальщики — это те профессора и руководители, которые вас обучают. Может быть, они сами и не инженеры, но зато они хорошо знают и хорошо владеют вверенным им инструментом, склад свой они изучили и знают, где и что в нём можно найти.

Угловой отражатель

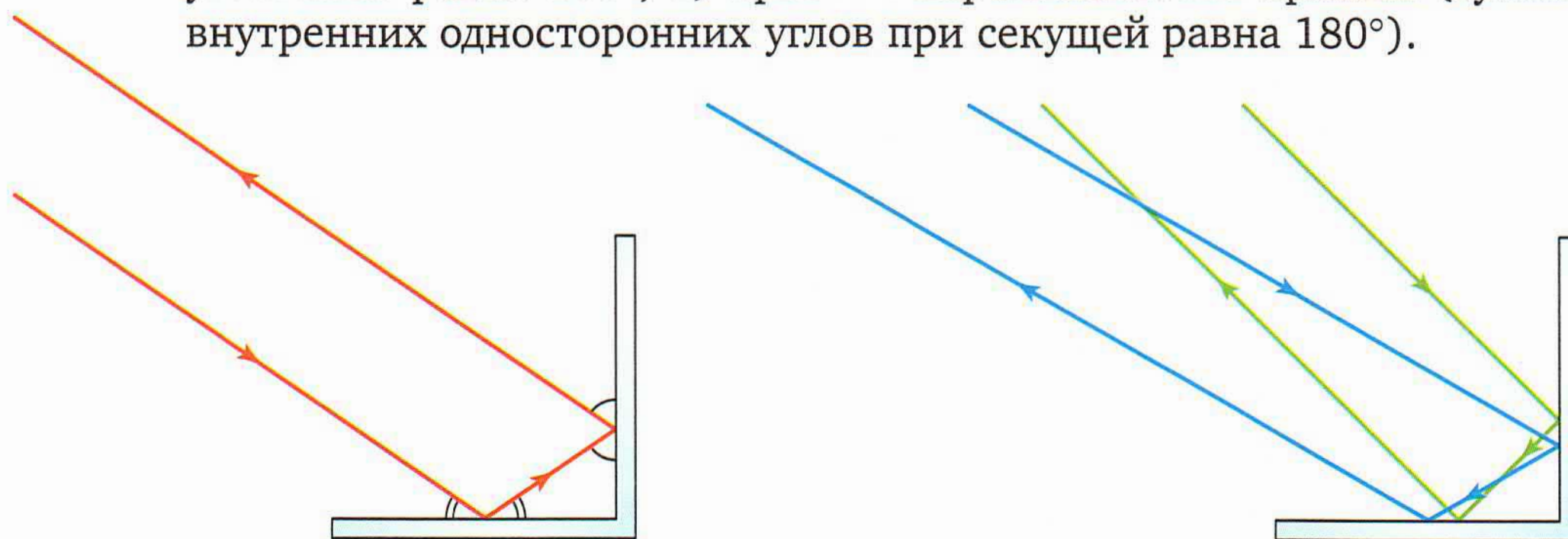
Катафот известен всем с детства — его устанавливают на спицах колёс велосипеда.

Катафоты играют важную роль в повышении безопасности дорожного движения. В отличие от фар, катафот не требует энергии и не содержит лампочек. Но если его закрепить на велосипеде, мотоцикле, автомобиле, если превратить в катафот с помощью специального покрытия даже небольшую часть куртки пешехода или поверхность дорожного знака, — во всех этих случаях водитель машины, фары которой осветили один из перечисленных объектов, сразу его заметит из-за отражения света фар от катафота.



Простейшая разновидность катафота — угловой отражатель, именно его мы видим на велосипедах и автомобилях. Для объяснения принципов работы углового отражателя достаточно школьных знаний из оптики и геометрии.

Возьмём в плоскости два перпендикулярных «зеркальных» отрезка, от которых луч отражается по закону «угол падения равен углу отражения». Отразившись последовательно от обоих зеркал, луч уйдёт в сторону источника параллельно исходному лучу. Для доказательства сформулированного утверждения достаточно вспомнить и применить два геометрических факта: 1) сумма углов в треугольнике равна 180° , 2) признак параллельности прямых (сумма внутренних односторонних углов при секущей равна 180°).



Чтобы получить такой эффект в нашем (трёхмерном) пространстве, нужно взять три взаимно перпендикулярных зеркала.

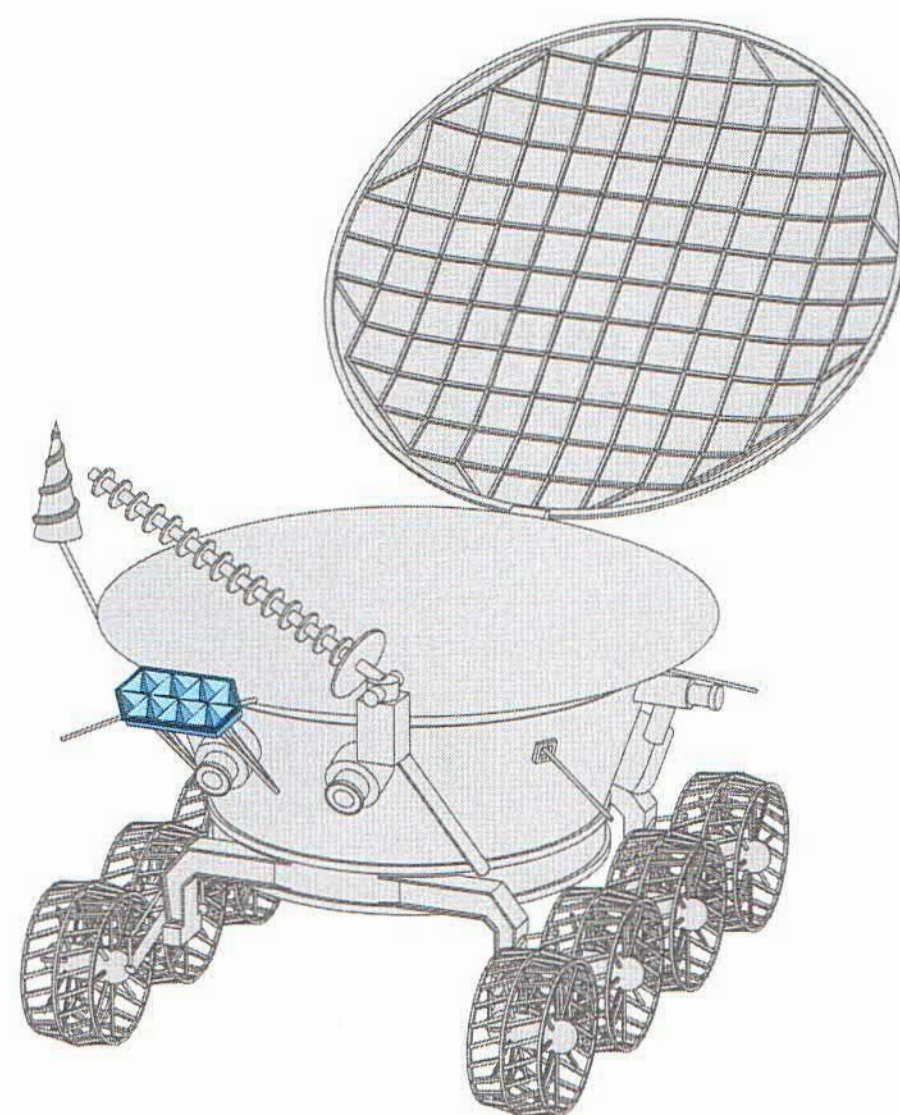
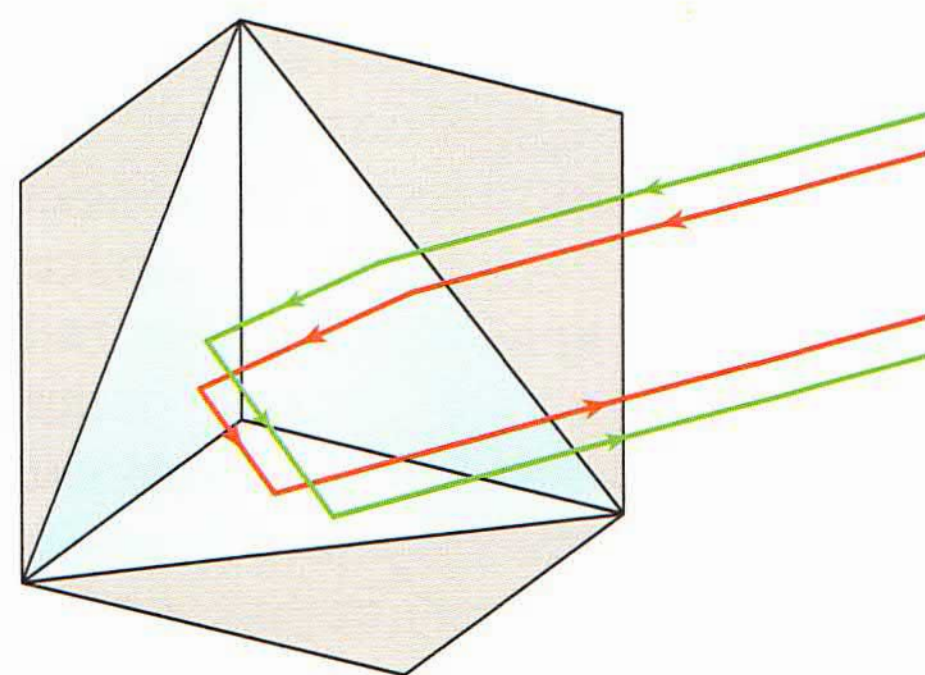
В этом случае «экономное» объяснение эффекта можно дать на языке векторов. Если направление исходного луча задаётся вектором с координатами $(a; b; c)$, то после отражения луча от плоскости xOy его направляющим вектором будет $(a; b; -c)$, а после последовательных отражений от плоскостей yOz и zOx — $(-a; b; -c)$ и $(-a; -b; -c)$ соответственно. Конечно же, подобное объяснение можно привести и для плоского случая.

Катафот данного типа представляет собой множество уголков-ячеек, что обеспечивает увеличение «отражательной силы» устройства. Для создания ячеистого зеркала важно то, что равными (и в частности равносторонними) треугольниками можно замостить плоскость.

Вернёмся к автомобилям — свет включённых фар, отразившись от катафота, «вернётся» к водителю машины, сообщая ему об объекте, находящемся впереди.

Катафоты верно служат и в других средах, например, их можно встретить на морях и реках: они являются частью оснастки небольших яхт и плотов; буй, определяющий границы участков и водные пути, с закреплённым на нём катафотом, становится источником важных сигналов.

Ещё один пример — из истории освоения космоса. Для исследования Луны в Советском Союзе была разработана серия аппаратов «Луноход». Первый аппарат «Луноход-1» был доставлен на поверхность Луны 17 ноября 1970 года, «Луноход-2» — в январе 1973 года. На обоих луноходах были установлены уголкового отражатели. Эти отражатели, а также отражатели американской программы «Аполлон» позволяют с большой точностью измерять постоянно меняющееся расстояние от Земли до Луны. А эта характеристика «межпланетных отношений» важна и в чисто земной жизни, например, в учёте влияния приливов и отливов, и в чисто космической, например, при расчёте траекторий космических аппаратов.



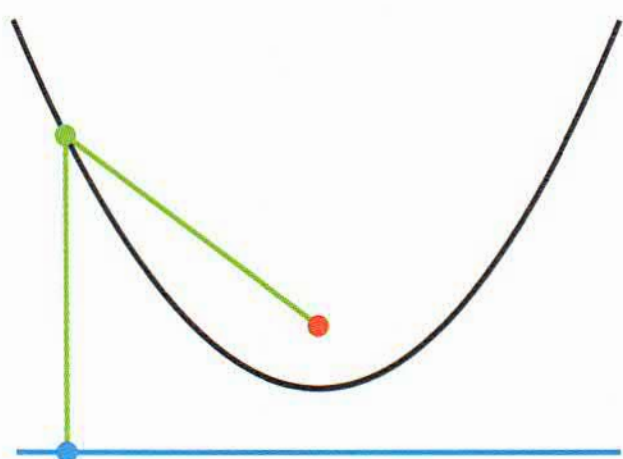
Параболическая антенна

Работа спутниковых антенн, в частности тех, которые принимают телевизионный сигнал, основана на оптическом свойстве параболы.

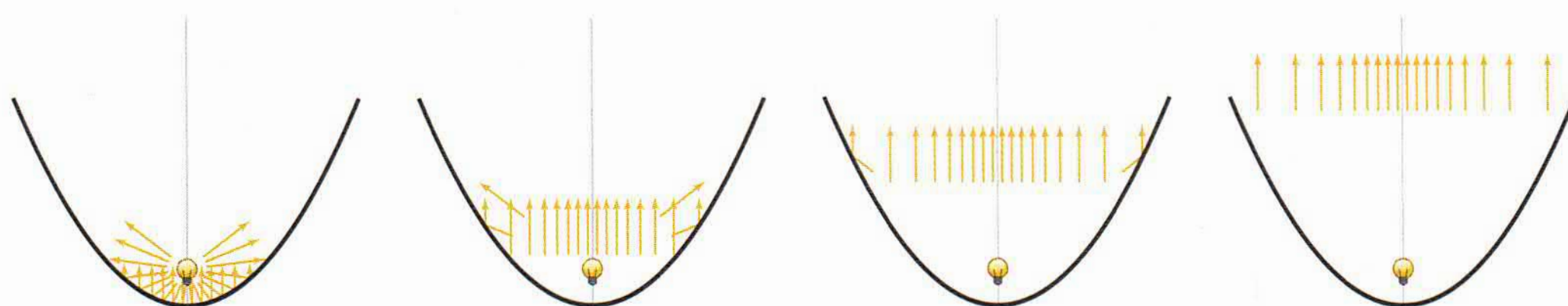
Парабола — это геометрическое место точек, равноудалённых от прямой (называемой директрисой) и от не лежащей на директрисе точки (называемой фокусом).

Из приведённого определения параболы несложно получить «школьное»: парабола — это график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (в частности, $y = x^2$).

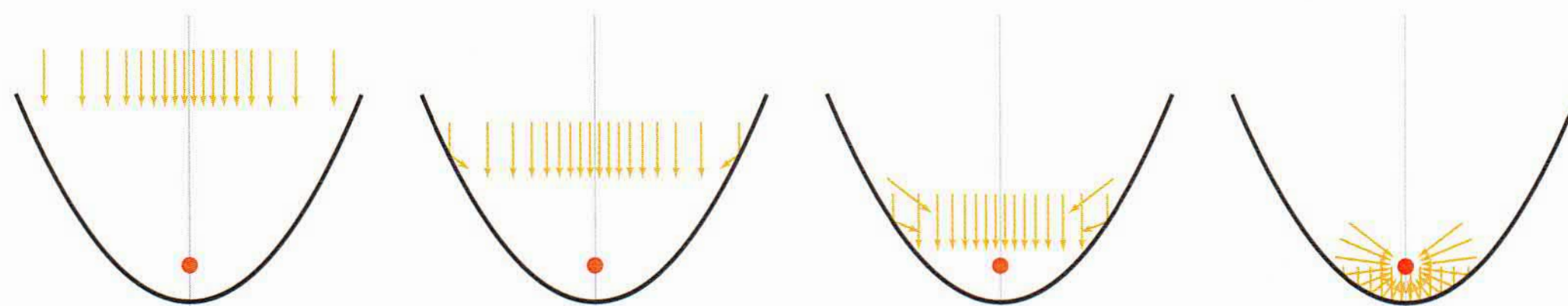
Сформулируем упомянутое оптическое свойство параболы. Если в фокусе параболы поместить точечный источник света (лампочку) и включить его, то лучи, отразившись от параболы, пойдут параллельно оси симметрии параболы, причём передний фронт будет перпендикулярен оси.



Верно и обратное — если на параболу падает поток лучей, параллельных оси симметрии, то, отразившись от параболы, лучи придут в фокус; причём придут одновременно, если передний фронт потока лучей перпендикулярен оси.



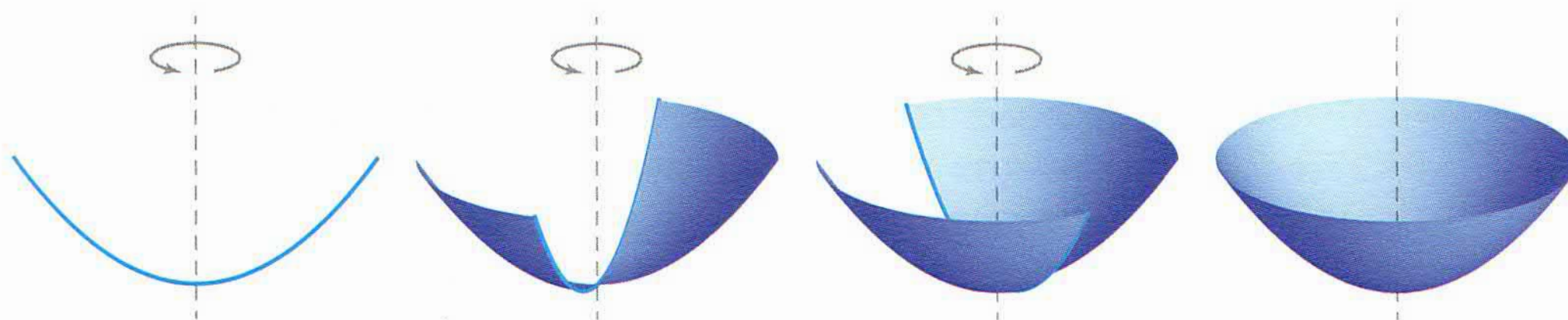
Верно и обратное — если на параболу падает поток лучей, параллельных оси симметрии, то, отразившись от параболы, лучи придут в фокус; причём придут одновременно, если передний фронт потока лучей перпендикулярен оси.



При вращении параболы вокруг её оси симметрии получается параболоид вращения — поверхность второго порядка.

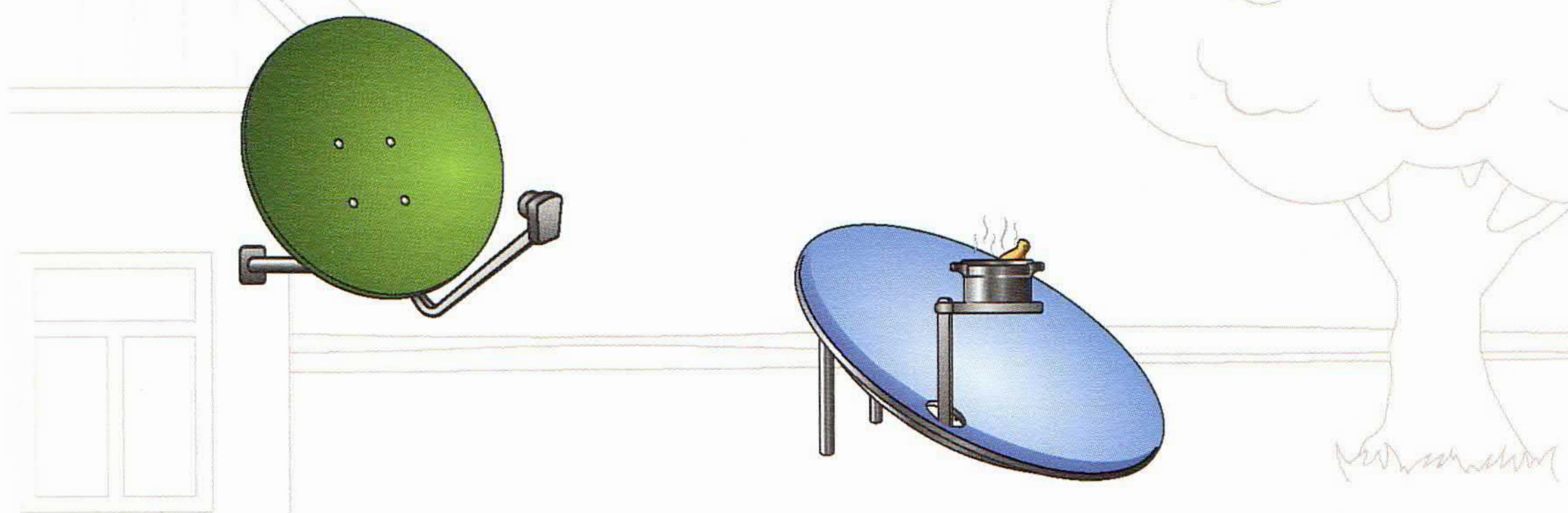
При любом сечении параболоида плоскостями, проходящими через ось симметрии, получаются равные параболы с общим фокусом, поэтому параболоид тоже обладает оптическим свойством. Если поместить излучатель в фокус, то лучи, отразившись от поверхности,

пойдут параллельно оси вращения. А если на параболоид падают лучи, параллельные его оси, то после отражения все они собираются в фокусе.



Оптическое свойство — принципиальная основа параболических антенн.

Антенны могут вращаться, пример — параболические антенны в аэропортах, по форме являющиеся «ломтиками» огромных параболоидов; они и передают, и принимают сигнал. Антенны могут быть неподвижными. К последнему типу относятся бытовые спутниковые телевизионные антенны («тарелки»): их нацеливают на спутник-ретранслятор, находящийся высоко над Землёй на геостационарной орбите, после чего их положение фиксируется. Поскольку спутник находится далеко от поверхности, приходящие от него лучи в точке приёма антенной можно считать параллельными. В фокусе спутниковой антенны находится приёмник, от которого сигнал по кабелю отправляется к телевизору.



Эта же идея применяется при создании прожекторов железнодорожных локомотивов, фар автомобилей, её можно использовать даже для приготовления еды в полевых условиях.

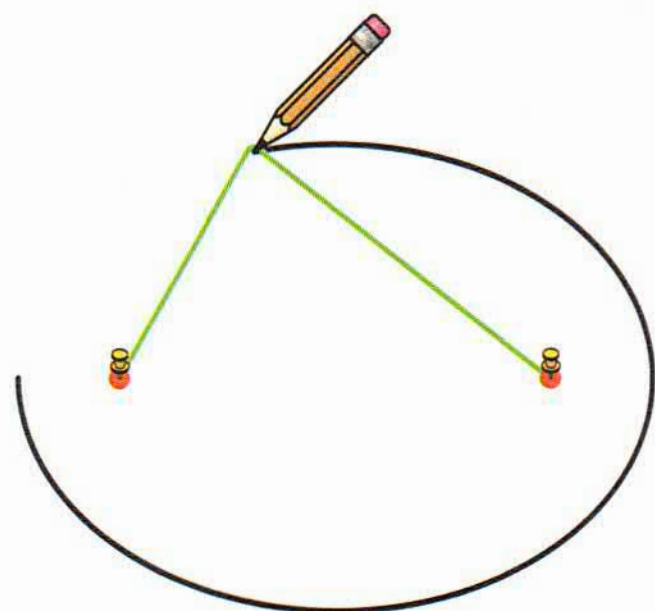
Оптическое свойство параболы «знает» и мир живой природы. Например, некоторые северные цветы, живущие в условиях короткого лета и недостатка солнечных лучей, раскрывают лепестки в форме параболоида, чтобы «сердцу» цветка было теплее.

→ 297

Дробление камней в почках

В организме человека как побочный результат происходящего в нём обмена веществ иногда образуются камни (например, в почках). Камни беспокоят, даже могут угрожать жизни, поэтому с ними приходится бороться.

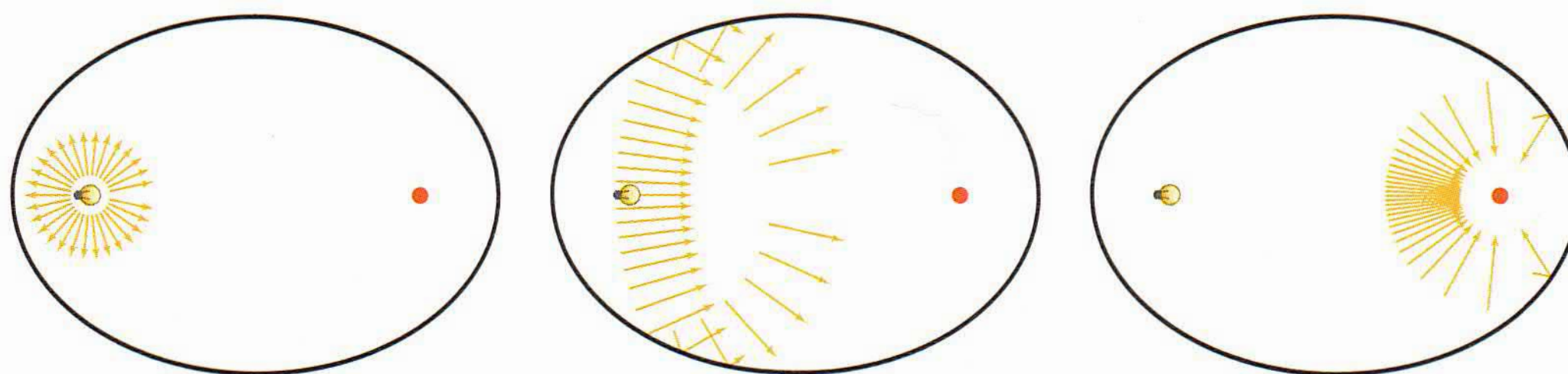
Литотрипсия (от древнегреческого *λίθος* — камень) — один из методов дистанционного разрушения камней с помощью ударных волн. Принцип работы многих аппаратов дистанционного воздействия основан на геометрических свойствах эллипса.



Эллипс — геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, постоянна.

Это определение сразу приводит к способу построения эллипса. Привяжем концы нити к двум кнопкам, а их воткнём в лист бумаги. Если натянуть нить с помощью карандаша, поставить его на лист и, всё время сохраняя нить натянутой, провести линию, то получится дуга эллипса. Дело в том, что нить всё время будет иметь форму ломаной, состоящей из отрезков, соединяющих карандаш и кнопки-фокусы. Сумма длин этих отрезков постоянна и равна длине нити.

Как и парабола, эллипс обладает оптическим свойством. Если поместить точечный источник излучения («лампочку») в один из фокусов эллипса и включить его, то лучи, отразившись от эллипса, соберутся во втором фокусе. При этом все лучи придут во второй фокус одновременно, так как для каждого луча длина пройденного пути будет одна и та же (по определению эллипса).



Именно это оптическое свойство эллипса используется в дистанционной литотрипсии.

При вращении эллипса вокруг прямой, проходящей через фокусы, получается эллипсоид вращения. В каждом сечении эллипсоида плоскостью, проходящей через ось вращения, получаются равные эллипсы с общими фокусами, поэтому эллипсоид тоже обладает оптическим свойством.

Отражатель аппарата дистанционной литотрипсии — часть эллипсоида, «чаша», примыкающая к одному из фокусов, в котором размещается источник излучения. Пациента помещают так, чтобы совместить положение второго фокуса и положение камня — мишени волновой атаки.

Конечно, излучение проходит и через ткани, окружающие камень, но только в фокусе одновременно концентрируется вся энергия излучения, становясь и разрушающей, и целительной силой.

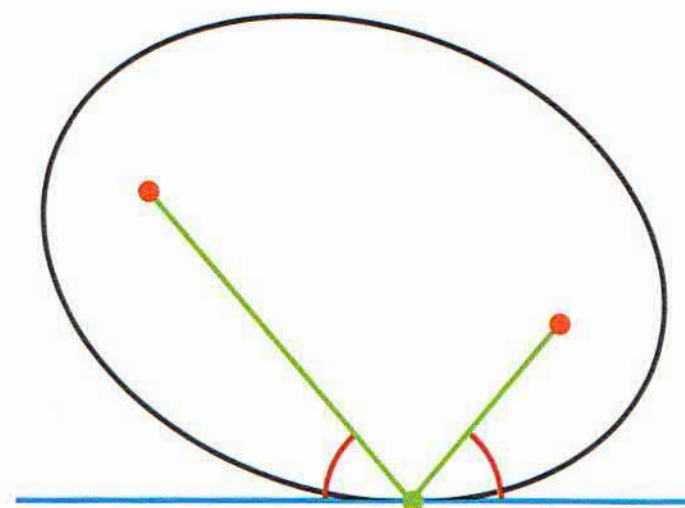
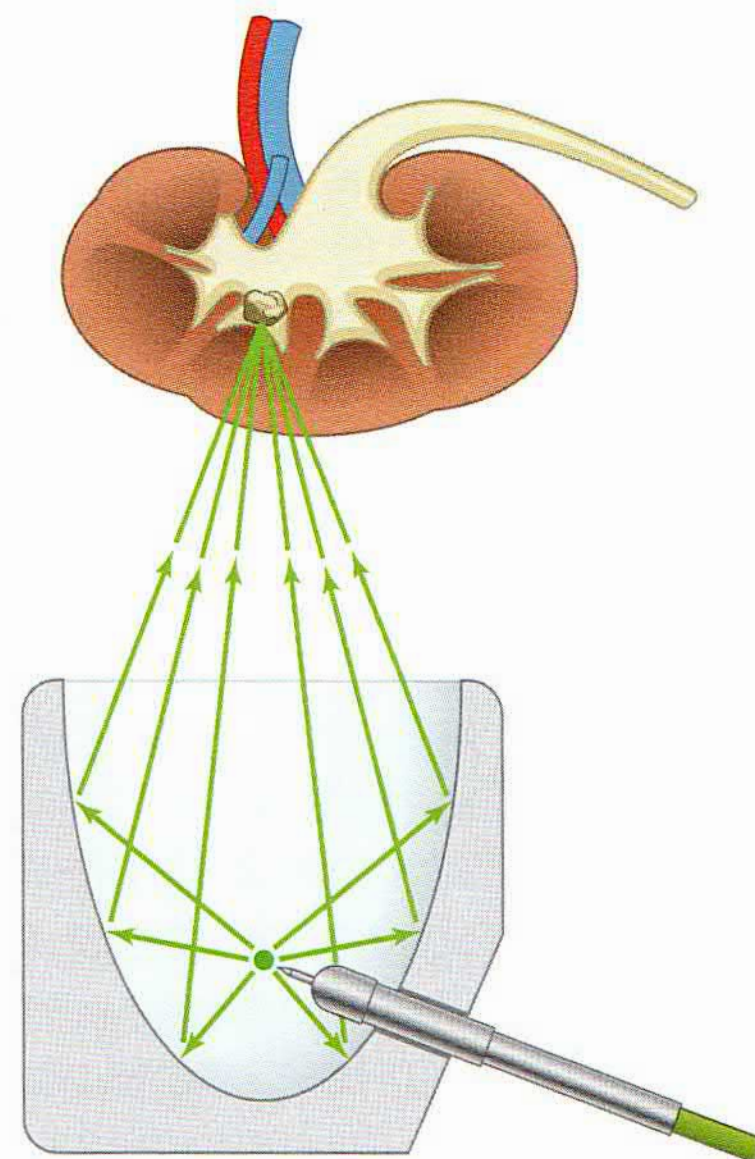
Приведём геометрическое объяснение оптического свойства эллипса.

Вышедший из фокуса луч, достигнув эллипса, отражается по закону «угол падения равен углу отражения» (отражение от кривой — это отражение от касательной к кривой в этой точке).

Если точку отражения луча соединить и со вторым фокусом, то получаются два отрезка нити из геометрического определения эллипса. На касательной к эллипсу, проведённой в точке отражения луча, все остальные точки лежат вне эллипса, поэтому для них сумма расстояний до фокусов будет больше.

Воспользуемся теперь результатом фольклорной «задачи о Красной Шапочке», в которой внучка должна дойти от своего дома до реки (прямой), наполнить ведро и отнести его в дом бабушки. Кратчайший путь характеризуется тем, что отрезки, соединяющие дома с точкой «водозабора» на берегу, должны быть наклонены к прямой под одинаковыми углами.

В нашем случае дома — фокусы, река — касательная, кратчайший путь — отрезки нити, «рисующей» эллипс. Следовательно, эти отрезки образуют с касательной равные углы, а сама нить становится для луча «путеводной».



Выбор короткой очереди

Выбор оптимального варианта действий — одна из главных задач в современной жизни, которая становится всё более сложной и динамичной. Среди рекомендаций, предлагаемых математическими моделями, есть приёмы, для понимания которых достаточно школьных представлений о теории вероятностей и комбинаторике.

Метод «выбора из двух» — пример соединения эффективности и простоты. Область применения — задачи о балансировке нагрузки из раздела математики с актуально звучащим названием: теория очередей.

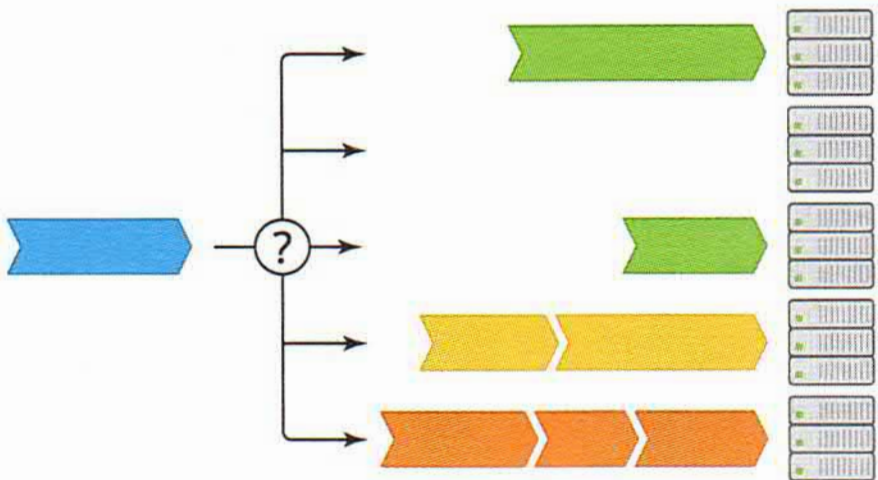
Реальная очередь может состоять как из людей в кассы супермаркета, так и из запросов к серверам поисковой системы. В супермаркете посетитель выбирает очередь по её длине и количеству товаров в корзинах покупателей. Поступающий в поисковую систему запрос тоже хочется направить к серверу с короткой очередью. Однако, если серверов очень много, то непрерывный опрос всех о длине очереди сделает систему неработоспособной.

Другая крайность — выбор сервера наугад, — очевидно, неоптимальна. Но если выбрать наугад два сервера и, узнав о длине очереди к каждому, направить запрос на менее загруженный, то практически отсекаются самые длинные очереди и увеличиваются шансы

на попадание в самые короткие.

Продemonстрируем метод «выбор из двух» на примерах. Если самая длинная очередь только одна, то при выборе из двух попадание в неё исключается.

Если серверов много, а самых загруженных — пятая часть, то вероятность попадания в «плохую» очередь не исключается, но мала и примерно равна произведению вероятностей $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$. Аналогично, если самых свободных серверов тоже пятая часть, то вероятность попасть в «хорошую» очередь равна $\frac{9}{25}$.



	вероятность «худшего»	вероятность «лучшего»
выбор наугад	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
выбор из двух	$\frac{1}{25}$	$\frac{9}{25}$

Несмотря на простоту идеи, основанные на ней методы получили распространение и развитие только в недавнее время. А вы, читатель, оказавшись в супермаркете с десятками касс, выбирайте наугад пару очередей и направляйтесь к более короткой, меньшему из двух зол!

Точность теста

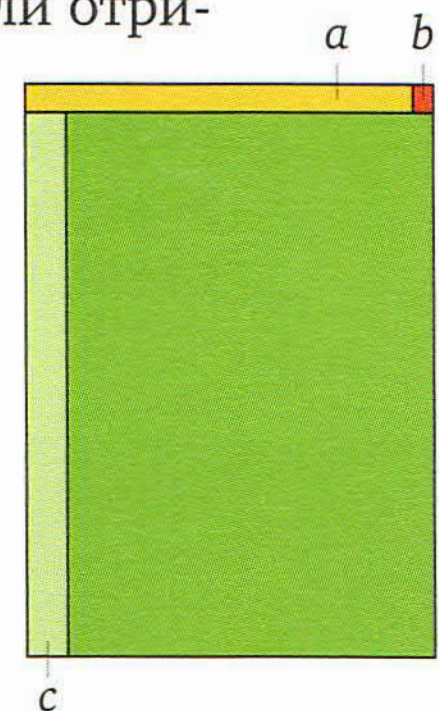
Совершенный медицинский тест должен давать положительный ответ, если болезнь есть, отрицательный — если её нет.

Но нет в мире совершенства. Хорошая точность — близкое к 1 значение вероятности положительного теста при наличии болезни (скажем, 98%) и не очень большое число случаев положительного результата теста для здоровых пациентов (скажем, 10%).

Может показаться удивительным, но если тест проводится на редкое заболевание, то вероятность его наличия при положительном результате будет значительно меньше 98%! Например, если заболевание встречается только у 5% населения, то она равна 34%. Дело в том, что редкость заболевания — значимая информация, её надо учитывать, и считать следует так называемую условную вероятность.

Традиционные иллюстрации условной вероятности связаны с колодой из 52 игровых карт. При извлечении карты из колоды наугад вероятность увидеть карту валет пик равна $1/52$. Но если уже известно, что извлечённая карта масти пик (кто-то подсмотрел), то вероятность (условная) того, что это валет, будет равна $1/13$.

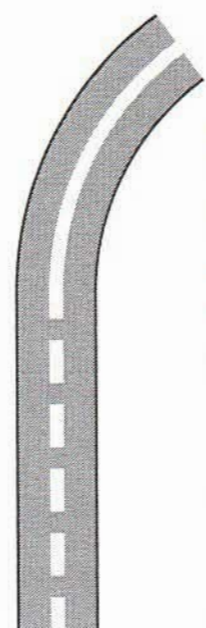
При медицинском тестировании каждый пациент характеризуется двумя параметрами: здоров он или болен; положителен или отрицателен его тест. Поэтому можно изобразить множество всех пациентов в виде прямоугольника, стороны которого «представляют» эти параметры. Горизонтальная прямая делит его на прямоугольники «здоров/болен». Полоска больных — узкая, её доля 5%. Она делится вертикальным отрезком по результатам тестов: 98% положительных, 2% отрицательных. Среди «здоровой» части прямоугольника 10% занимает вертикальный прямоугольник с ошибочными (положительными) результатами тестирования.



Показатель 98% — это отношение площадей $\frac{a}{a+b}$, где в знаменателе площадь узкой полоски, пропорциональной числу всех больных. А условная вероятность того, что пациент болен, если тест положительный, — это дробь $\frac{a}{a+c}$, её знаменатель пропорционален числу всех положительных тестов. Так как $c > b$, то знаменатель второй дроби больше знаменателя первой, и вторая вероятность оказывается меньше первой. А вот насколько меньше, зависит от редкости болезни и степени точности теста.

→ 303

Кривая поворота



Прохождение поворота на трассе — демонстрация мастерства пилота в «Формуле-1». Но с этой задачей ежедневно сталкиваются и рядовые водители, и машинисты поездов. А можно ли проектировать дороги так, чтобы уменьшить «стрессы» на поворотах для водителей, пассажиров и даже для техники?

Очевидно, что дорога должна быть гладкой, без изломов. Но для скоростных трасс этого недостаточно.

Представим дорогу в виде прямой, переходящей в дугу окружности. На прямолинейном участке во время движения руль не повернут. При въезде на участок дуги окружности его необходимо резко повернуть. Пассажиры почувствуют толчок. Понятно, что описанный «толчок» при вхождении в такой поворот испытывает и техника. Но если водитель автомашины ещё может попытаться «сгладить» ситуацию за счёт выбора траектории, то машинист поезда такого выбора не имеет, и при неудачной геометрии полотна страдать будут все — от пассажиров до рельсов (последние будут быстро изнашиваться).

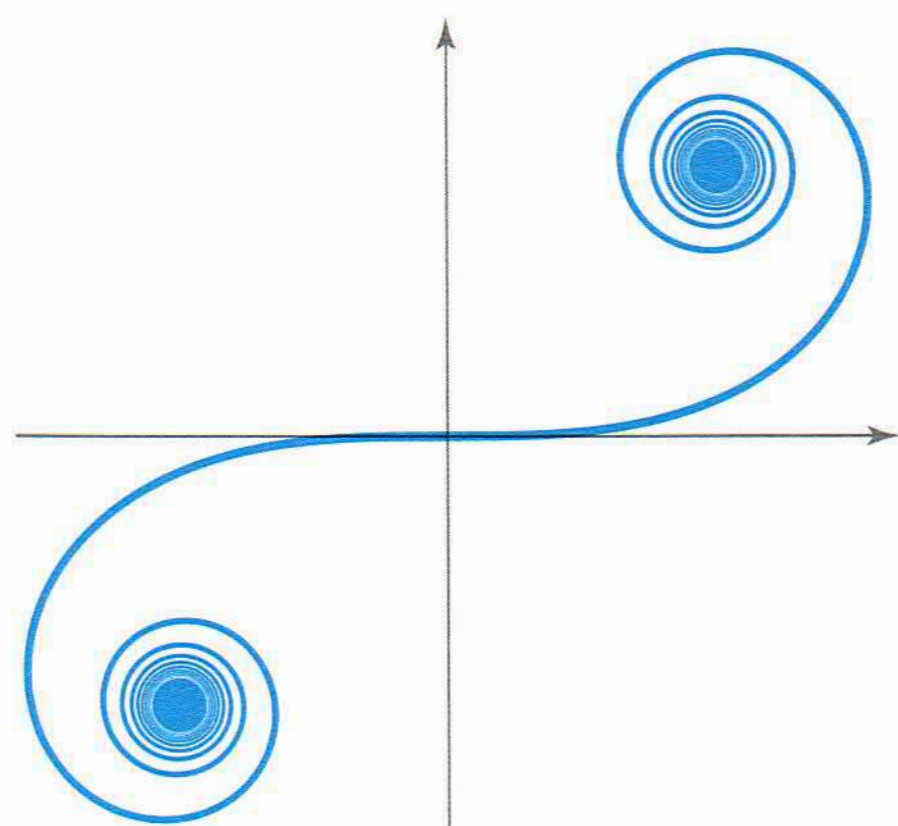
Итак, непосредственная склейка прямой и окружности в данной ситуации — решение не лучшее. Возникает задача расчёта переходной кривой — части дороги, осуществляющей «плавный» переход с прямолинейного участка на дугу окружности постоянного радиуса.

В математике у кривых есть важная характеристика — кривизна. У окружности радиуса R кривизна равна $1/R$, у прямой кривизна равна 0. Для произвольной гладкой кривой на плоскости кривизна в заданной точке определяется с помощью соприкасающейся окружности, дуга которой в окрестности точки «похожа» на дугу кривой.

Можно ли найти такую переходную кривую, чтобы её кривизна менялась линейно в зависимости от пройденного пути? Тогда при движении с постоянной (по модулю) скоростью руль автомобиля нужно было бы поворачивать равномерно.

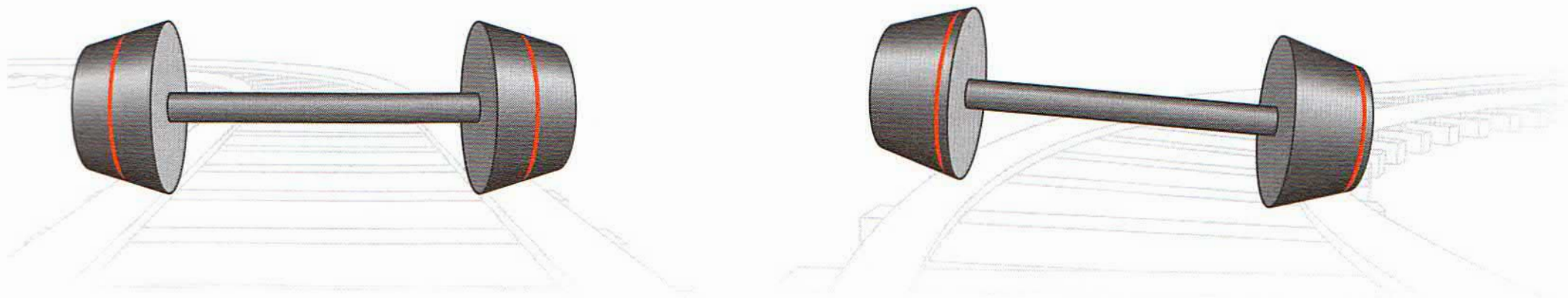
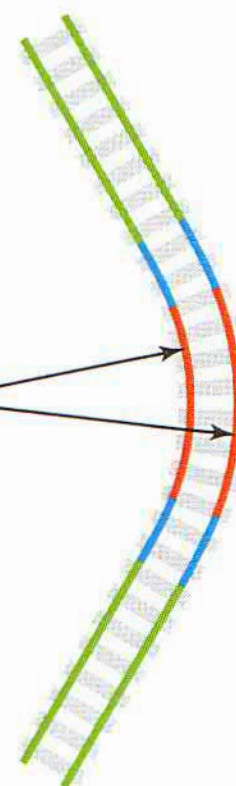
Такие кривые существуют, они называются спиралями Корню или клотоидами. Для расчётов спирали Корню

сложны, но в построении переходных кривых служат важной отправной точкой.



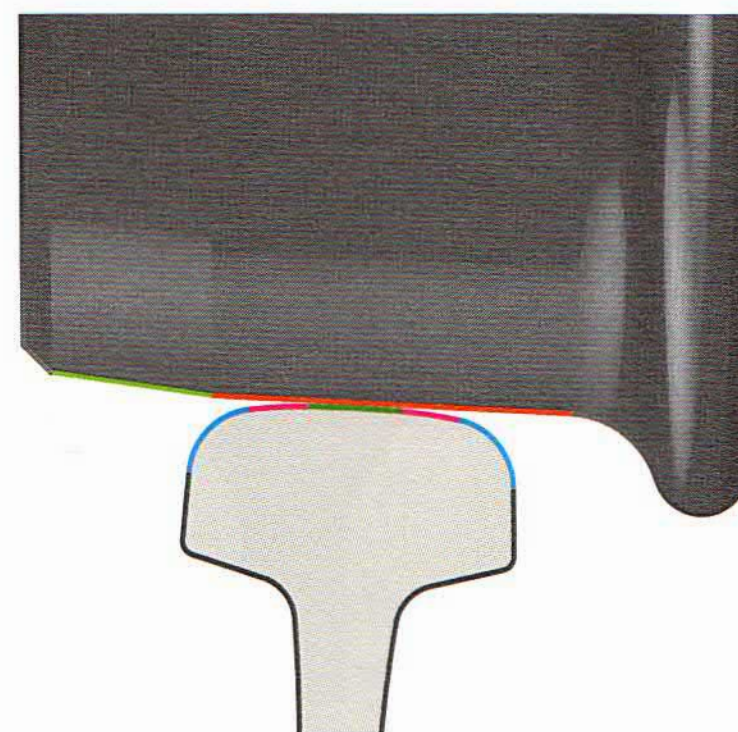
Колёсные пары железнодорожных составов

В железнодорожных составах и поездах метро, в отличие от автомобилей, в колёсной паре колёса жёстко сцеплены друг с другом осью и, соответственно, вращаются с одинаковой угловой скоростью. Но при повороте поезда длины путей, пройденных колёсами, будут отличаться: ведь в каждой точке поворота радиус окружности у внешнего рельса чуть больше, чем радиус внутреннего рельса. С другой стороны, по техническим требованиям проскальзывания колёс относительно рельсов быть не должно. Кажется, что отсутствие проскальзывания и разный «пробег» жёстко сцепленных колёс — несовместимые обстоятельства и что поезда просто не смогут поворачивать. Спасает геометрия: колёса делают не цилиндрическими, а в виде конусов.



На прямолинейном участке пути такая колёсная пара ведёт себя как цилиндрическая, а на повороте — смещается относительно железнодорожного полотна. В результате внутреннее колесо будет иметь меньший «реальный» радиус, чем внешнее. Смещение и вызванное им изменение радиусов колёс обеспечивают согласованность длин пройденных путей. Удивительно, что геометрия и механика «самостоятельно» определяют эти настройки, без участия человека-машиниста или управляющего механизма.

Конечно, приведённые выше изображения схематичны. У настоящих колёс рабочая поверхность является склейкой двух конусов, да и поверхность рельсов имеет довольно сложный профиль, составленный из дуг нескольких окружностей.



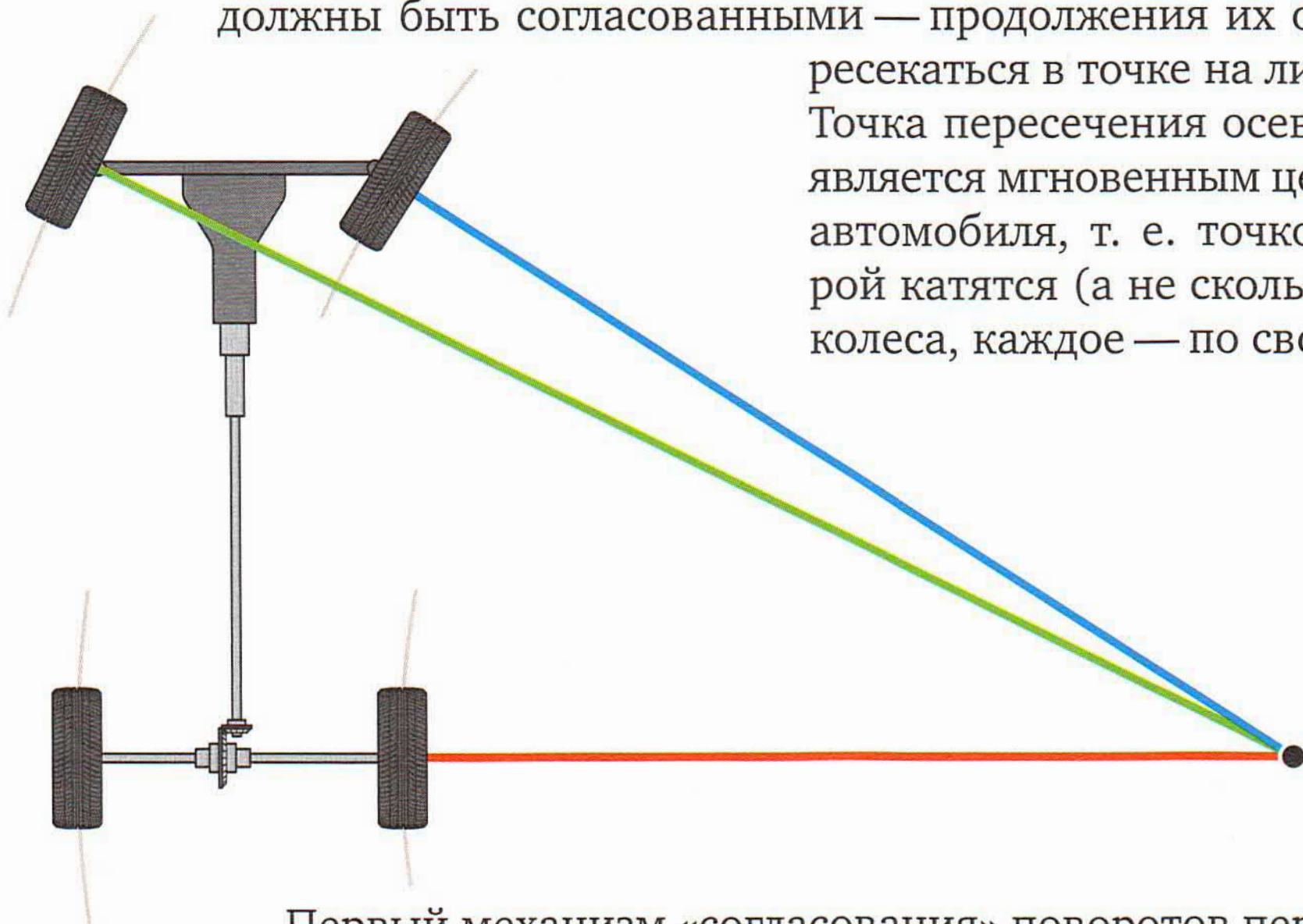
Изложенная геометрическая идея родилась ещё в доэлектрической части XIX века, но верно служит и в компьютерном XXI веке.

→ 306

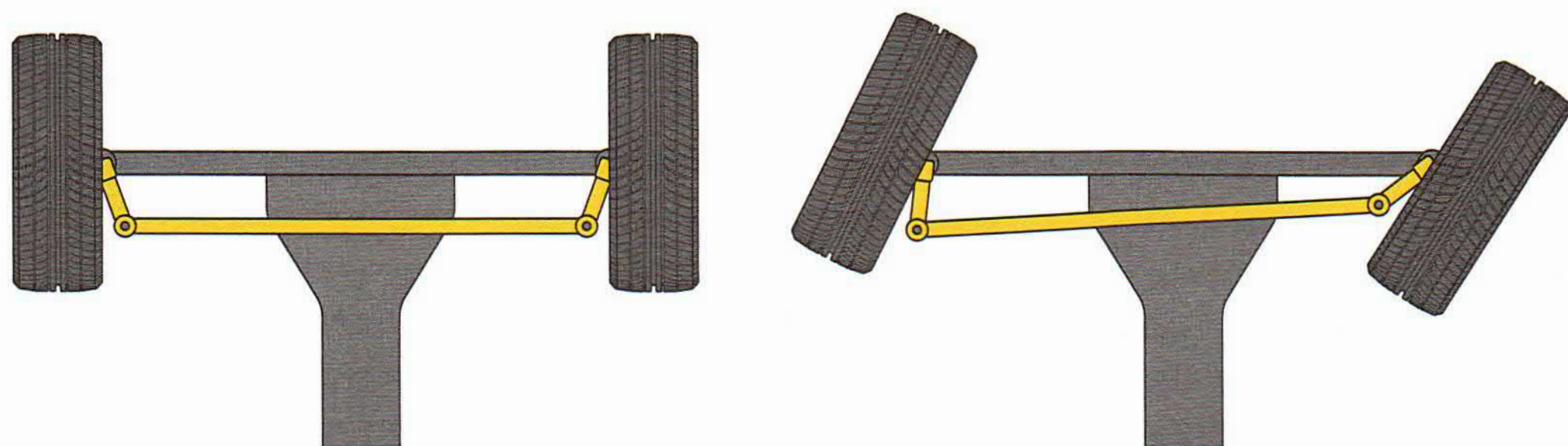
Поворот передних колёс автомобиля

Проскальзывание колёс автомобиля относительно дорожного полотна грозит потерей управления. Чтобы избежать этого, при повороте автомобиля углы поворота передних колёс в каждый момент должны быть согласованными — продолжения их осей должны пересекаться в точке на линии задней оси.

Точка пересечения осевых линий колёс является мгновенным центром поворота автомобиля, т. е. точкой, вокруг которой катятся (а не скользят!) все четыре колеса, каждое — по своей окружности.



Первый механизм «согласования» поворотов передних колёс, основанный на использовании шарнирной равнобочной трапеции, придумал французский каретный мастер Шарль Жанто. Но его изобретение было забыто, поскольку с тягой в несколько лошадиных сил кареты двигались не быстро и проскальзывание колёс не было столь важным.



Лишь через три четверти века два отца автомобилестроения Готтлиб Даймлер и Карл Бенц, создавая свои автомобили, возвра-

щаются к трапеции Жанто. В 1889 году Даймлер получает патент на «способ независимого управления передними колёсами с различными радиусами поворота». А в 1893 году Бенц получает патент на «устройство управления экипажей с тангенциальными к колёсам окружностями управления». С тех пор трапеция «управляет» автомобилем.

Конечно, за это время техника усложнилась. У большинства современных машин колёса ходят по высоте относительно друг друга, поэтому для управления ими плоский шарнирный механизм (трапеция) уже не подходит. Однако и в наши дни механизм, поворачивающий передние колёса автомобиля, называется рулевой трапецией.

Современные конструкторы научились поворачивать и задние колёса автомобиля, эта возможность реализована в некоторых моделях. По сравнению с описанной классической схемой, у автомобиля с функцией согласованного поворота всех четырёх колёс существенно уменьшается минимальный радиус поворота.

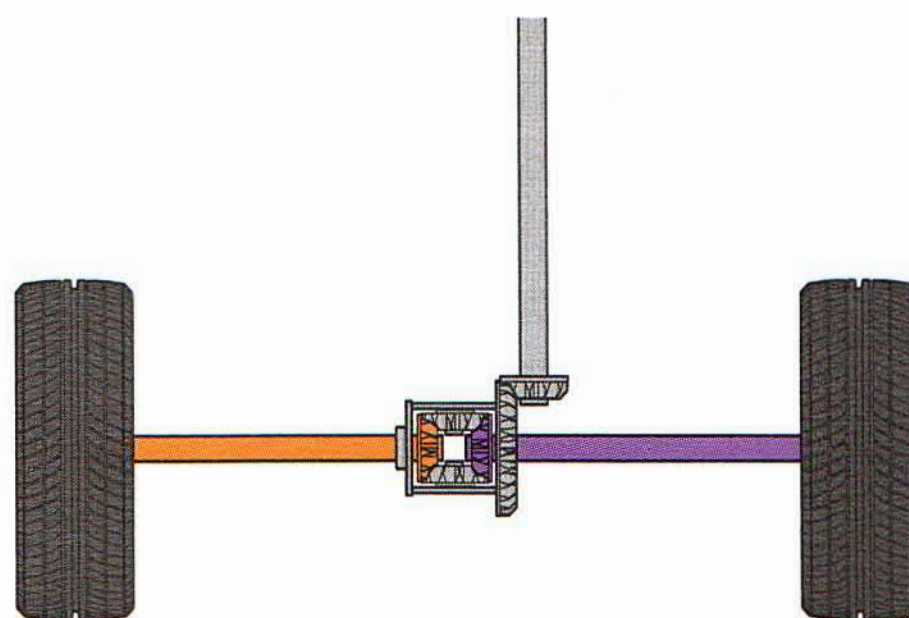
Рассматривая поведение колёс автомобиля при повороте, нельзя не отметить ещё одну проблему геометрического толка.

При повороте колёса на одной оси катятся по дугам окружностей разных радиусов, поэтому должны отличаться и пройденные ими пути.

В изображённой на первом рисунке ситуации у автомобиля ведущая ось — задняя, передние колёса независимы и будут свободно крутиться, каждое со своей скоростью.

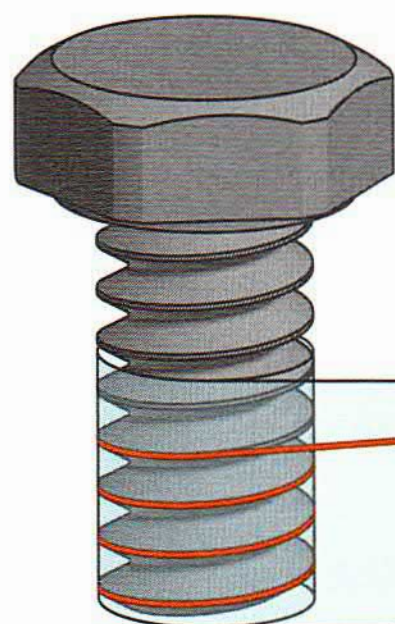
А вот задние колёса — колёса ведущей оси. Их обязанность — толкать автомобиль вперёд. И в то же время разность путей, пройденных ими при повороте, означает, что вращаться эти колёса должны с разными скоростями.

Сделать так, чтобы ведущие колёса могли подстраиваться под проходимость ими путь (как и их «свободные» коллеги — передние колёса), удаётся при помощи механизма, который называется дифференциал. Дифференциал, в полном соответствии со своим названием, раздаёт вращательное движение карданного вала на полуоси ведущей оси так, что они могут вращаться с разными скоростями!



Резьбовые соединения

Лёгкость, с которой гайка накручивается на болт с такой же резьбой, подсказывает, что резьба эта одинакова по всей длине болта и глубине гайки, а математическая суть устройства — использование кривой, которая может скользить сама по себе. Эта замечательная кривая называется винтовой линией. Можно считать, что на внутренней поверхности гайки «проложена лыжня» в виде винтовой линии, и по накатанному пути скользит выступающая часть винта, имеющая форму такой же линии.



Формально винтовой линией (цилиндрической) называется линия, описываемая точкой, которая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси и одновременно перемещается вдоль этой оси с постоянной скоростью.

Наглядное представление о винтовой линии можно получить, намотав на цилиндр прямоугольный прозрачный лист с проведённой диагональю.

У хороших (достаточно гладких) кривых в трёхмерном пространстве есть две базовые характеристики — кривизна и кручение. Кривизна — это локальная «скорость» искривления линии (определяется радиусом окружности, дуга которой наилучшим образом приближает небольшой отрезок кривой, содержащий данную точку). Кручение — «скорость», с которой кривая стремится не быть плоской: небольшой отрезок кривой в первом приближении «лежит» в некоторой плоскости, а вот то, насколько он «хочет» покинуть эту плоскость, и сообщает кручение. Замечательно, что для достаточно гладких кривых кривизна и кручение полностью определяют форму линии.

У винтовой линии кривизна и кручение постоянны, вследствие этого её «устройство» всюду одно и то же. Именно поэтому отрезок винтовой линии может скользить вдоль неё самой.

А поскольку постоянство кривизны и кручения однозначно определяет кривую, то винтовая линия — единственная кривая, которая может скользить сама по себе. И при решении инженерных задач, в которых наличие такого свойства желательно или даже необходимо, без винтовых линий не обойтись.

Стеклоочистители автомобиля

Все вы видели, как «дворники» (стеклоочистители) смахивают воду с лобового стекла машины. Но задумывались ли вы, что и как приводит их в действие?

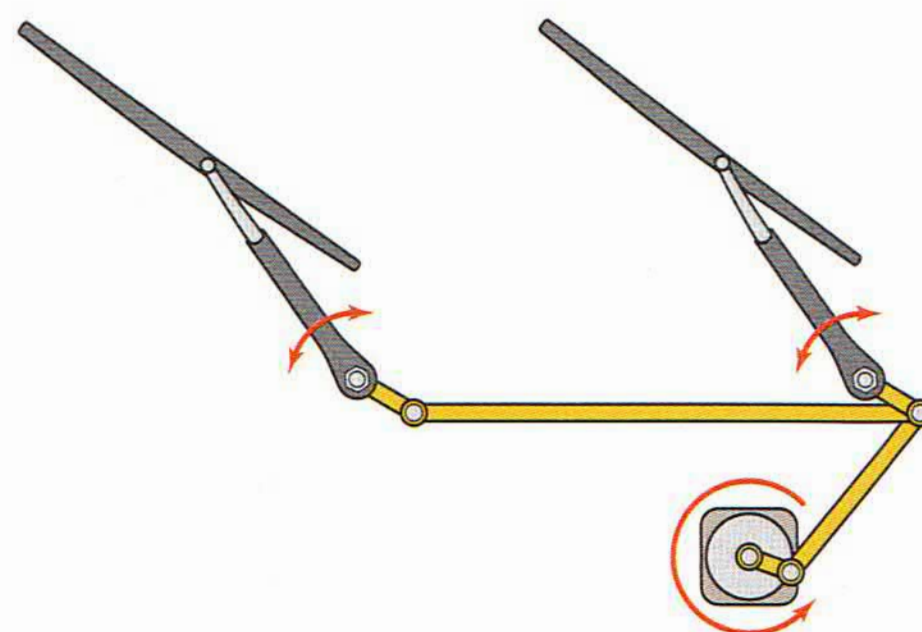
У каждого стеклоочистителя единственная точка крепления, длинный рычаг (поводок) и щётка, плотно прилегающая к стеклу. При таких условиях даже просто заставить «дворники» двигаться в одном направлении — задача нелёгкая. И уж совсем непонятно, как можно реализовать возможность быстрого и плавного переключения — смены направления движения «дворников». Как и во многих других сюжетах в этой книге, на помощь приходит геометрия.

Если открыть капот и снять кожухи, то можно увидеть, что движение «дворников» обеспечивает единственный моторчик. Во время работы моторчика его ось вращается только в одном направлении. А плоский шарнирный механизм, называемый трапецией «дворников», преобразует безостановочное одностороннее вращение оси моторчика в согласованное движение «дворников» то в одну сторону, то в другую. Смена направления движения «дворников» происходит без остановки моторчика.

Плоские шарнирные механизмы можно представлять как линейки разной длины, соединённые в концах гвоздиками. Шарнирные механизмы применяют, когда необходимо преобразовать заданное движение ведущего шарнира (например, по окружности) в функционально необходимое движение другого шарнира. Математический расчёт элементов конструкции шарнирного механизма — важный этап в процессе его создания.

Математические исследования шарнирных механизмов начались со времён изобретения Джеймсом Уаттом первой паровой машины. В XIX веке большую роль в этих исследованиях сыграл великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев. Изучение плоских шарнирных механизмов продолжается и в наше время.

Уже в XXI веке была доказана теорема «о подписи» — для любой подписи существует плоский шарнирный механизм, воспроизводящий эту подпись сколь угодно точно.



Зубчатые колёса

Передача равномерного вращательного движения с одной оси на другую — одна из основных задач в теории механизмов. В наручных часах важна точность преобразования угловых скоростей, в «серьёзных» машинах необходимо передавать и силовые функции.

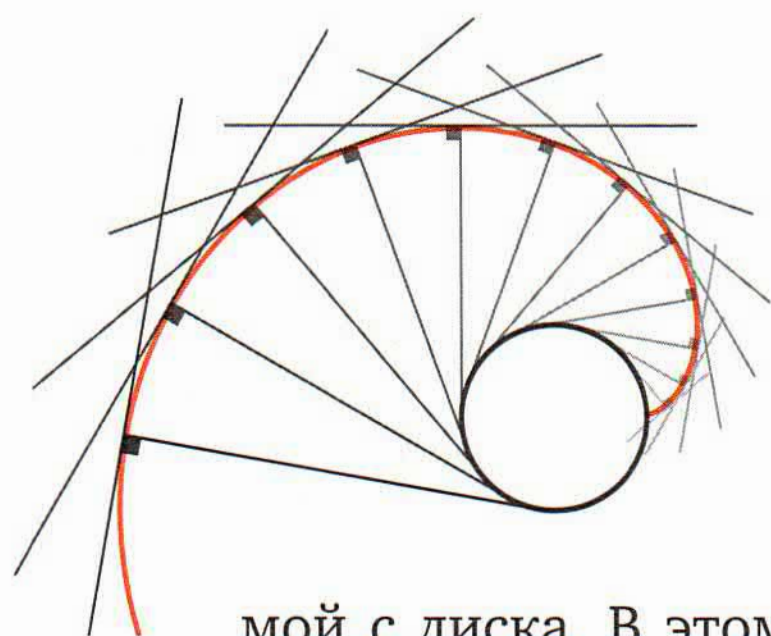
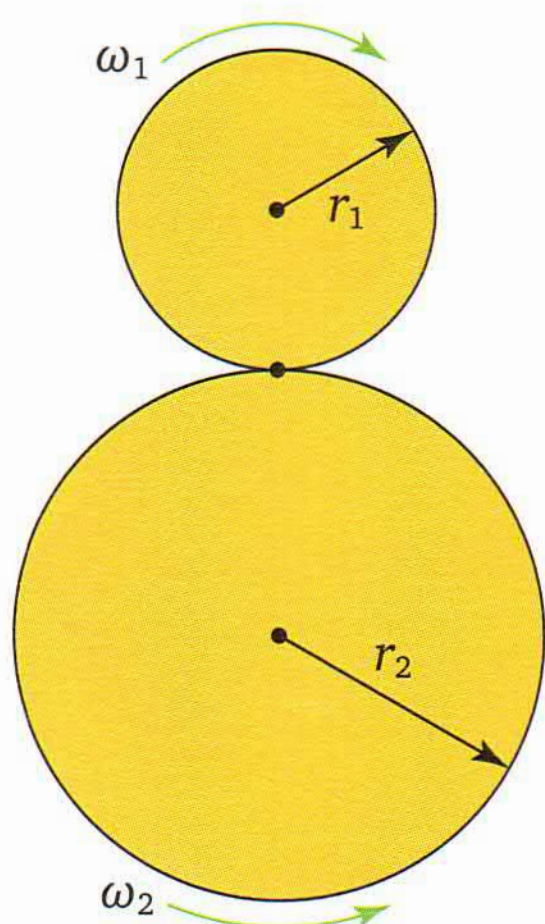
Наглядный способ решения задачи — два касающихся диска, служащих «передаточными» звеньями от их осей. В идеальной модели, при отсутствии проскальзывания, второй диск тоже будет вращаться равномерно. Отношение угловых скоростей дисков будет обратно пропорционально отношению радиусов: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$ (так как в точке соприкосновения совпадают линейные скорости: $r_1\omega_1 = r_2\omega_2$).

Но в реализации такой модели проскальзывание устранить не удаётся. Превращение дисков в зубчатые шестерёнки — техническое решение проблемы. Его можно рассматривать как модификацию наглядной схемы с касающимися кругами.

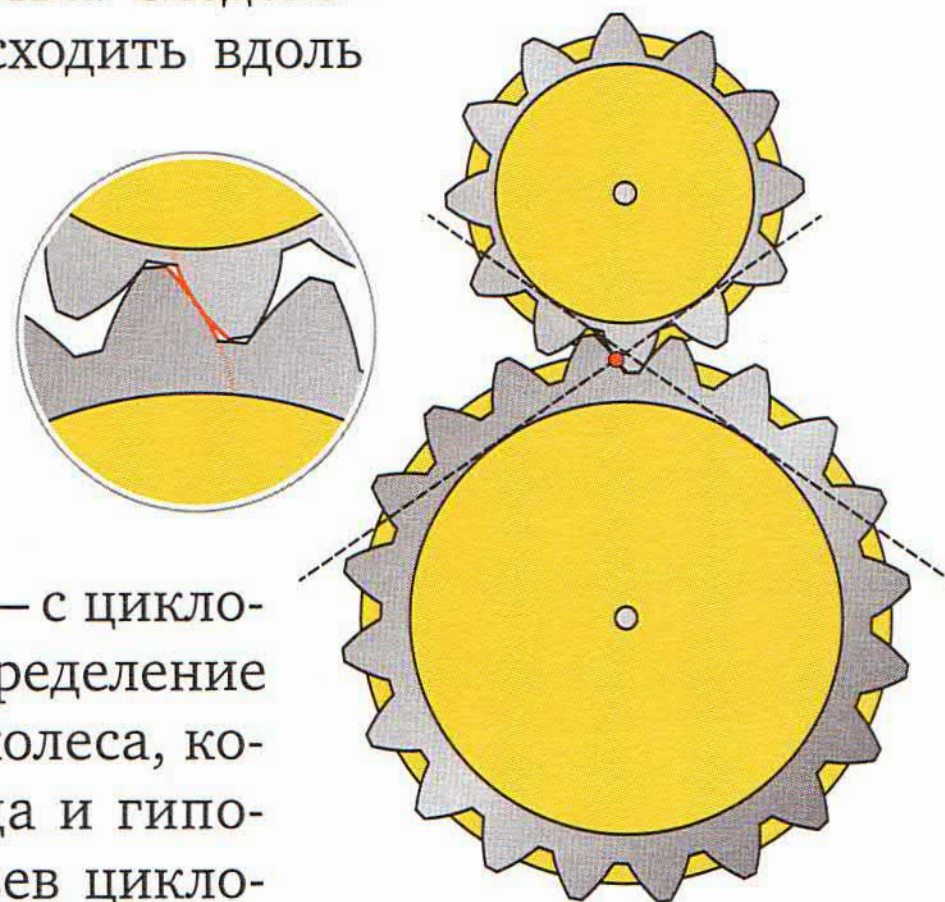
Зубья двух шестерёнок должны друг другу соответствовать, хотя их форма может быть и различной. Во-первых, для передачи равномерности движения необходимо, чтобы контакт (зацепление) между зубчатыми колёсами ни на миг не прерывался. Во-вторых, трение между зубьями должно быть минимальным, чтобы уменьшить износ деталей. Второе требование не является абсолютным, поскольку ещё Леонард Эйлер в 1752 году доказал, что при передаче равномерного движения добиться полного отсутствия трения скольжения невозможно.

В 1762 году Эйлер предложил использовать в зубчатых передачах эвольвентное зацепление, оказавшееся весьма удачным и ставшее самым распространённым, в основном, в больших механизмах.

Эвольвента окружности — кривая, которую описывает конец натянутой нити, сматываемой с диска. В этом эксперименте можно «увидеть» и эвольвенту, и главное для нас геометрическое свойство: при сматывании в каждый момент времени нить будет касательной к окружности и перпендикулярна эвольвенте.



Для «изготовления» пары работающих шестерёнок с зубьями эвольвентного профиля уменьшим пропорционально радиусы двух касающихся кругов, а получившиеся меньшие круги «оснастим» зубьями, форма которых определяется эвольвентами малых окружностей. Во время взаимного обкатывания двух зубьев (эвольвент) разных шестерёнок точка их касания бежит по общей касательной малых окружностей. В каждый момент времени эта касательная будет перпендикулярна в точке соприкосновения зубьев каждому из них: это следует из приведённого геометрического свойства. Следовательно, передача движения будет происходить вдоль касательной, малые колёса с зубьями взаимодействуют так, словно это касающиеся диски. «Касательное» взаимодействие шестерёнок означает, что в их соприкосновении нет отталкивания, энергия тратится на передачу вращения. Трение между зубьями есть, но невелико.



Другой популярный тип шестерёнок — с циклоидальными зубьями. «Механическое» определение циклоиды: траектория точки на ободе колеса, которое катится по прямой. Эпициклоида и гипоциклоида, определяющие профили зубьев циклоидального зацепления: траектория точки на ободе колеса, которое катится по другой окружности снаружи (эпициклоида) или изнутри (гипоциклоида). Циклоидальные профили чаще встречаются в часовых механизмах.

У зацеплений различных типов есть свои преимущества. Для эвольвентного зацепления можно выделить: простоту изготовления профилей зубьев по методу обкатки, что повышает их прочность; изношенные колёса легко заменить новыми, любые два подходят друг к другу. Превосходство циклоидального зацепления, например, в том, что коэффициент перекрытия колёс больше, это позволяет использовать шестерёнки с небольшим числом зубьев.

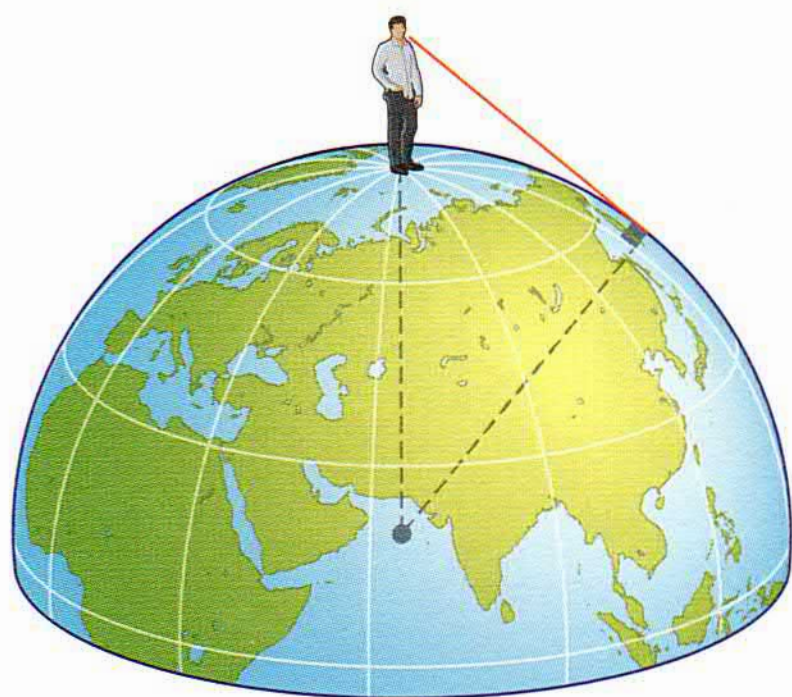
В передачу равномерного вращательного движения шестерёнки вносят «рациональное» начало: отношение радиусов равно отношению чисел зубьев на шестерёнках (передаточное отношение).

В рассмотренных конструкциях считалось, что оси параллельны; «наглядные» цилиндры служили заготовкой, основой для конструирования шестерёнок. Но зубчатые передачи служат и в других ситуациях. Если оси пересекаются (что часто встречается в технике), то место цилиндров занимают конусы, если оси скрещиваются — гиперболоиды. А профили зацеплений становятся ещё более замысловатыми.

Расстояние до горизонта

Какова дальность до линии горизонта для наблюдателя, стоящего на земле? Ответ — приближённое расстояние до горизонта — можно найти с помощью теоремы Пифагора.

Для проведения приближённых расчётов сделаем допущение, что Земля имеет форму шара. Тогда стоящий вертикально человек будет продолжением земного радиуса, а линия взгляда, направленного на горизонт, — касательной к сфере (поверхности Земли). Так как касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания, то треугольник (центр Земли) — (точка касания) — (глаз наблюдателя) является прямоугольным.



Две стороны в нём известны. Длина одного из катетов (стороны, прилегающей к прямому углу) равна радиусу Земли R , а длина гипотенузы (стороны, лежащей против прямого угла) равна $R + h$, где h — расстояние от земли до глаз наблюдателя.

По теореме Пифагора, сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Значит, расстояние до горизонта равно

$$d = \sqrt{(R + h)^2 - R^2} = \sqrt{(R^2 + 2Rh + h^2) - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2}.$$

Величина h^2 очень мала по сравнению со слагаемым $2Rh$, поэтому верно приближённое равенство

$$d \approx \sqrt{2Rh}.$$

Известно, что $R \approx 6400$ км, или $R \approx 64 \cdot 10^5$ м. Будем считать, что $h \approx 1,6$ м. Тогда

$$d \approx \sqrt{2 \cdot 64 \cdot 10^5 \cdot 1,6} = 8 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{0,32}.$$

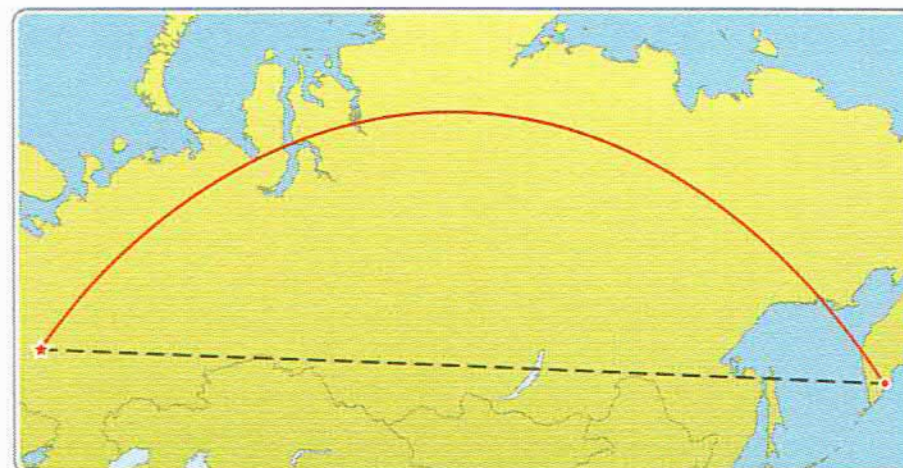
Используя приближённое значение $\sqrt{0,32} \approx 0,566$, находим

$$d \approx 8 \cdot 10^3 \cdot 0,566 = 4528.$$

Полученный ответ — в метрах. Если перевести найденное приближённое расстояние от наблюдателя до горизонта в километры, то получим $d \approx 4,5$ км.

Траектория полёта самолёта

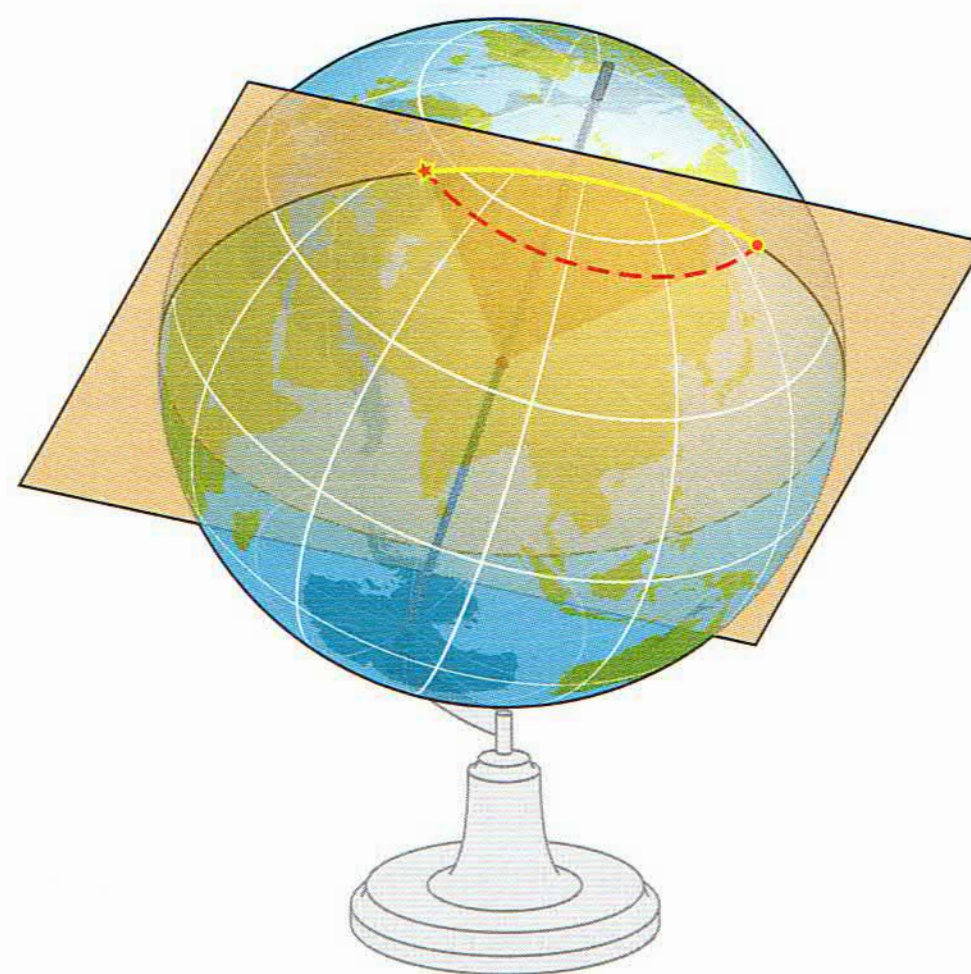
Если проследить по карте маршрут полёта самолёта из Москвы в Петропавловск-Камчатский, то можно заметить, что во время полёта самолёт забирается (по широте) высоко вверх. Кажется, что длина такого пути больше длины «прямого» пути, соединяющего на карте эти два города (координаты по широте близки: $55^{\circ} 45'$ с. ш. и $53^{\circ} 1'$ с. ш.).



Странно, ведь лишние сотни километров пути самолёта — дорогое удовольствие. Но и сервис «Яндекс.Карты» на запрос о расстоянии между этими городами тоже выдаёт выпуклую вверх кривую.

Всё дело в том, что понятие кратчайшего расстояния неразрывно связано с той поверхностью, по которой оно измеряется. Любая плоская карта представляет земную поверхность с искажениями. А рассмотрение соответствующих траекторий на глобусе позволит во всём разобраться.

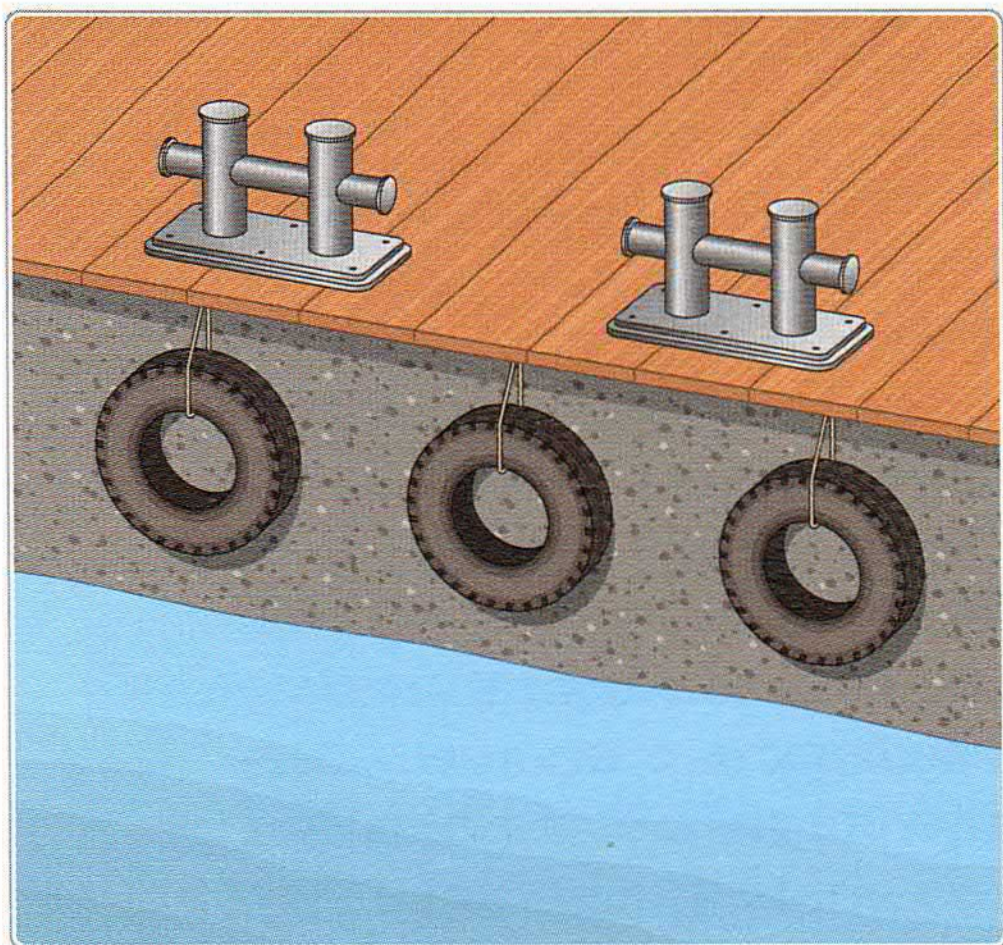
Чтобы найти кратчайшее расстояние между двумя точками на сфере, необходимо провести через них большую окружность. Так называют окружность, образованную пересечением сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы и выбранные точки. Меньшая из двух дуг большой окружности, соединяющая точки, является кратчайшим расстоянием на сфере между ними. В математике линию, реализующую минимальное расстояние между двумя точками на рассматриваемой поверхности, называют геодезической.



Все остальные маршруты, соединяющие Москву и Петропавловск-Камчатский, в том числе тот, который казался прямым на карте, на глобусе (и в реальности!) будут длиннее этой дуги. Итак, кратчайшая траектория полёта самолёта определяется дугой большой окружности.

Причаливание

Морские, воздушные и космические суда дали человечеству невероятные возможности в освоении окружающего пространства. Помимо способности решать «полётные» задачи, корабли должны уметь и благополучно возвращаться: причаливать к пристани, совершать мягкую посадку. Кажется, что современные автоматы могут решить и такую задачу...



Но вспомните собственные наблюдения. Катер, подходя к причалу, обвешанному резиновыми кранцами, замедляет ход, разворачивается бортом к берегу, и вдруг в эту техническую картину добавляется ручной труд. Прямо перед «стыковкой» на пристани появляется матрос и, подхватив брошенный с борта канат, наматывает его на тумбу и вручную подтягивает катер.

У самолёта, совершающего посадку, вертикальная компонента скорости остаётся ненулевой вплоть до касания со взлётно-посадочной полосой. Соприкосновение шин и покрытия — это удар, который для корпуса и пассажиров смягчают амортизаторы шасси и мастерство пилотов.

Ещё один пример — космический: это может быть и посадка аппарата на Луну, и возвращение на Землю ракеты многоразового использования. В этих случаях также не избежать заключительного удара, с ним борются посадочные амортизаторы.

Важно, что во всех рассмотренных примерах полностью избежать удара невозможно, каким бы ни были мастерство пилотов или вычислительная мощь автоматики. Это можно доказать математически, точнее, это следует из теории дифференциальных уравнений.

В задаче о причаливании управление процессом осуществляется регулировкой скорости (ускорения) в зависимости от расстояния до берега с желанием иметь нулевую скорость в момент касания. Приведённая формулировка «оживает» в описании автоматического причаливания по Владимиру Игоревичу Арнольду: «...наблюдая оставшееся до причала расстояние, управление выбирают так, чтобы

скорость причаливания плавно уменьшалась до нуля...» (книга «Математическое понимание природы»).

Режим управления в реальном времени предпочтителен, поскольку посадка по заранее рассчитанному графику погашения скорости или причаливание по намеченной траектории уязвимы — внешние обстоятельства, такие как течение, ветер, турбулентность, могут заготовленные планы разрушить с катастрофическими последствиями.

Математически — скорость (производная по времени функции расстояния) представлена как гладкая («хорошая») функция расстояния. Требование гладкости накладывается, чтобы изменение скорости (управляющего параметра) было небольшим при малом изменении расстояния.

Процесс причаливания описывается дифференциальным уравнением $x'(t) = f(x(t))$, где $x(t)$ — расстояние до «причала», $x'(t)$ — скорость, f — гладкая функция, задающая режим управления скоростью, и условием $f(0) = 0$ (безударность причаливания). Но в этом случае теория дифференциальных уравнений говорит: гладкое причаливание можно выполнить только за бесконечное время!

Разберёмся на простом жизненном примере, как возникает бесконечное время в задаче безударного причаливания. Предположим, что мы управляем лодкой так, чтобы на расстоянии x метров до берега её скорость равнялась x м/с. Тогда в момент касания с пристанью скорость была бы равна нулю — причаливание было бы безударным. Пусть в начальный момент времени лодка находится от берега на расстоянии a метров. На первую половину пути до берега ($a/2$ метров) уйдёт больше половины секунды, так как на этом участке скорость меньше, чем начальная скорость a м/с. На половину остающегося пути (отрезок длиной $a/4$) лодка также потратит больше, чем полсекунды. Таких «половинок» от остающегося пути бесконечно много, на преодоление каждой уходит больше, чем полсекунды, поэтому за конечное время доплыть до берега не удастся.

В примере с лодкой «управляющее» дифференциальное уравнение имеет вид $x' = -x$. Замена функции $f(x) = -x$ на любую другую гладкую функцию с условием $f(0) = 0$ не избавляет от бесконечного времени причаливания.

Итак, практически накладывается «математический запрет» на возможность безударного причаливания-приземления. В данном случае, теория дифференциальных уравнений выступает в роли героя «отрицательного», но делающего полезное дело: несбыточные желания отменяются, и можно сосредоточиться на поиске реальных решений задачи.

Определение длины пути по карте

Для измерения расстояний по бумажной карте (например, в геологических экспедициях или туристических походах) используют устройство, которое называется курвиметр. Название происходит от латинского слова *curvus* — кривой и древнегреческого слова *μέτρον* — мера. Этот прибор позволяет мерить расстояния между двумя точками на карте не только «по прямой», что можно сделать с помощью обыкновенной линейки, но и вдоль извилистой линии, например дороги или реки.

Для измерения длины линии на карте маленький зубчатый ролик курвиметра следует катить вдоль этой линии. Длина пути, пройденного курвиметром, отображается на шкале циферблата. Обычно курвиметр имеет два циферблата, при этом шкала одного из них размечена в сантиметрах, а другого — в дюймах. Для вычисления расстояния на местности остаётся учесть масштаб карты.

Получившийся результат измерения не будет точным значением длины кривой между двумя точками, но является хорошим приближением этой длины. Когда курвиметр аккуратно катят по кривой, его зубчики при касании карты попадают на кривую или оказываются весьма близко к ней, определяя вершины воображаемой ломаной линии.

С помощью зубчатой передачи число микроповоротов ролика (число звеньев ломаной) отражается на циферблате в виде пройденных стрелкой делений. Тем самым механически определяется длина ломаной линии.

Колёсико ролика маленькое, мелких зубчиков на нём много, таким образом, расстояние между соседними зубчиками небольшое. Приближение получается довольно точным, если измеряемая кривая гладкая и у неё на участках малой длины (меньшей, чем расстояние между зубчиками) нет резких и длинных выплесков-языков. А реки, дороги и другие «разумные» кривые на карте как раз обладают такими свойствами.

Итак, математическая составляющая курвиметра — замена изначальной кривой близкой к ней ломаной линией, более простой с точки зрения нахождения длины. Это лишь один из примеров воплощения идеи замены изучаемого объекта более простым, доступным для изучения, и в то же время сохраняющим важные свойства оригинала.



Складывание карт

Карты, схемы, путеводители обычно печатаются на больших прямоугольных листах бумаги. Для хранения и переноски эти листы складывают в несколько раз. Самый распространённый тип складывания — прямоугольный: лист разбивается на прямоугольники и складывается по линиям разбиения так, чтобы в сложенном виде у карты не было сгибов большой кратности (как у толстой пачки купюр, согнутой пополам).

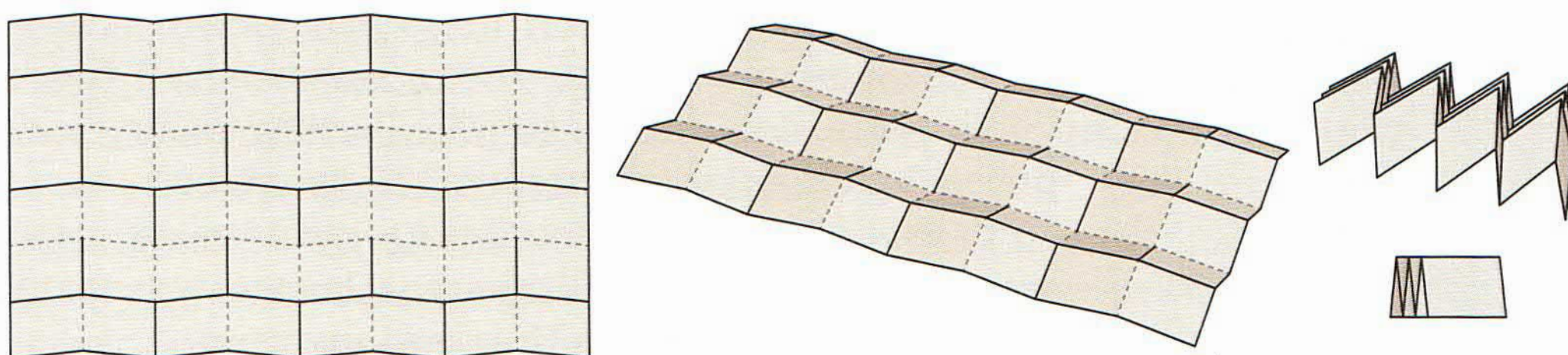


При разворачивании карты или схемы проблем нет, но когда вы начинаете складывать карту, часто на каком-то этапе оказывается, что её придётся перегибать в направлении, противоположном тому, что сохранил в своей «памяти» лист.

А можно ли придумать такое разбиение листа карты и такой способ складывания, чтобы:

- 1) развёрнутая карта складывалась бы «сама» и не было необходимости запоминать порядок складывания;
- 2) у листа карты в сложенном виде не было сгибов большой кратности.

Сформулированную задачу можно решить, используя приёмы, разработанные японскими мастерами оригами.

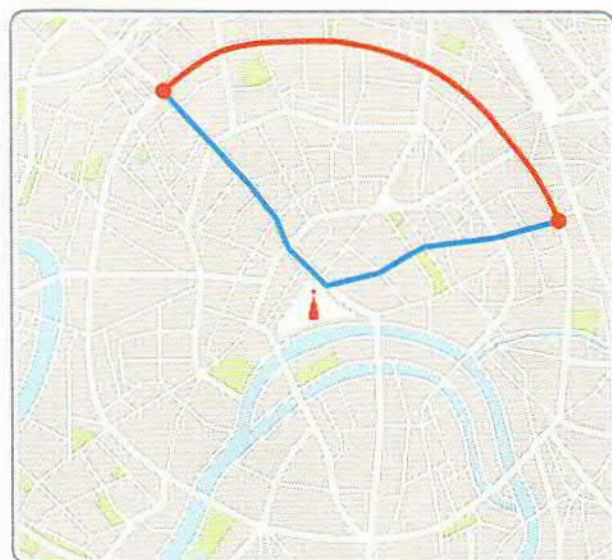


Лист карты разбивается на полосы, состоящие из параллелограммов. Если начать складывать такой лист «гармошкой» по вертикали, конструкция автоматически начнёт складываться и по горизонтали. Форма возникшей складчатой поверхности в каждый момент складывания однозначно определяется одним параметром — расстоянием между диагонально противоположными углами карты.

Приведённая конструкция замечательна ещё и тем, что параллелограммы могут быть жёсткими. Это открывает новые возможности для приложений. Например, так устроены солнечные батареи некоторых космических аппаратов.

Кратчайший путь

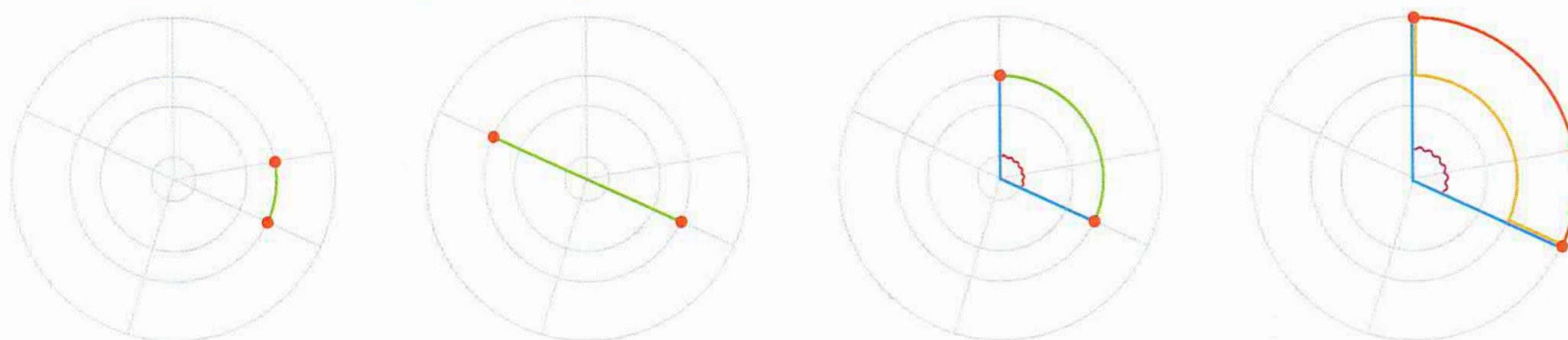
Вы хотите прогуляться по Москве. Какой путь от станции метро «Маяковская» до станции «Курская» короче: по Садовому кольцу или через центр, через Красную площадь?



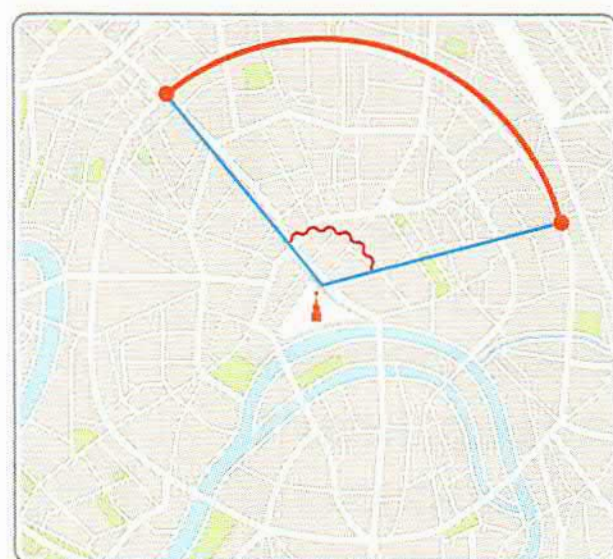
Рассмотрим математическую модель. Вы находитесь в городе с сетью радиальных и кольцевых дорог. Какой путь между точками, расположенными на одном кольце, является самым коротким?

Если точки достаточно близки друг к другу, то наиболее короткий путь — по кольцевой дороге. Если точки диаметрально противоположны друг другу, то наиболее короткий путь — по радиаль-

ным дорогам, поскольку кратчайшим путём между двумя точками является отрезок прямой.



По здравому смыслу (из соображений непрерывности) можно ожидать, что при некотором положении точек длина путей будет одинаковой. Это действительно так, если угол между радиусами равен 2 радианам (примерно 115 градусов).



С хорошей точностью длина пути между указанными станциями метро по Садовому кольцу равна длине пути через Красную площадь.

В наших рассуждениях вывод не зависел от радиуса окружности, на которой находятся точки, что объясняется подобием круговых секторов с общим центром и одинаковым центральным углом.

Например, если угол между радиусами двух точек на МКАД равен 2 радианам, то, выбирая автомобильный маршрут, можно просто поехать по кольцевой дороге, можно проехать по радиусам через центр, а можно и комбинировать — проехать по радиусу до Третьего транспортного кольца, потом — по дуге этого кольца до радиуса второй точки, затем вернуться по радиусу на МКАД. Длины всех рассмотренных маршрутов являются одинаковыми.

Глубина заложения станций метрополитена

Как оценить глубину заложения станции метро, на которую вы спускаетесь по эскалатору?

Все российские эскалаторы, с самых первых моделей и до производимых в наше время, имеют угол наклона в 30 градусов.

Достроим мысленно эскалатор до естественного прямоугольного треугольника. Длина его гипотенузы — это длина эскалатора, а длина меньшего из катетов будет примерно равна глубине заложения той станции метро, на которую ведёт этот эскалатор.

Как посчитать длину эскалатора, спускаясь по нему? Можно засечь время, но тогда для вычисления пути нужно точно знать скорость движения, а она меняется в пределах от 0,75 м/с до 1 м/с (в зависимости от типа эскалатора).

Другой возможный способ решения — измерить длину эскалатора в ступеньках. Размеры одной ступеньки найти нетрудно. Но сосчитать число ступенек, находясь на движущемся полотне эскалатора, не так-то просто...

Что ещё можно придумать? Спускаясь или поднимаясь по эскалатору, мы проезжаем вдоль ряда ламп, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Нормативами задаётся освещённость тоннеля, исходя из которой устанавливается и расстояние между соседними лампами. Оно составляет примерно 5 метров, но его несложно измерить и самому.

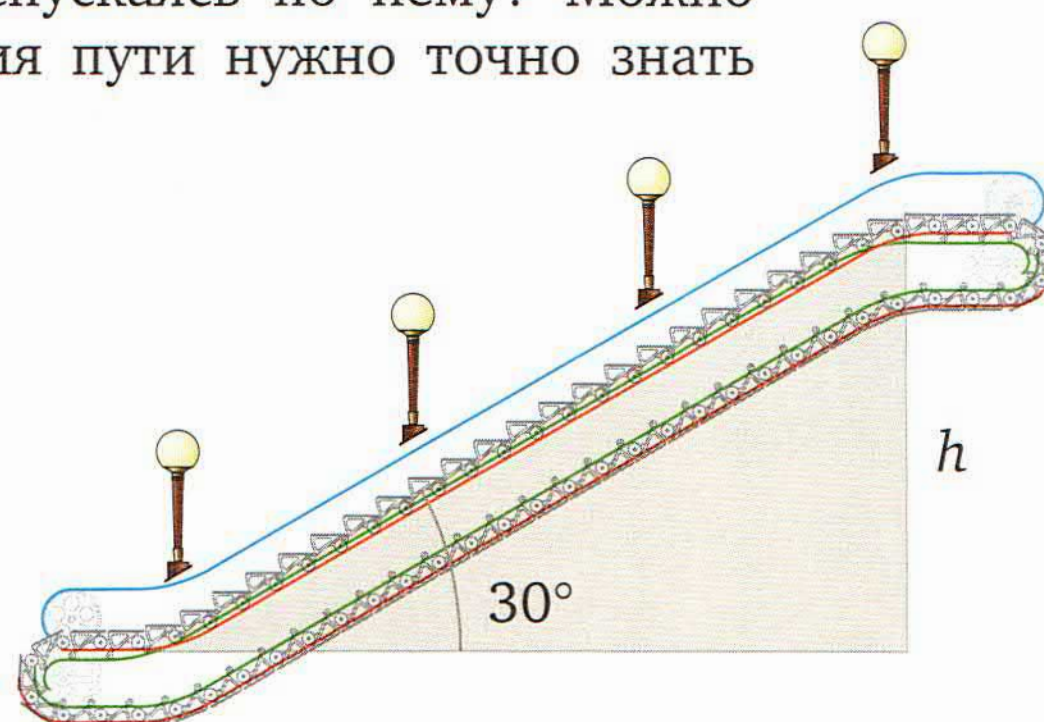
Пусть s — расстояние между лампами, n — число ламп, тогда длина эскалатора равна $(n - 1)s$, так как число промежутков между лампами равно $n - 1$.

Применив известные формулы из школьной математики, найдём примерную глубину заложения

$$h = (n - 1)s \sin 30^\circ = \frac{1}{2}(n - 1)s.$$

Впрочем, эту формулу для h можно написать и не зная «синусов» — о том, что катет, противолежащий углу в 30° , равен половине гипотенузы, школьники узнают ещё до изучения тригонометрии.

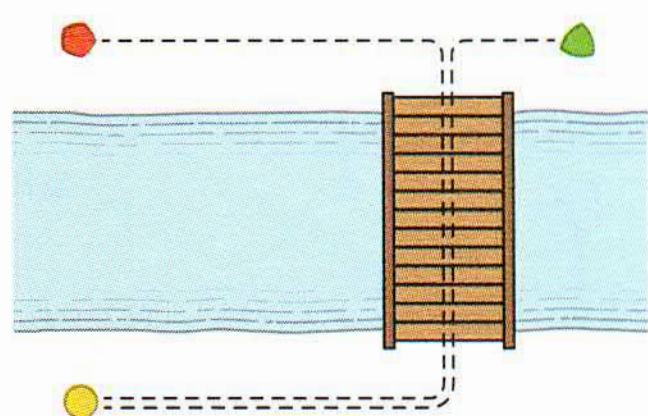
Приняв s равным 5 метрам, получим простую для применения и легко запоминающуюся формулу для оценки глубины заложения станции метро.



Далёкое близкое

Слово «расстояние» встречается там, где необходимо измерить, представить в виде числа степень близости объектов. Расстояние может быть как обычным географическим, так и длиной отрезка на некоторой шкале: сравниваемыми характеристиками могут быть время, вес, площадь, объём и т. п.

Иногда приходится оценивать взаимную удалённость объектов в нескольких шкалах. Например, жители мегаполисов часто измеряют расстояния не только в километрах, но и в минутах и часах, которые надо потратить, чтобы добраться от одного места до другого. Впрочем, идея измерения пути временем движения по нему встречалась ещё

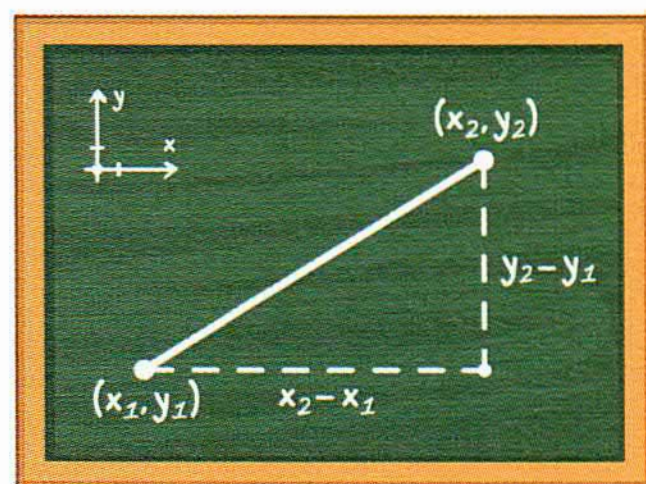


в Древнем мире: фарсанг — это расстояние, которое может пройти за час пеший воин или верблюд в караване, примерно 5—6 км.

Но даже «географическое» расстояние можно понимать по-разному: и формально, «по карте», и как длину наименьшего реального пути. Надо не только уточнять значения слов «близко»

и «далеко» в каждом конкретном случае, но и сформулировать общие требования к понятию «расстояние».

Разберём несколько способов определения расстояния между точками плоскости, каждое из которых имеет практическое применение.



На координатной плоскости каждая точка определяется парой координат $(x; y)$. Формула

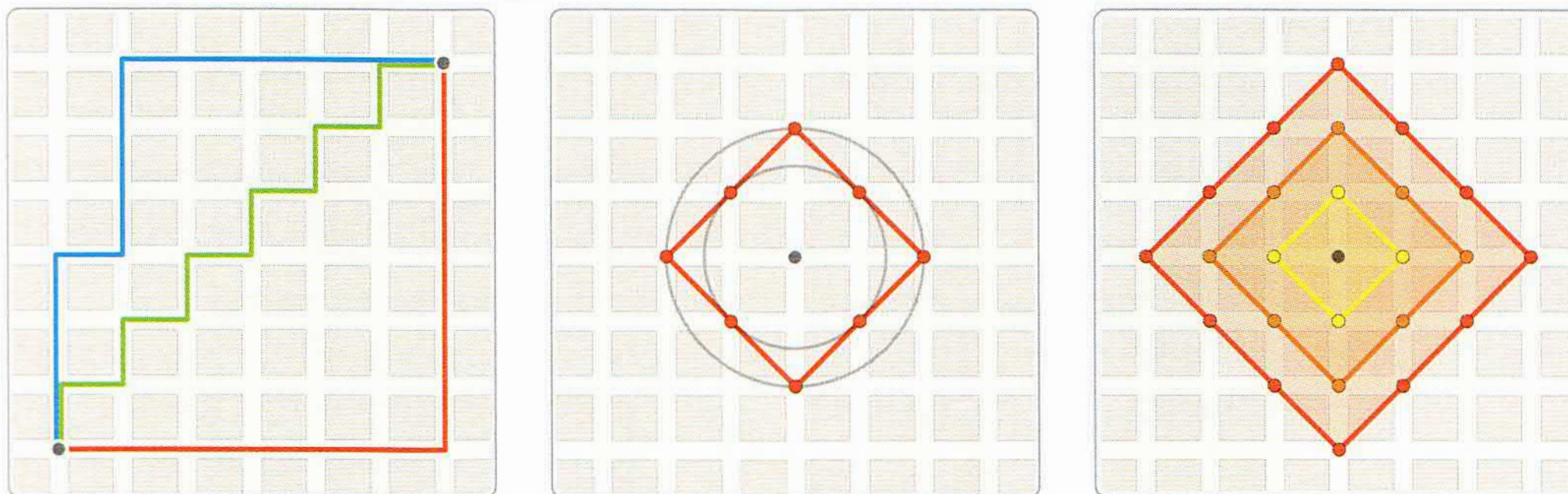
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

выражает обычное евклидово расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Житейски это соответствует возможности отправиться из A в B по кратчайшему пути — по прямой.

Но так можно передвигаться в море или в степи, а вот в городе столь беззаботно перемещаться уже не получится — главные маршруты пролегают по улицам. Если кварталы образуют квадратную решётку, то естественным образом возникает «расстояние городских кварталов» (его ещё называют манхэттенским, по соответствию планировке района Нью-Йорка). Оно определяется наименьшим числом кварталов, которые придётся пройти, двигаясь из одной точки (перекрёстка) в другую. В отличие от евклидова, манхэттенское расстояние между двумя точками реализуется различными

ломанными, кратчайший путь — не единственный. Точки, «по манхэттенскому счёту» равноудалённые от данной, с точки зрения евклидова расстояния могут не быть равноудалёнными от неё.

Если для выбранного расстояния назвать шаром множество точек, расстояния от которых до данной не превосходят R , то на плоскости евклидов шар — круг, а манхэттенский — квадрат $|x| + |y| \leq R$.



Если раздувать шар, то можно увидеть, как изменяется множество точек, до которых можно добраться за определённое число «шагов».

Ещё одно важное расстояние носит имя великого русского математика Пафнутия Львовича Чебышева. На шахматной доске оно связано с ходами короля. Шар — это квадрат $\max\{|x|, |y|\} \leq R$.

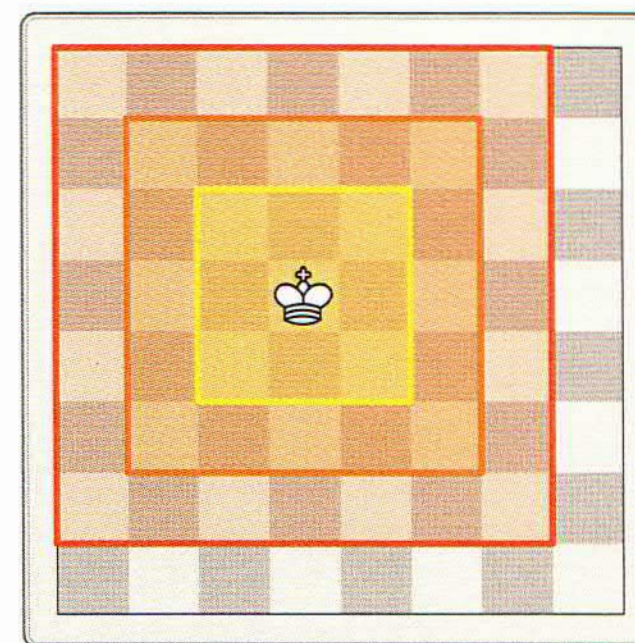
В разобранных примерах расстояния, внешне различные, имеют следующие свойства, универсальные и естественные.

1. Неотрицательность: $d(A, B) \geq 0$, причём равенство $d(A, B) = 0$ равносильно тому, что $A = B$.

2. Симметрия: $d(A, B) = d(B, A)$. Длина удава от головы до хвоста должна равняться его длине от хвоста до головы.

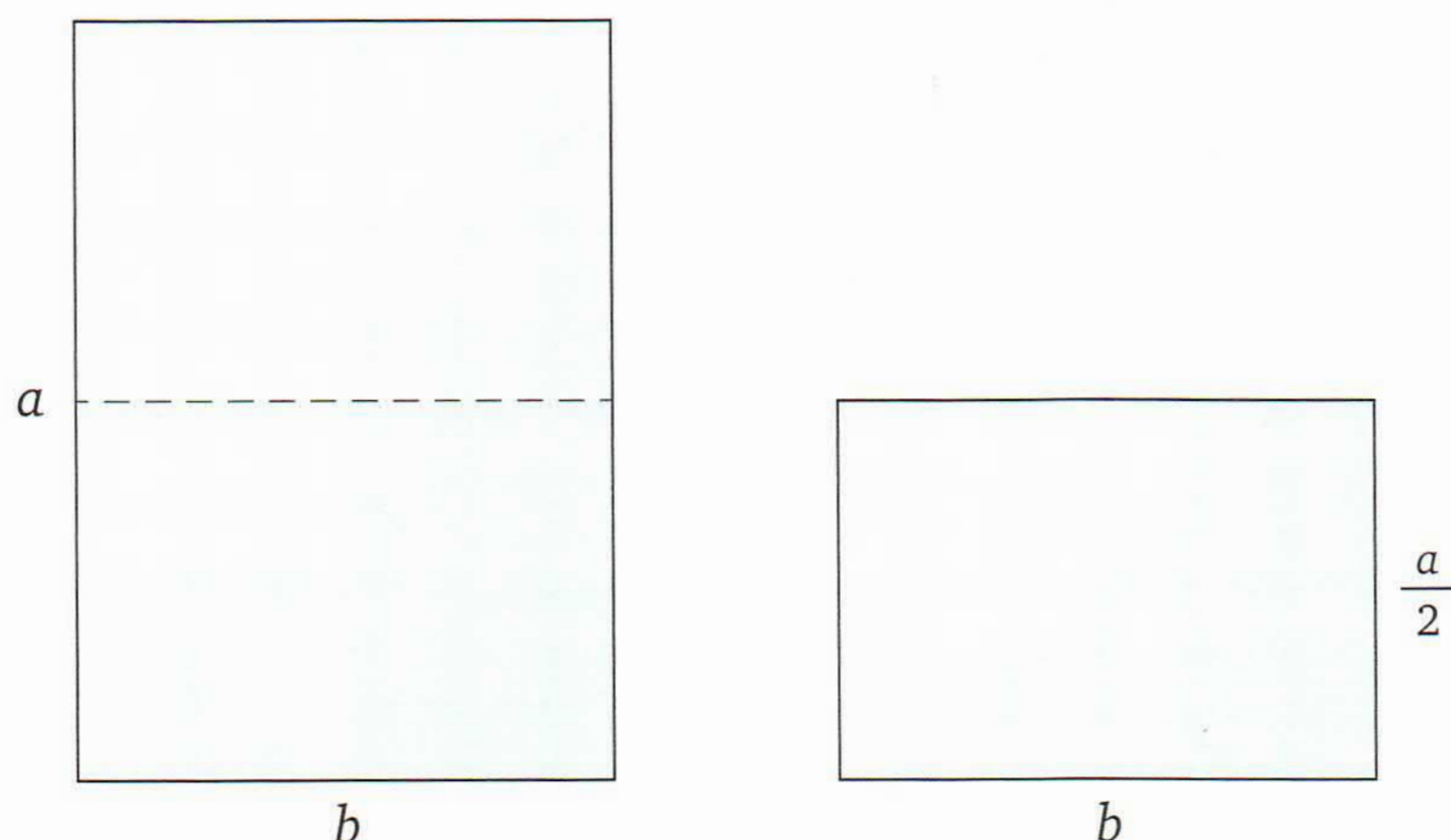
3. Неравенство треугольника: $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$. Если A, B, C — три вершины треугольника, а расстояние — обычное евклидово, то неравенство выражает известный геометрический факт.

Перечисленные «необходимые» свойства расстояний можно превратить в определение и назвать метрическим пространством множество, в котором на каждой паре точек определена функция расстояния. Изучение свойств абстрактных метрических пространств — дело математики. Чтобы накопленными результатами воспользоваться для измерения и сравнения реальных объектов, необходимо выбрать множество, в котором эти объекты будут представлены, и ввести расстояние. Например, можно подобрать математический инструмент для сравнения фотографий так, чтобы формульная оценка «расстояние мало» совпадала с человеческой визуальной — «почти неотличимы».



Формат А4

Каким должно быть отношение сторон прямоугольного листа бумаги, чтобы у половины этого листа было такое же отношение сторон?



Представим сформулированное условие в виде формулы:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2}.$$

Отсюда находим отношение сторон:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

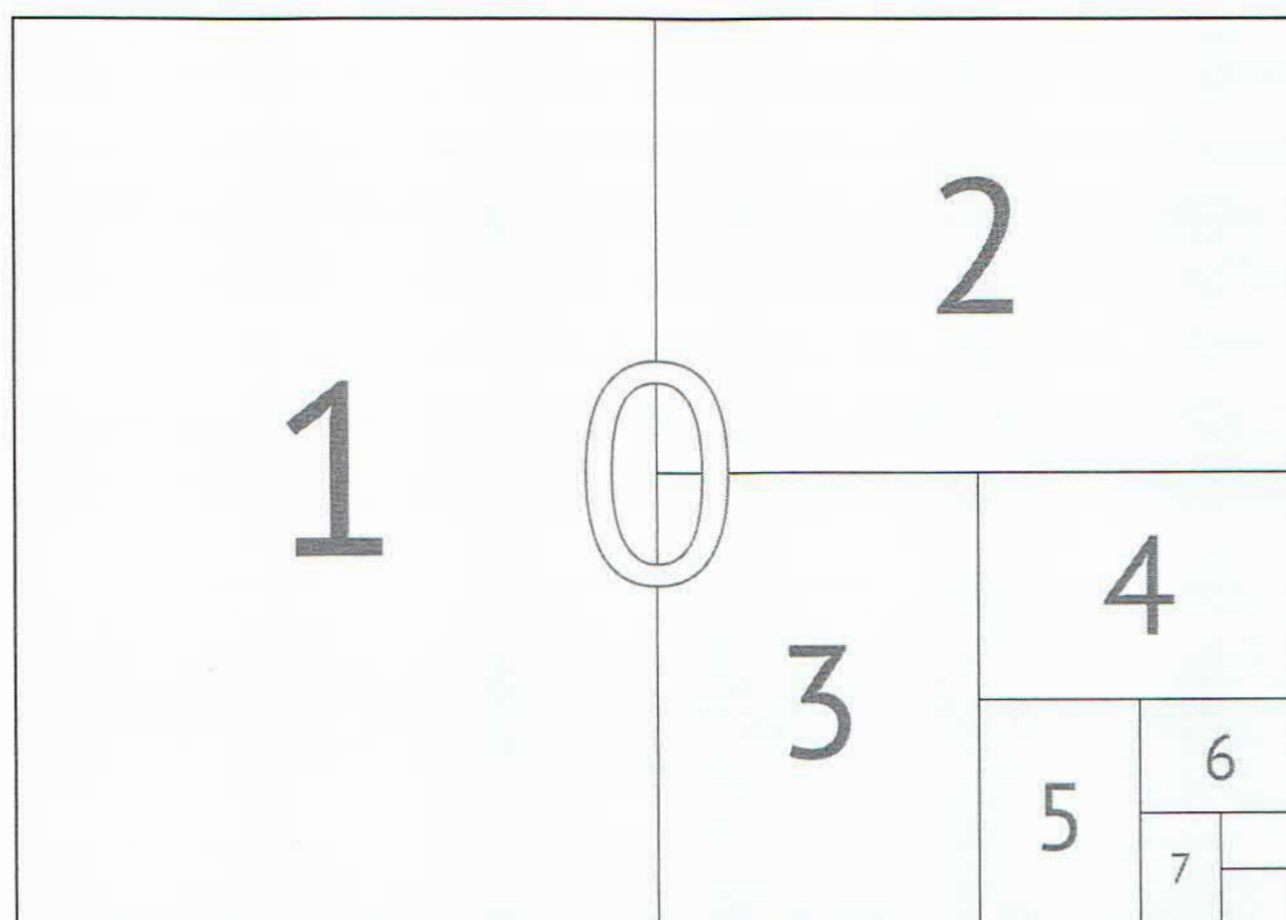
У листа с таким отношением сторон имеется свойство, ценное и в делопроизводстве, и в полиграфии: сложив его пополам, мы получим лист с теми же пропорциями и, значит, также удовлетворяющий сформулированному требованию. С точки зрения геометрии, всё дело в том, что исходный прямоугольник и его половина подобны. А если листы подобны, то макет страницы, разработанный для одного из них, можно перенести на второй простым масштабированием.

Стандарты на бумажные форматы, удовлетворяющие сформулированному требованию, были введены в 20-х годах XX века. Применяются серии «А», «В», «С», каждая состоит из последовательности уменьшающихся листов. Выбор самого большого листа в серии («базового», получающего нулевой индекс), связан с той или иной нормировкой. В каждой серии лист с номером $n + 1$ выглядит как сложенный вдвое лист с номером n .

Число $\sqrt{2}$, которое теоретически определяет отношение сторон прямоугольных листов всех номеров во всех сериях, является иррациональным. Это означает, что число $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде отношения двух целых чисел, соответствующая ему десятичная дробь — бесконечная непериодическая

$$\sqrt{2} = 1,414213562373...$$

На практике приходится использовать рациональные числа. В выборе форматов серий «А», «В», «С» длины сторон листов выражаются целыми числами (в миллиметрах), эти числа подобраны так, чтобы их отношение было близким к $\sqrt{2}$.



В серии «А» в качестве листа А0 взят лист, имеющий размеры 1189×841 мм. Размеры листа выбраны так, что его площадь (с большой точностью) равна одному квадратному метру. В повседневной жизни наиболее часто встречается формат бумаги А4. Длины сторон листа равны 297 и 210 мм, это примерно одна четвёртая часть длин сторон листа А0, площадь листа А4 — примерно $1/16$ квадратного метра. При плотности стандартной офисной бумаги 80 грамм на квадратный метр, один лист весит около 5 грамм, а пачка из 500 листов — 2,5 килограмма.

В серии «В» лист В0 выбран так, что длина его меньшей стороны равна 1 метру. Чтобы отношение сторон было близко к $\sqrt{2}$, в качестве большей стороны листа принято значение 1,414 м. Область применения серии «В» — специальные разделы делопроизводства. Например, паспорт гражданина Российской Федерации имеет формат В7 — 125×88 мм, что соответствует рекомендациям, содержащимся в международном стандарте.

Формат книги

В выходных данных этой книги указано:

«Формат $70 \times 100 \frac{1}{16}$ ».

А что это значит? И как определить размер страницы книги по этим загадочным числам?

С помощью линейки или глазомера быстро убеждаемся, что и 70, и 100 — это не размеры страницы ни в сантиметрах, ни в миллиметрах...

Во-первых, всю надпись надо воспринимать как единое целое.

Во-вторых, в этих числах есть метрический смысл, только речь идёт не о размерах страницы книги, а о размерах стандартного типографского листа 70 на 100 см, а $\frac{1}{16}$ — доля страницы книги на таком листе. Теперь становится понятным то, как произносят профессионалы название нашего формата: «70 на 100 в одну шестнадцатую долю».

4	13	16	1
29	20	17	32
28	21	24	25
5	12	9	8

С каждой из двух сторон лист делится на 16 частей, каждая «ячейка» — будущая страница книги. После печати лист складывается несколько раз и превращается в тетрадь из 32 страниц.

Один из способов сворачивания листа в тетрадь поясняют рисунки, на которых представлены обе стороны листа. Само слово тетрадь происходит от древнегреческого *τετράς* (четыре), возникло

оно с развитием письма и книжности, его языковой родственник — тетраэдр.

Тетради подбираются в книгу, затем происходит обрезка блока книги. Иногда обрезка происходит неаккуратно, некоторые страницы остаются неразрезанными. В прежние времена выражение «неразрезанная книга» означало, что она осталась непрочитанной.

После обрезки размеры листов книги несколько уменьшаются и для нашей книги получаются значения 165 мм и 235 мм (чуть меньше, чем «теоретические» 175 мм и 250 мм). Причём если страницы книги соединены клеем, то обрезка производится не по трём, а по всем сторонам. В этом случае размеры страницы становятся ещё меньше.

Сделаем несколько общих замечаний.

В соответствии со стандартами, как размеры типографского листа, так и количество долей, на которые он делится, могут быть и другими. Например, $70 \times 90 \frac{1}{32}$, $84 \times 108 \frac{1}{32}$, $60 \times 84 \frac{1}{8}$. Знаменатель дроби, определяющей долю, можно по-разному раскладывать на множители, каждое разложение даёт свой способ деления сторон листа. «Преимуществом» пользуются разложения, близкие к значению корня из знаменателя: для 32 — 4×8 , для 24 — 4×6 .

2	15	14	3
31	18	19	30
26	23	22	27
7	10	11	6

Раньше подборка тетрадей в книгу происходила вручную. Для облегчения этой работы на первой странице каждой тетради внизу были напечатаны номер тетради и фамилия автора, на третьей — номер тетради и знак *. Первое указание — порядок компоновки тетрадей, второе — для проверки правильности компоновки внутри одной тетрадки.

Книги-панорамы

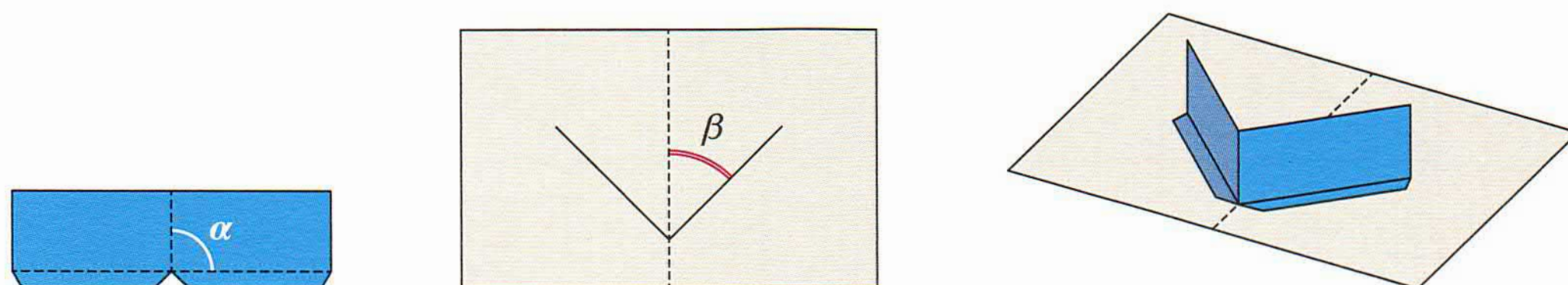
Детские книжки-панорамы с поднимающимися фигурами рыцарей и стенами замков, промопродукция компаний, притягивающая взрослых своей трёхмерной рекламной убедительностью — конструкции, основанные на эффекте Pop Up (= внезапно подняться). Проектирование таких конструкций — по сути, геометрическая задача.

Книжки-панорамы обычно раскрываются полностью, на 180° . Наиболее популярная основа механизма Pop Up в этом случае — прикреплённая к страницам разворота V-образная картонная конструкция, по-английски — V-fold, а с точки зрения геометрии — двугранный угол.

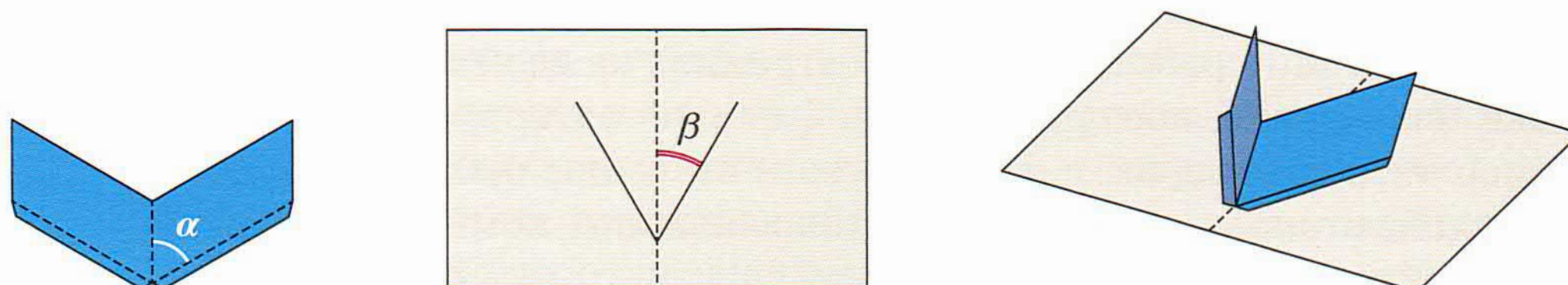
Для достижения различных эффектов иногда требуется, чтобы грани угла были перпендикулярны развороту, иногда — чтобы грани были наклонены внутрь или наружу конструкции. Определяют эти случаи два плоских угла: α — угол между ребром двугранного угла и линией приклейки, β — угол между сгибом книги и линией приклейки (будем считать, что $\beta < 90^\circ$, т. е. V-угол обращён ребром к нам).

Чтобы получить действующую конструкцию, соотношения между α и β должны быть следующими.

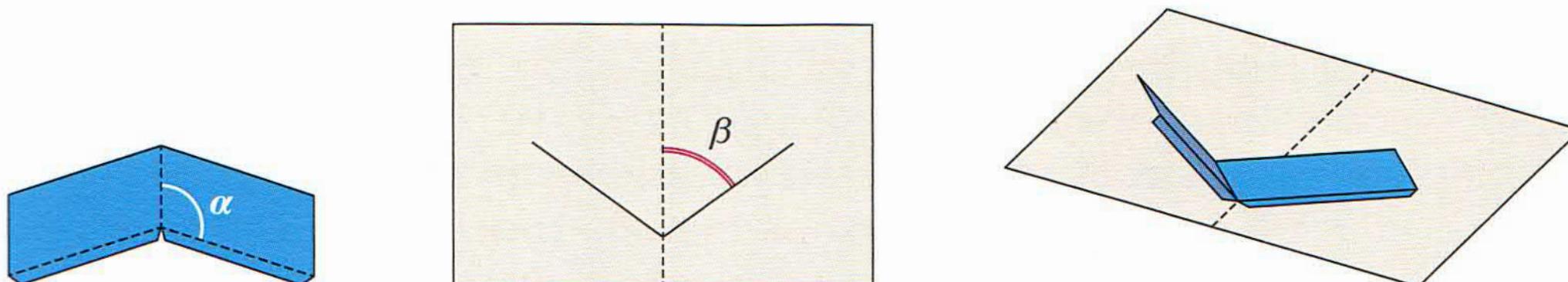
Грани двугранного угла перпендикулярны развороту: необходимо, чтобы выполнялись условия $\alpha = 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$.



Грани и ребро двугранного угла отклоняются от нас: $\alpha < 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$, $\alpha \geq \beta$. При фиксированном β уменьшение α увеличивает наклон ребра («от нас»). В пределе при $\alpha = \beta$ угол не будет подниматься, будет «лежачим». При фиксированном α уменьшение β уменьшает наклон ребра.

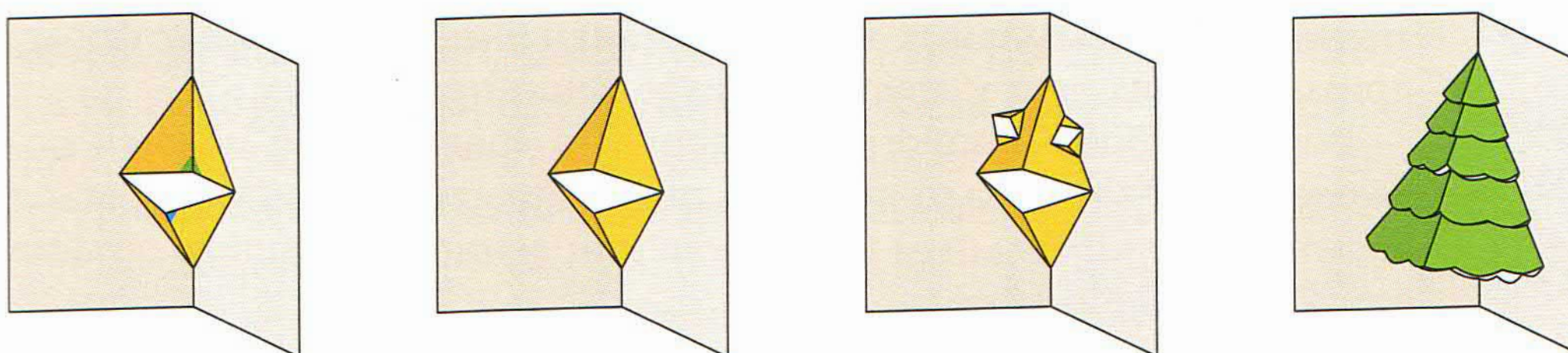
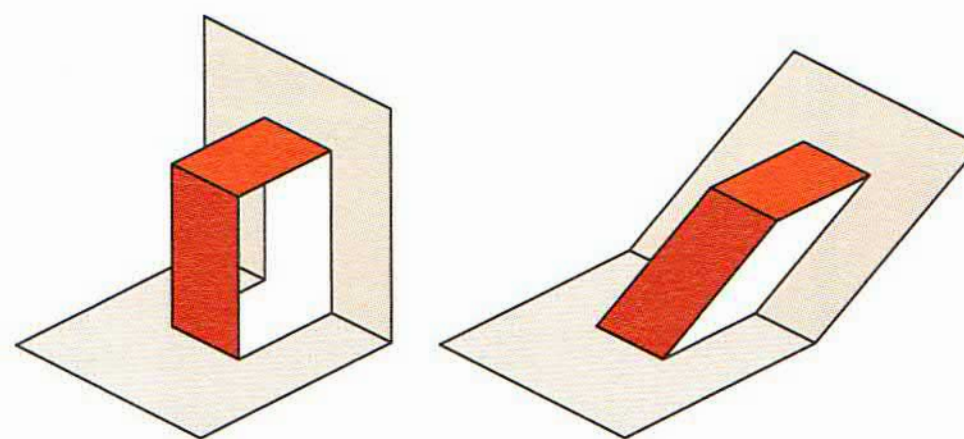


Грани и ребро наклонены к нам: $\alpha > 90^\circ$, $\beta < 180^\circ - \alpha$. При фиксированном α уменьшение β уменьшает наклон, ребро и грани приближаются к вертикальному положению.



Ещё один важный для конструкций Pop Up механизм — «параллелограмм». Напомним, что у параллелограмма противоположные стороны равны и параллельны. Особенность «параллелограмм»-конструкций — вырубаться они могут из «разворачивающегося» картона, а могут быть и внешними, приклеенными к нему, например, дополнять элементы V-fold.

Для открыток, которые раскрываются не полностью на 180° , а на меньший угол, обычно 90° , конструкцию Pop Up часто вырезают из картона самой открытки. Простейшая конструкция в данном случае — часть двугранного угла, состоящая из двух треугольников, определяемых своими сторонами (левый рисунок). При фиксированном неполном развороте открытки система квадратных уравнений, определяющая координаты подвижной вершины, имеет ровно два решения, которым соответствуют зелёная и синяя точки.



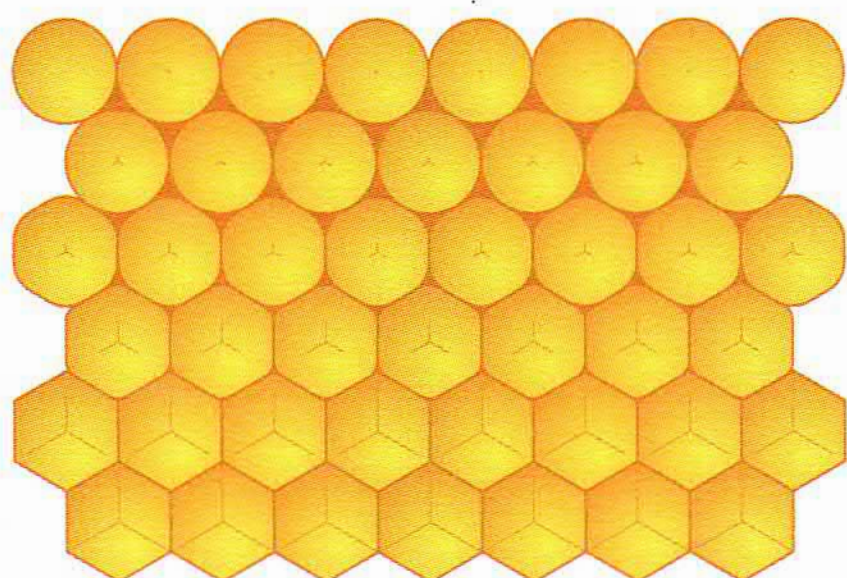
Типов простейших конструкций немного, но из них, как из «кирпичиков», можно создать весьма затейливые сооружения. Подобно архитектуре, многообразие форм возникает за счёт комбинирования и кирпичиков, и строительных приёмов. Так, можно включить в конструкцию Pop Up несколько однотипных элементов (пример — «ёлочка»), можно использовать цепочку однотипных элементов, в которой последующий элемент вырезается из предыдущего (пример — лесенка, сделанная на основе «параллелограмма»). Можно использовать и сложные композиции простейших элементов.

Пчелиные соты

Пчелиные соты издавна вызывают у человека восхищение симметрией и красотой своей архитектуры. Удивительно, но оптимальность создаваемых пчёлами конструкций математически обосновать удалось только на протяжении последнего столетия.

На самом деле, пчёлы-строители из вырабатываемого ими воска сооружают ячейки в виде цилиндров (а не шестиугольных призм). Пчела движется от основания ячейки и, вращаясь, лепит вокруг себя стенки цилиндра. Диаметры ячеек почти совпадают, поскольку рабочие пчёлы примерно одного размера.

Основания ячеек пчёлы закладывают в виде гексагональной укладки кругов, которая на плоскости является плотнейшей. Пчёлы



так делают веками, а математики доказали оптимальность данной укладки только к середине XX века. Упомянем, что аналогичная задача для шаров в трёхмерном пространстве (гипотеза Кеплера) была решена лишь в конце XX века, а в XXI веке — ещё и в пространствах размерностей 8 и 24.

Но хотя укладка цилиндров и наиплотнейшая, между ними остаются зазоры. Этот недостаток исчезает уже без участия

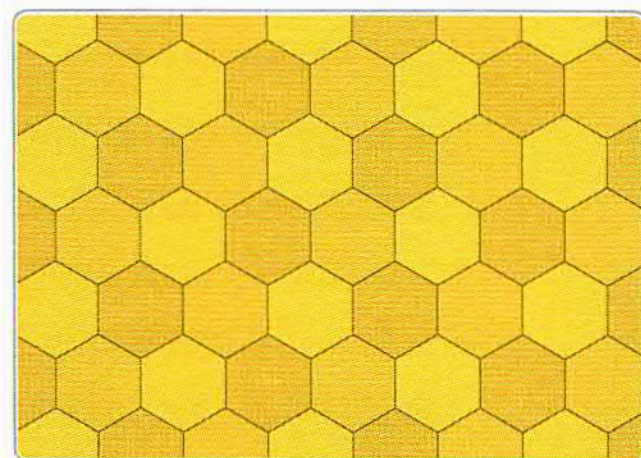
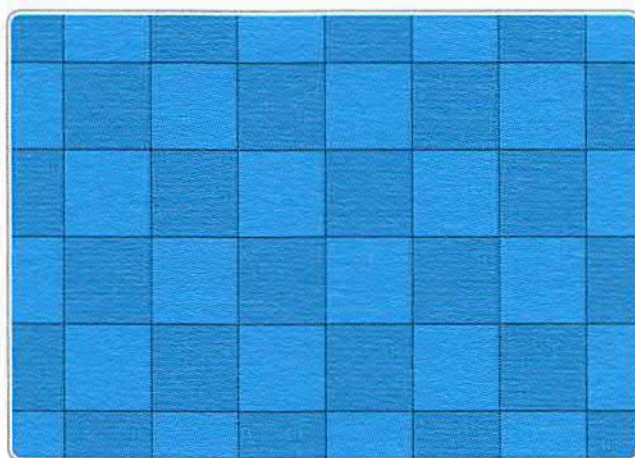
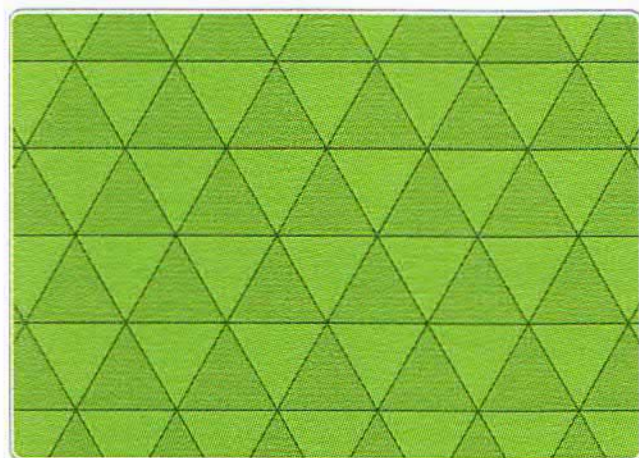
пчёл: пока воск пластичен, под действием сил поверхностного натяжения (как в мыльных плёнках) стенки ячеек принимают форму примыкающих друг к другу шестиугольных призм.

Воск для пчёл — дорогой материал (в сравнении с мёдом), поэтому, строя соты, надо выбрать такую архитектуру, чтобы расход воска был минимальным при разбиении данного большого объёма на одинаковые ячейки.

Оказывается, оптимальность укладки кругов на плоскости «наследуется» шестиугольниками, в которые они превратились: получается самый экономичный вариант по расходу воска.

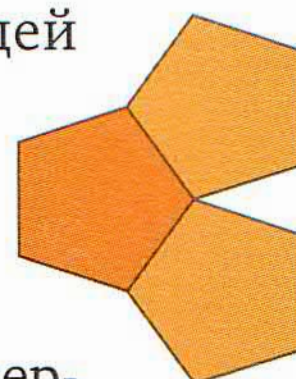
Математическая постановка задачи такова: надо найти разбиение большой плоской области на элементы малой фиксированной площади (размер пчелы), у которого суммарный периметр границ будет наименьшим. Без дополнительных условий (например, что элементы — выпуклые) задача оказалась сложной. Только в начале XXI века задача была решена в общей постановке: разбиение на правильные шестиугольники оказалось наилучшим.

Но если считать, что элементы разбиения — одинаковые правильные многоугольники, то объяснить преимущество шестиугольников несложно. Ясно, что плоскость можно замостить правильными



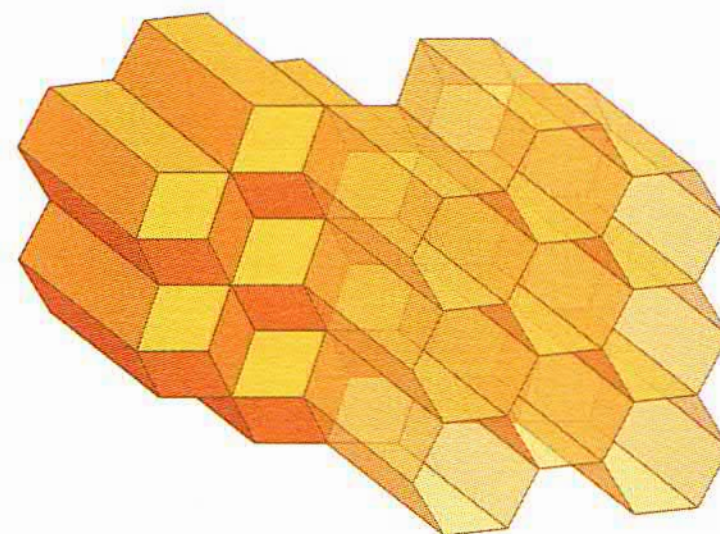
треугольниками, квадратами, правильными шестиугольниками. Оказывается, других вариантов нет.

Например, если к двум смежным сторонам правильного пятиугольника приложить такие же пятиугольники, то около общей вершины «незаполненным» останется угол, который, очевидно, замостить не удастся. По аналогичным соображениям не удастся замостить плоскость и правильными n -угольниками, если $n \geq 7$: у каждого угол при вершине больше, чем 120° (угол в правильном шестиугольнике), «незаполненный» внешний угол в общей вершине двух n -угольников слишком мал — третий уже не помещается.



Осталось сравнить три перечисленных разбиения по величине суммарного периметра границ. Несложные вычисления показывают, что в цепочке элементов равной площади «треугольник — квадрат — шестиугольник» их периметры монотонно уменьшаются. Чтобы найти суммарный периметр границ разбиения, надо сложить периметры элементов и разделить сумму на 2, так как во «внутренней» части отрезки границ будут сторонами сразу двух прилегающих многоугольников. Значит, наилучшим является разбиение на правильные шестиугольники.

Следовательно, и гексагонально уложенные шестиугольные призмы-ячейки образуют слой, в сооружении которого использовано минимальное количество воска. У всех ячеек слоя общее плоское дно, а входы с одной стороны. В природе пчёлы сооружают сразу два слоя с общим днищем. Сдвиг слоёв относительно друг друга превращает плоское дно каждой призмы в трёхгранный выступ, объём ячеек увеличивается, а два слоя оказываются накрепко состыкованными.



Архитектуру пчелиного таунхауса отличают два важных свойства: оптимальность по затратам воска и высокая прочность.

Филлотаксис

Многие растения, встречающиеся в природе, изумляют сочетанием красоты, совершенства, оптимальности.

Одна из природных загадок, известная со времён Леонардо да Винчи, но до сих пор необъяснённая, носит название «филлотаксис» (название составлено из двух слов древнегреческого языка и буквально означает «расположение листьев»). Загадочным является наблюдаемое в мире растений геометрически правильное расположение листьев, лепестков, семян, характеристики которого подчиняются закономерностям арифметическим.

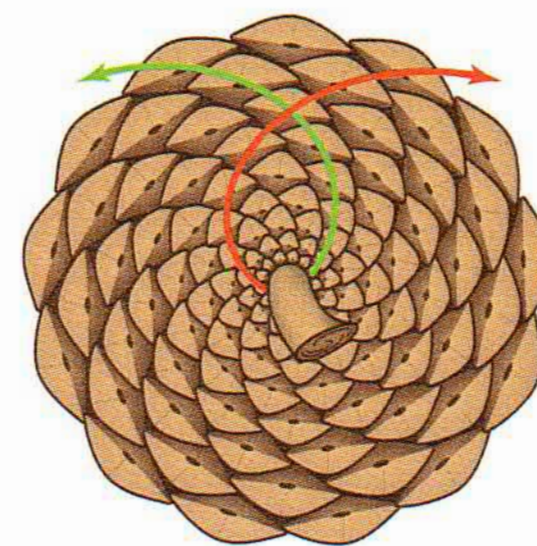
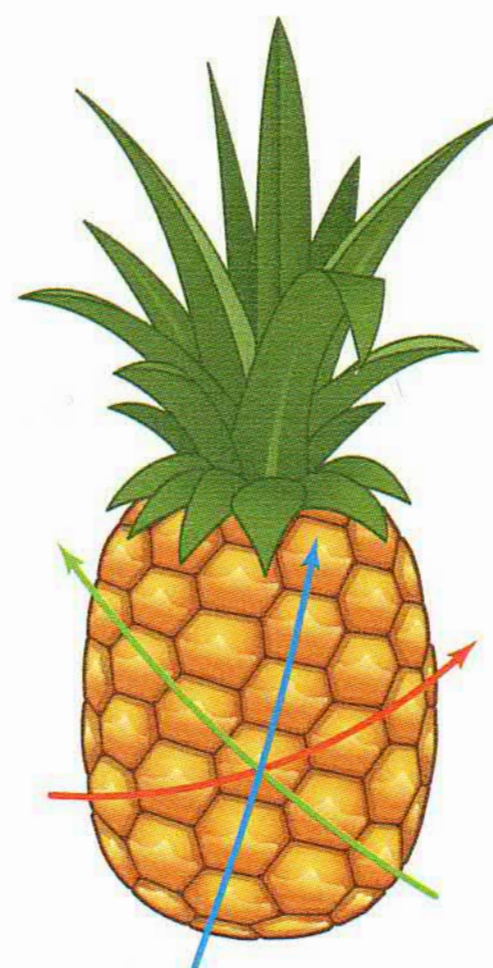
Причиной появления тонких математических закономерностей интересуются естествоиспытатели, от ботаников до физиков, гипотез множество, а нерешённый вопрос один: что оптимизируют растения, выстраивая элементы по правилам филлотаксиса? Признанного решения пока нет. Несмотря на это, убедиться в реальности математической составляющей филлотаксиса может каждый читатель.

Возьмите еловую или сосновую шишку, ананас или диск подсолнуха. Сразу видно,

что чешуйки в ананасе и шишке, семена в подсолнухе образуют регулярную структуру. Можно заметить и наличие на поверхностях спиралей двух типов — правых и левых. Если сосчитать количество односторонних спиралей, то с большой вероятностью вы получите одну из пар (5, 8), (8, 13), (13, 21), (21, 34), образованных двумя соседними числами Фибоначчи.

Последовательность чисел Фибоначчи $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots\}$ задаётся соотношением $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ и парой начальных чисел $F_0 = 1, F_1 = 1$.

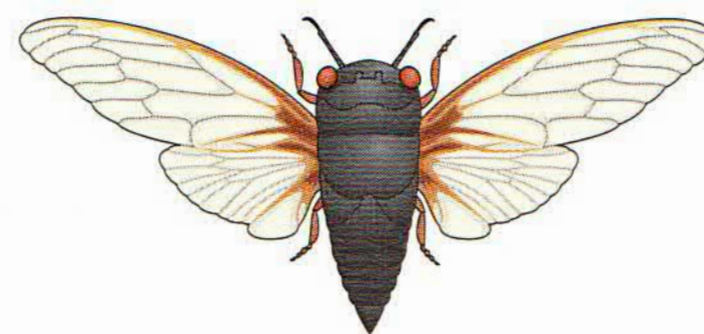
А теперь оторвитесь от книги и отправляйтесь в парк или в лес. Ищите, находите, рассматривайте и изучайте удивительные математические закономерности в мире растений.



Периодические цикады

Удивительный мир дикой природы иногда дарит натуралистам сюжеты, в которых явно просматриваются математические закономерности. В одних случаях эти закономерности удаётся объяснить на основе имеющихся знаний, получить их как вывод в логической цепочке рассуждений. А бывает и так, что подобный рациональный путь найти не удаётся, и тогда доказательства уступают место гипотезам.

Разберём пример из жизни насекомых, демонстрирующий, что источником гипотез могут стать математические свойства величин в наблюдаемых закономерностях. Речь пойдёт о живущих в Северной Америке цикадах, называемых периодическими. У части видов рода жизненный цикл —



13 лет, у другой части — 17 лет. Раз в 13 лет на поверхность из подземного мира выходят личинки одного типа, раз в 17 лет — другого (периодичность). Основное предположение в объяснении цифровой загадочности циклов — то, что в борьбе за выживание рода цикады «научились» использовать свойства... натуральных чисел!

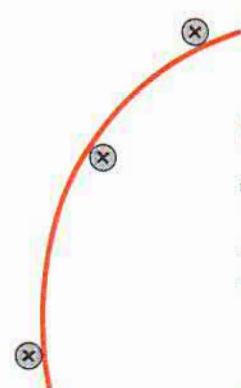
Есть две гипотезы, дополняющие друг друга и объясняющие возникновение видов цикад-13 и цикад-17. Математическая составляющая в обеих гипотезах одна — простота чисел 13 и 17. Напомним: простые числа — те, которые нельзя представить в виде произведения двух меньших. Ключевое утверждение: если p — простое число, а $n < p$, то наименьшее общее кратное чисел n и p равно произведению np .

Первая гипотеза объясняет, как числа 13 и 17 «защищают» цикад от хищных врагов. Например, если в какой-то год появились и цикады-17, и хищники, у которых длина жизненного цикла $n < 17$, то следующая «встреча» состоится только через $17n$ лет (наименьшее общее кратное чисел n и 17). Хищники не смогут ждать так долго... А подобрать мутацию вида хищников так, чтобы длина цикла была равна 17, — сложная задача даже для «естественного отбора».

С цикадами-13 ситуация сходная. Общее важное свойство — числа 13 и 17 не только простые, но и большие, что делает встречи с хищниками редкими, разнесёнными по времени.

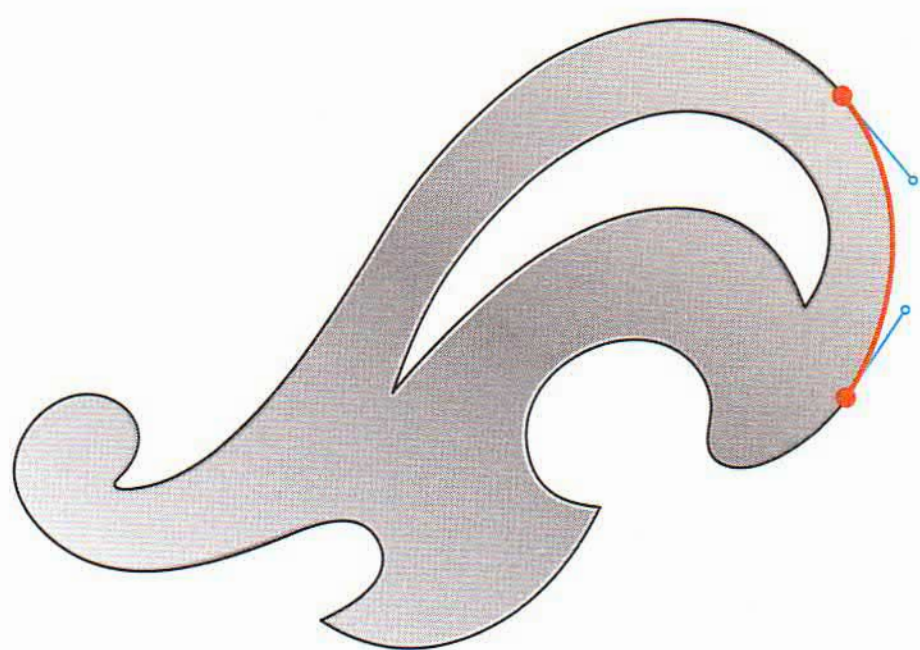
Вторая гипотеза анализирует возможность гибридизации цикад-13 и цикад-17, которая опасна и нежелательна, так как может разрушить имеющуюся цикличность. Спасает то, что пересечения происходят только раз в 221 год.

Гладкие линии



Простейшая (но исторически заслуженная!) механическая конструкция, позволяющая нарисовать достаточно сложную кривую, такова: в заданных точках штырьками фиксируется положение гибкой и упругой пластины, определяющее гладкую линию.

Самым распространённым устройством во времена «ручного» рисования чертежей было лекало — плоская линейка, границы которой были готовым набором разнообразных гладких кривых.

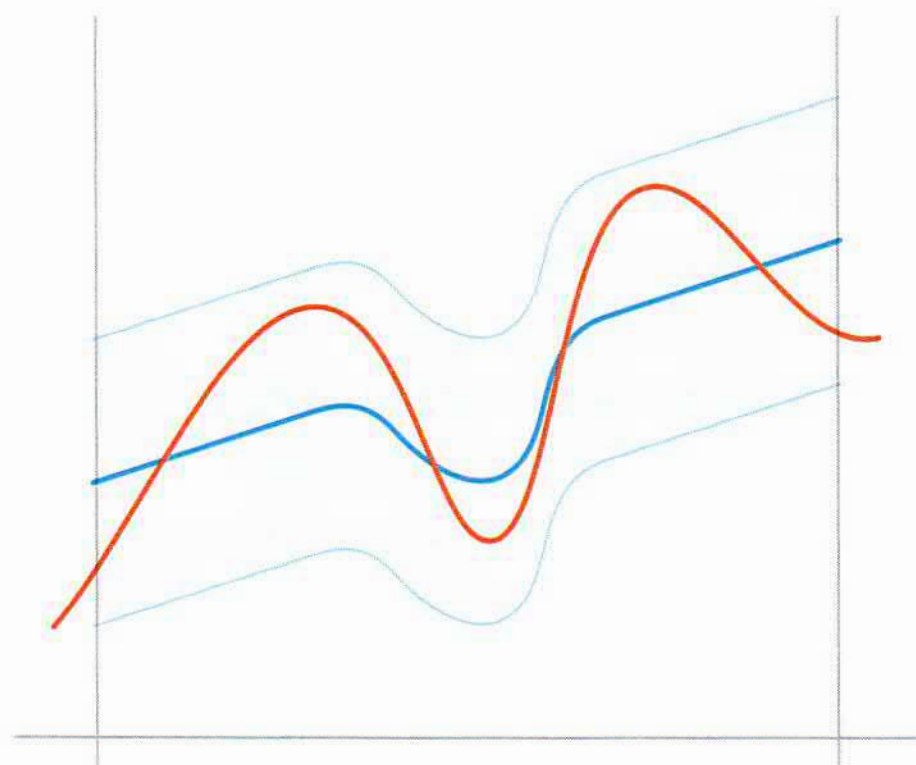


Затем настало время использования кривых, заданных формулами. В наши дни результаты использования гладких «формульных» кривых видит на экране монитора каждый компьютерный пользователь. А самым распространённым инструментом для создателей компьютерной графики являются кривые Безье — элемент всех графических программ и систем автоматизированного проектирования.

Работа этого инструмента основана на результатах математических исследований, восходящих к XIX веку.

В 1885 году немецкий математик Карл Вейерштрасс доказал, что любую непрерывную на отрезке функцию можно с любой точностью приблизить алгебраическими многочленами (функциями вида

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$). Геометрически теорему Вейерштрасса можно пояснить так. Если вы провели над отрезком кривую линию, перемещая карандаш слева направо и не отрывая его от листа бумаги (т. е. изобразили график непрерывной функции), то для произвольно узкой полосы, окружающей кривую, найдётся многочлен, график которого проходит внутри этой полосы.



В чём ценность этой теоремы для нематематиков? Если необходимо нарисовать плавную линию, например,

создавая логотип, контур автомобиля или букву шрифта, то можно ограничиться графиками многочленов, поскольку любую гладкую

кривую можно заменить графиком многочлена так, что эти две линии на глаз будут неразличимы. При этом способ представления кривой будет простым и удобным, в том числе для компьютера. Вместо задания линии значениями в точках (а для представления гладкой кривой точек должно быть очень много) необходимо задать лишь небольшой набор чисел — коэффициенты многочлена. При поточечном задании линии ни о каком векторном формате речь идти не может — после увеличения масштаба картинки точки будут разрежены, а в случае задания многочленом возможность масштабирования обеспечивается автоматически.

Ввиду большой значимости теоремы Вейерштрасса для развития самой математики стали появляться различные варианты её доказательства. Однако, когда в 1912 году появилось полуторастра-ничное доказательство российского математика С. Н. Бернштейна, оно произвело огромное впечатление неожиданностью подхода и красотой. Это доказательство было конструктивным — в явном виде предъявлялся многочлен, удовлетворяющий условиям теоремы. Впоследствии эти многочлены называли многочленами Бернштейна.

На практике гладкую кривую приходится собирать из частей. И в этой работе более гибким инструментом, по сравнению с многочленами, являются сплайны. Если отрезок разбит на несколько более мелких отрезков и определённые на них алгебраические многочлены (полиномы) можно в точках разбиения «гладко склеить», то получится сплайн (кусочно-полиномиальная функция).

Упоминавшиеся кривые Безье, используемые в компьютерной графике, — это сплайны, в конструкции которых полиномы Бернштейна выступают как «строительные кирпичики». Впервые кривые Безье появились в 60-х годах XX века, когда П. Безье и П. де Кастельжо независимо разработали методы проектирования кузовов автомобилей, основанные на применении сплайнов.

Разумеется, представлена только одна линия в удивительной и одновременно типичной для математики эволюции теоремы Вейерштрасса: от изначально чисто теоретического утверждения до конкретных практических приложений.

Например, квадратичные кривые Безье — составленные из многочленов второго порядка — используются в формате компьютерной анимации SWF. Кубические кривые Безье используются в PostScript, PDF, SVG и других графических программах и форматах. Использовались они и при создании этой книги — как иллюстраций, так и шрифта, которым напечатан текст.

Измерение штангенциркулем

Чем объясняется повышенная точность результатов измерения штангенциркулем в сравнении с измерениями при помощи обычной линейки? На первый взгляд — всё дело в точной фиксации объекта, но больший вклад вносит математическая составляющая конструкции штангенциркуля.

Основное отличие от обычной линейки — дополнительная шкала на подвижной рамке. Если бы на подвижной рамке вместо набора делений была лишь одна риска, то по сути штангенциркуль был бы обычной линейкой, а риска — служила бы указателем-«курсором». При измерении объекта риска, показывающая сдвиг рамки относительно штанги, может попасть между делениями основной шкалы, и размер можно будет определить только с точностью до миллиметра, округлив результат либо в меньшую, либо в большую сторону.

Идея, не усложняющая устройство, но позволяющая получать более точные результаты измерения, появилась несколько веков назад. Она заключается в нанесении на подвижную рамку специальной дополнительной шкалы — нониуса.



Десять делений шкалы на подвижной рамке по длине совпадают с 19 делениями основной шкалы, расположенной на штанге. Шкала, построенная по такому принципу, и называется нониус — в честь португальского математика П. Нуниша (латинизированное имя — Nonius), придумавшего сам принцип. Современный вид такой шкалы был предложен французским математиком П. Вернье, и поэтому второе название — верньер.

Удивительным образом эта простая конструкция увеличивает точность результатов измерений на порядок — до 0,1 мм!

В изображённом на рисунке случае нулевая риска дополнительной шкалы указывает на основной шкале размеры детали: больше 37 мм, но меньше 38 мм. Обозначим размер детали (показатель риски) через $37 + x$.



Будем двигаться по делениям дополнительной шкалы слева направо и найдём то деление, которое совпадает (или почти совпадает) с каким-нибудь делением основной шкалы. Допустим, деление k дополнительной шкалы совпало (почти совпало) с делением l основной шкалы (где l считается от отметки 37).

Из совпадения делений основной и дополнительной шкал получаем уравнение

$$37 + l \approx 37 + x + k \cdot \frac{19}{10}.$$

Поскольку на два деления основной шкалы приходится приблизительно одно деление подвижной, а k и l — целые числа, то $l = 2k$.

Отсюда $x \approx k \cdot 0,1$.

В изображённом на рисунке случае $k = 4$. Значит, размер детали примерно равен $37 + 4 \cdot 0,1 = 37,4$ (мм).

Бросается в глаза, что в уравнении у числа 37 — роль статиста: оно сразу сокращается. Если в общем случае обозначить размеры детали в миллиметрах через $N + x$, где N — целое число, $0 \leq x < 1$, то вывод будет тот же: $x \approx k \cdot 0,1$, размер детали приближённо равен $N + k \cdot 0,1$ (мм).

Из последней формулы видно, что 0,1 — шаг в этой записи — точность получаемого результата. Эта величина — следствие соотношений между делениями дополнительной шкалы и основной шкалы. Например, при пропорции 10 : 9 (а не 10 : 19, как в примере), точность не изменится (0,1 мм), но считывать данные будет труднее из-за мелкого шага нониуса. А вот при пропорции 20 : 39 (встречается в штангенциркулях) точность возрастает до 0,05 мм!

Дополнительная шкала как источник дополнительной точности применяется и в других измерительных инструментах.

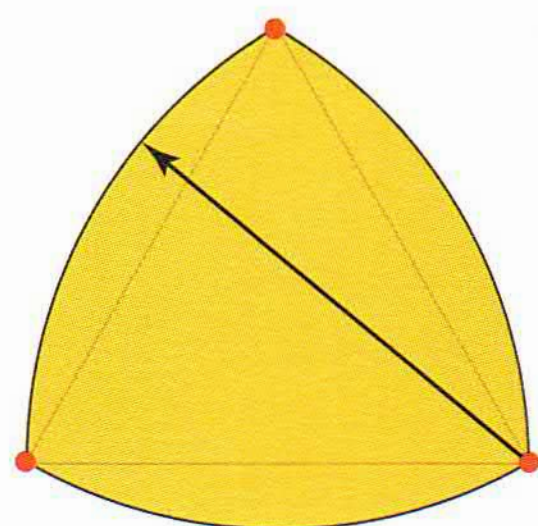
Фигуры постоянной ширины

Крышки люков, спасающие пешеходов от падений в колодцы и мешающие автомобилистам, чаще всего имеют круглую форму. Выбор такой формы объясняется соображениями безопасности — квадратная крышка при сдвиге может провалиться, поскольку сторона квадрата меньше его диагонали. А у круга есть замечательное свойство — это фигура постоянной ширины.

Постоянная ширина означает, что при «обхвате» фигуры двумя параллельными прямыми ширина полученной полосы будет постоянной, не зависящей от выбора направления прямых.

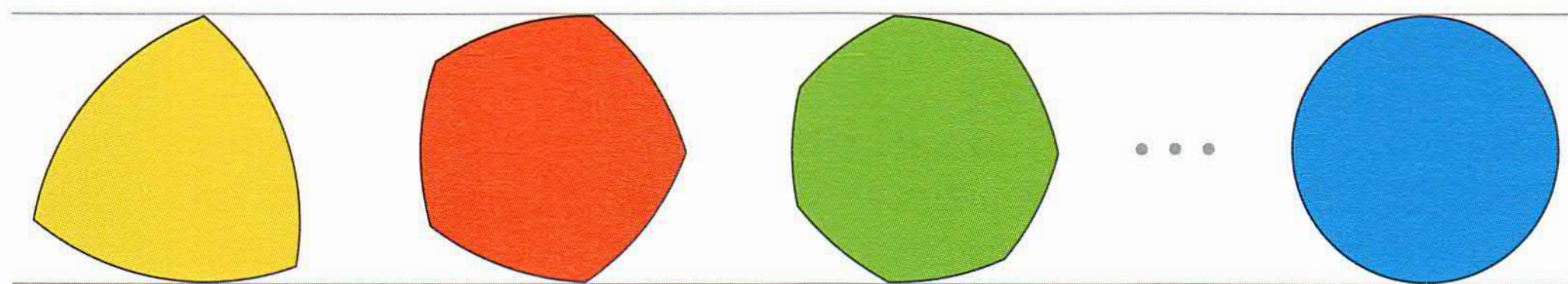
А есть ли на плоскости, помимо круга, другие фигуры постоянной ширины? Оказывается, есть, и их бесконечно много.

Самая простая и самая знаменитая такая фигура — треугольник Рёло. Точнее говоря, эта фигура только напоминает треугольник, её граница — дуги трёх окружностей с центрами в вершинах правильного треугольника и одинаковых радиусов, равных длине стороны треугольника. Можно показать (и «проверить»



с помощью штангенциркуля), что при обхвате фигуры параллельными прямыми точками касания прямых для треугольника Рёло будут одна из его вершин и какая-то точка на противолежащей этой вершине дуге окружности. Так как радиусы всех дуг равны, то результат «измерения» всегда будет одинаков.

По той же схеме, что и для треугольника, фигуру постоянной ширины можно построить на любом правильном n -угольнике, имеющем нечётное число вершин. Можно построить и несимметричные фигуры постоянной ширины.



Житейски, свойство постоянной ширины фигуры можно продемонстрировать, изготовив набор роликов с профилями различных фигур фиксированной постоянной ширины. Если положить ролики на горизонтальную поверхность и накрыть досочкой, то при качении роликов досочка будет перемещаться горизонтально.

У фигур постоянной ширины немало интересных свойств. Например, все фигуры данной постоянной ширины имеют одинаковый периметр. Есть у таких фигур и своеобразная иерархия. А именно, среди фигур данной постоянной ширины наибольшая площадь — у круга, наименьшая — у треугольника Рёло.

Благодаря своим геометрическим свойствам, фигуры постоянной ширины находят применение в различных областях.

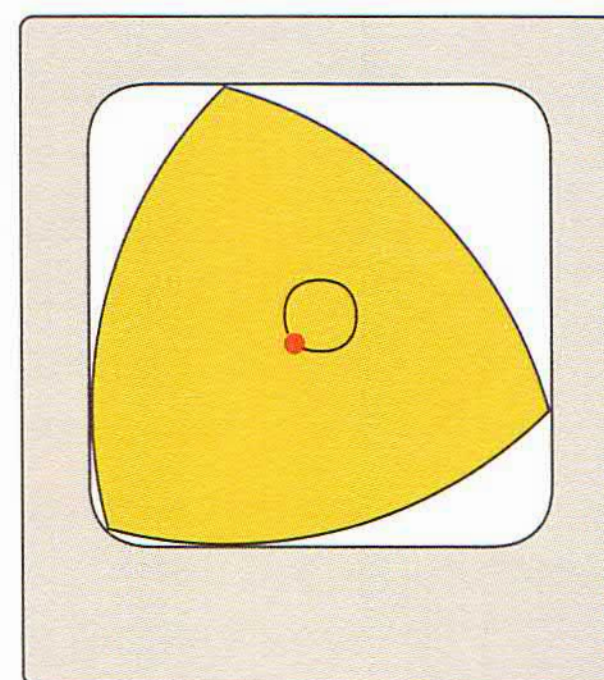
Первый пример. Вы опускаете монету в автомат и она отправляется в путь по монетоприёмнику. Чтобы монета не застряла, можно, конечно, расширить трубку. А можно изготавливать монеты в виде фигур постоянной ширины, тогда монета не застрянет, даже вращаясь. Простейшая фигура постоянной ширины, как мы знаем, — круг, форму которого имеет большинство монет. Но есть и исключения. В Великобритании 20- и 50-пенсовые монеты имеют форму фигуры постоянной ширины, построенной на правильном семиугольнике. Такую же форму имеет и монета достоинством в полдинара, имеющая хождение в Иордании. Изготовление монет в виде фигур постоянной ширины, отличных от круга, позволяет экономить металл: ведь как мы знаем, при фиксированной ширине круглая монета — самая металлоёмкая.

В двух других примерах треугольник Рёло скрыт от глаз, но является главной идейной составляющей конструкции.

До наступления цифровой эпохи фильмы снимали на плёнку. И в кинокамерах, и в кинопроекторах были грейферные механизмы, обеспечивавшие скачкообразное движение плёнки вдоль объектива (стандартно 18 скачков в секунду). Движение этих механизмов задавал треугольник Рёло.

В автомобилестроении в конце 1940-х годов Ф. Г. Ванкель придумал схему двигателя без коленчатого вала — устройства, преобразующего поступательное движение поршней во вращение вала мотора. В этом двигателе, называемом роторным, нет цилиндров. Тело, называемое ротором, при вращении постоянно касается стенок камеры двигателя, разделяя рабочее пространство на три части. В двигателе Ванкеля форма ротора в сечении — треугольник Рёло.

Возвращаясь к геометрии заметим, что если центр треугольника Рёло движется по специальной замкнутой кривой, а сам треугольник при этом вращается вокруг центра, то заметаемая область имеет форму квадрата, углы которого немного закруглены. С использованием этой идеи разработано и запатентовано сверло, позволяющее получать почти квадратные отверстия!



Геометрия пластикового стаканчика

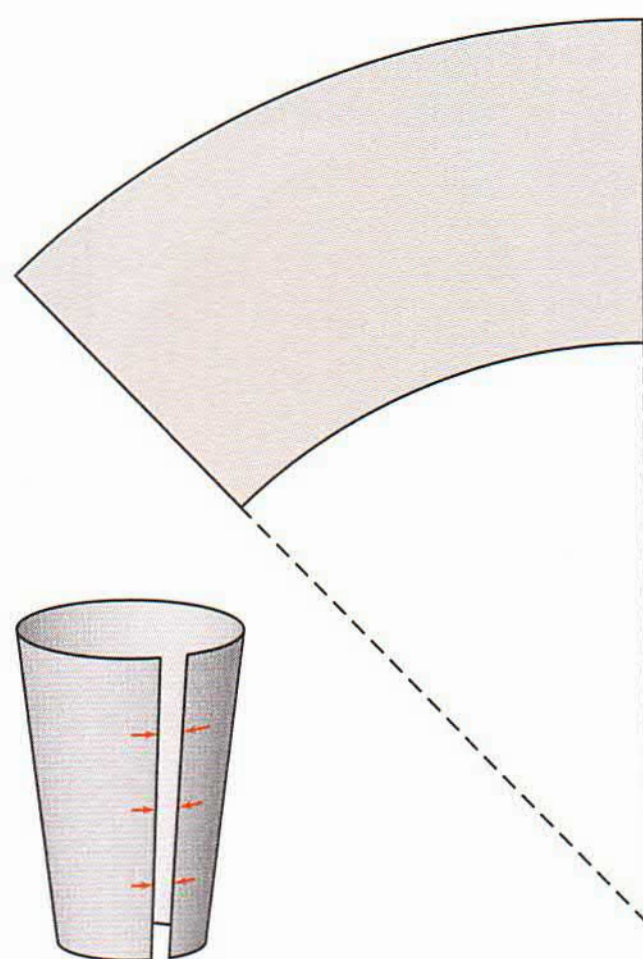


Различающиеся по назначению изделия — вёдра из жести и стаканчики для напитков, бумажные или пластиковые — имеют одинаковую форму: это усечённые конусы. Приглядевшись, замечаем ещё одну общую черту: верхняя кромка отогнута наружу и образует круглую закраину.

Почему же и для вёдер, и для стаканчиков выбрана именно такая конструкция? Попробуем разобраться.

Первое, на что стоит обратить внимание, — это простота изготовления цилиндра или конуса.

Заготовка в виде плоского листа прямоугольной формы — развёртка боковой поверхности цилиндра, а сектор круга сворачивается в боковую поверхность конуса. А развёртка усечённого конуса —



«усечённый сектор»: сектор круга, от которого отрезали сектор меньшего радиуса. Свернув лист выбранной формы (с добавленными припусками на швы), получаем боковую поверхность будущего ведра или стаканчика, остаётся приделать дно и обеспечить водонепроницаемость швов.

Технология не меняется, если дно — не круг, а вытянутый овал или какая-то иная фигура. Дело в том, что помимо прямого кругового цилиндра и прямого кругового конуса можно определить и более широкий класс цилиндрических и конических поверхностей, «опирающихся» на выбранную кривую (границу дна). Их также можно изготавливать из плоских развёрток. Ценность описанных конструкций уве-

личивает то, что из плоских развёрток простым сворачиванием ничего, кроме цилиндров и конусов, получить не удастся.

Но если сложность изготовления цилиндрических и конических вёдер примерно одинакова, а в повседневности конические изделия имеют подавляющее численное преимущество, то возникает вопрос: чем это объясняется?

Главное преимущество конической формы — изделия, сделанные на основе одинаковых заготовок-развёрток боковых поверхностей, можно вкладывать друг в друга, что важно и при хранении, и при перевозке. Причём прямой круговой конус — поверхность

вращения, поэтому можно складывать изделия стопкой, «вслепую», не заботясь об их совместимости.

В наши дни жестяные изделия почти полностью вытеснены штампованными изделиями из пластика. Теперь не нужно изгибать плоские жестяные листы, пластмассовое изделие изготавливается целиком. В результате чаще стали встречаться вёдра, дно которых — квадрат, прямоугольник, эллипс или ещё более причудливая фигура. Но боковые поверхности — по-прежнему конические, и в магазине покупатели видят привычные стопки из вложенных друг в друга однотипных вёдер.

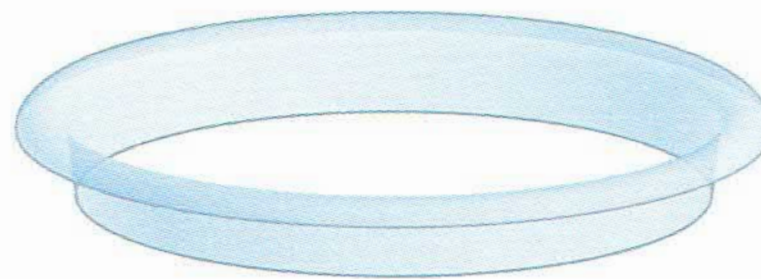
Как у жестяных и бумажных изделий, так и у их пластиковых двойников есть ещё одна общая черта, о которой уже говорилось, — загнутая верхняя кромка, закраина. Чтобы понять роль закраины, проведите эксперимент. Возьмите одноразовый пластиковый стаканчик для холодных напитков (кулер и стопки таких стаканчиков — почти обязательная деталь в современных офисах) и попробуйте сдавить его с боков. Вы ощутите сопротивление стаканчика, он «не захочет» уплощаться. Отрежьте теперь верхнюю часть с закраиной и снова сдавите стенки — вы увидите, что лишённая жёсткой рамки-закраины верхняя половина стаканчика будет сжата беспрепятственно.

Дело в том, что коническая поверхность — непрерывно изгибаемая. На «языке» стаканчика это свойство означает следующее. Во-первых, его стенку, сделанную из гибкого, тонкого пластика, можно деформировать. Во-вторых, нерастяжимость пластика обеспечивает в процессе изгибания неизменность длины любой линии, нарисованной фломастером на поверхности.

А вот закраина из такого же материала, но имеющая форму круглого жёлоба, не допускает непрерывных изгибаний. Более точно, неизгибаемым является как весь тор — поверхность бублика, так и любой вырезанный из него кольцевой жёлоб, даже мелкий.

В завершение эксперимента со стаканчиком, положите его отрезанную верхнюю часть на стол загнутой кромкой вниз и попробуйте сжать закраину, не отрывая от поверхности стола. Вам будет казаться, что пальцы сжимают жёсткую мощную пружину.

Кольцеобразные пояса жёсткости, «вырезанные» из тора, используются и при изготовлении банок для напитков. Материал — очень тонкий металл, поэтому и крышка банки, и её дно переходят в боковую поверхность через «арматурные пояса», каждый состоит из пары соединённых «разновыпуклых» четвертинок тора.



Шуховские башни

В 1920 и 1921 годах над малоэтажным в то время районом Шаболовки вырастала удивительная по красоте башня, причём росла «сама по себе» — рядом не было ни кранов, ни лесов. Сейчас эта 150-метровая башня, построенная по проекту Владимира Григорьевича Шухова, — один из узнаваемых архитектурных символов Москвы.



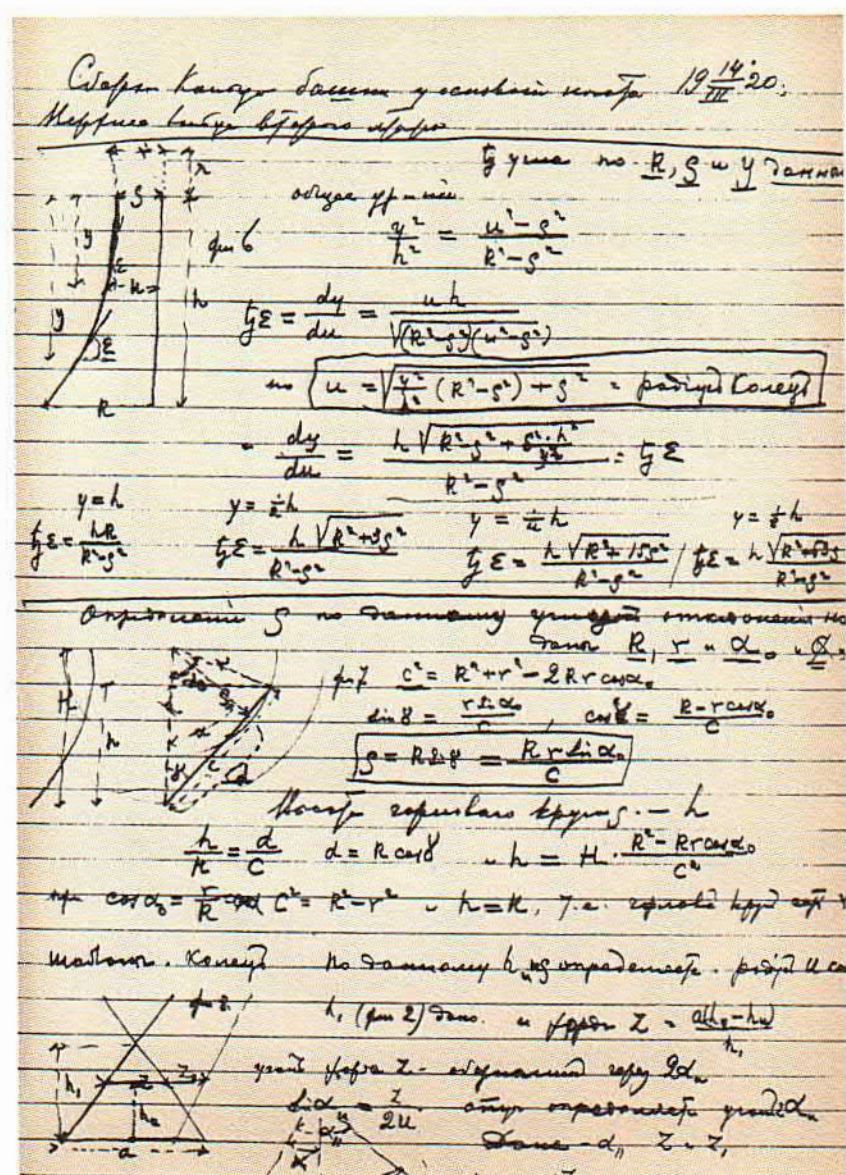
Дневник В. Г. Шухова сохранил для нас математические расчёты по проекту. Конструкция состоит из шести секций-гиперболоидов, каждая секция — «паутина», образованная прямыми стальными швеллерами, расположенными по образующим гиперболоидов.

Гипербола — кривая на плоскости, модуль разности расстояний от любой точки которой до двух данных, называемых фокусами, постоянен. Гипербола является коническим сечением, наряду с эллипсом и параболой, но отличается от них тем, что у неё есть асимптоты — прямые, к которым она приближается, но никогда их не достигает. У изучаемой в школе гиперболы $y = 1/x$ асимптоты перпендикулярны друг другу и совпадают с осями декартовой системы координат.

При вращении гиперболы вокруг её оси симметрии, перпендикулярной отрезку с концами в фокусах, получается поверхность — однополостный гиперболоид вращения.

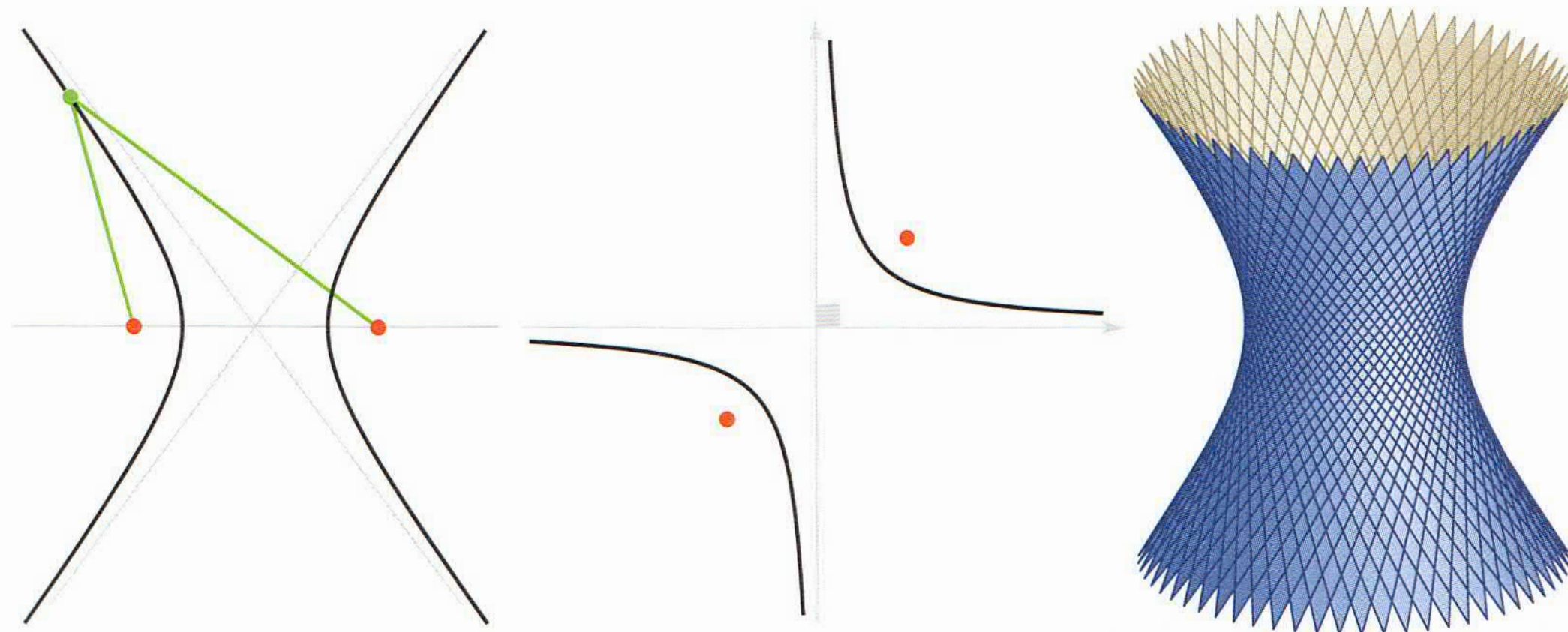
Оказывается, что через каждую точку гиперболоида проходят две прямые, пол-

ностью лежащие на нём. Каждая из них при вращении вокруг оси гиперболоида «заметает» всю поверхность. Такие линии называются образующими. Образующие делятся на два семейства: в одно семейство попадают те образующие, которые при вращении вокруг оси переходят друг в друга. Соответственно и однополостный ги-



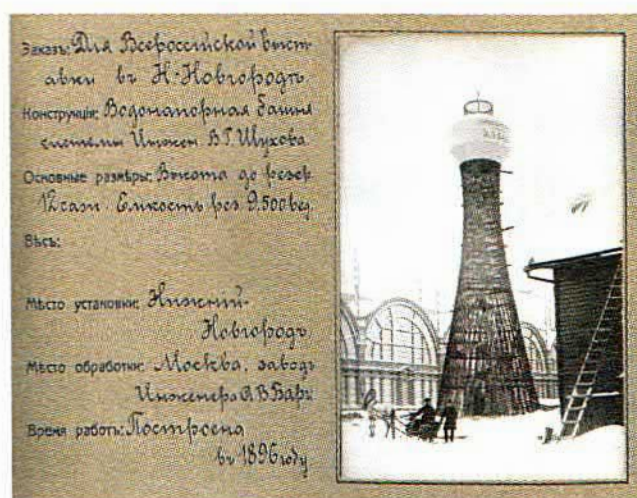
перболоид двумя способами можно представить как своеобразный «паркет», выложенный прямыми одного семейства.

Таким образом, изогнутая поверхность состоит из прямых. Именно это свойство и использовал В. Г. Шухов: каждая секция башни на Шаболовке «соткана» из образующих двух семейств.



В. Г. Шухов спроектировал и построил в России более двухсот гиперболоидных водонапорных башен. При этом каждый проект был уникален — выполнение технических требований соединялось с архитектурной привязкой к местности. А первая такая конструкция была представлена на Всероссийской промышленной и художественной выставке, проходившей в 1896 году в Нижнем Новгороде.

Ещё несколько известных примеров. Для перехода линии электропередачи НиГРЭС через Оку под Нижним Новгородом был сооружён каскад из четырёх пар гиперболоидных опор (самые высокие — по 128 метров). Под Херсоном до сих пор сохранились большой и малый маяки гиперболоидной конструкции.



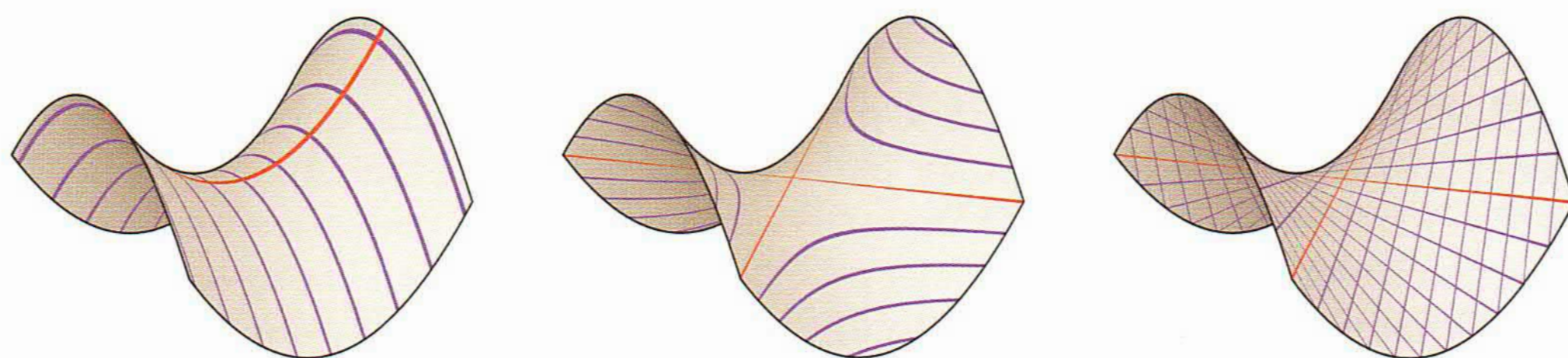
За последние десятилетия в разных странах появилось несколько высотных гиперболоидных сооружений. И все их авторы признают огромный вклад, который внёс в разработку таких конструкций великий инженер и учёный Владимир Григорьевич Шухов.

Чипсы

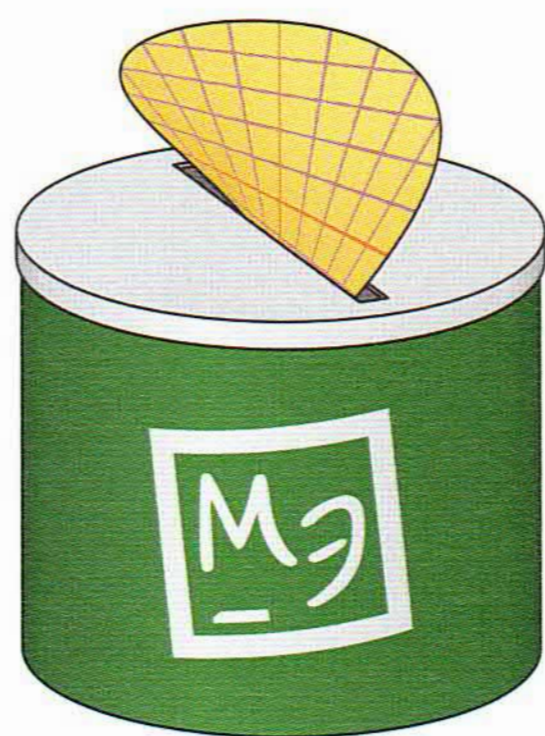
Упакованные в цилиндрические тубусы чипсы, чтобы они меньше крошились, запекают на жарочных листах, придающих плоским заготовкам форму гиперболического параболоида.

Эта напоминающая седло поверхность образуется при движении параболы (её ветви направлены вниз), вершина которой скользит по другой, неподвижной параболе (ветви направлены вверх). Плоскости парабол в каждый момент времени перпендикулярны, оси — параллельны.

Появление слова «гиперболический» в названии объясняется тем, что при пересечении поверхности с горизонтальной плоскостью получается гипербола. (Если плоскость проходит через центр седла, то гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых.)



Но кроме парабол и гипербол на гиперболическом параболоиде «живут» и прямые: через каждую точку этой седловидной поверхности проходят две прямые. Каждая из них может двигаться по поверхности гиперболического параболоида, замечая её. В математике поверхности, образованные движением прямой линии (образующей), называются линейчатыми. Простые примеры — цилиндр и конус. А вот линейчатость гиперболического параболоида или однополостного гиперболоида (вспомните конструкции В. Г. Шухова), конечно, удивляет.



Свойство линейчатости проявит себя наглядно, если в крышке тубуса проделать прямолинейную прорезь, а затем взять из стопки чипсов один ломтик и «опустить» его в тубус через полученную щель. Это можно сделать не сломав ломтик, надо только держать (и поворачивать!) его так, чтобы в каждый момент времени через прорезь проходила образующая гиперболического параболоида.

Ломтик пиццы

Пицца — это съедобная тарелка из теста, на которой лежит вкусная всякая всячина. В Италии пиццу едят по-разному: на бегу — держа ломтик руками, в пиццерии — вооружившись ножом и вилкой.

Если вы возьмёте треугольник пиццы руками, он может перегнуться и начинка будет потеряна. А нельзя ли застраховать себя от этой опасности?

Оказывается, можно: надо самому изогнуть ломтик, отогнув края вверх так, чтобы поверхность стала цилиндрической.

Если тесто тонкое и пропечённое (как, например, в римской пицце), то кусочек пиццы по свойствам похож на бумажный лист — гнётся, но не растягивается. Эксперименты с цилиндрически согнутым бумажным треугольником убеждают, что даже «носик» у него не отгибается вниз.

Дело в том, что цилиндрическая поверхность, как и коническая, — очень простая, она получается сворачиванием плоского листа бумаги. У этих поверхностей есть плоская развёртка, они, по сути, являются плоскими.

Если бы можно было изгибанием без растяжений отогнуть носик у цилиндрически согнутого бумажного треугольника, то получилась бы поверхность, похожая на седло.

Математический ключ к объяснению того, что это невозможно, — теорема, утверждающая, что важная характеристика поверхности, называемая гауссовой кривизной, не меняется при изгибании — это инвариант.

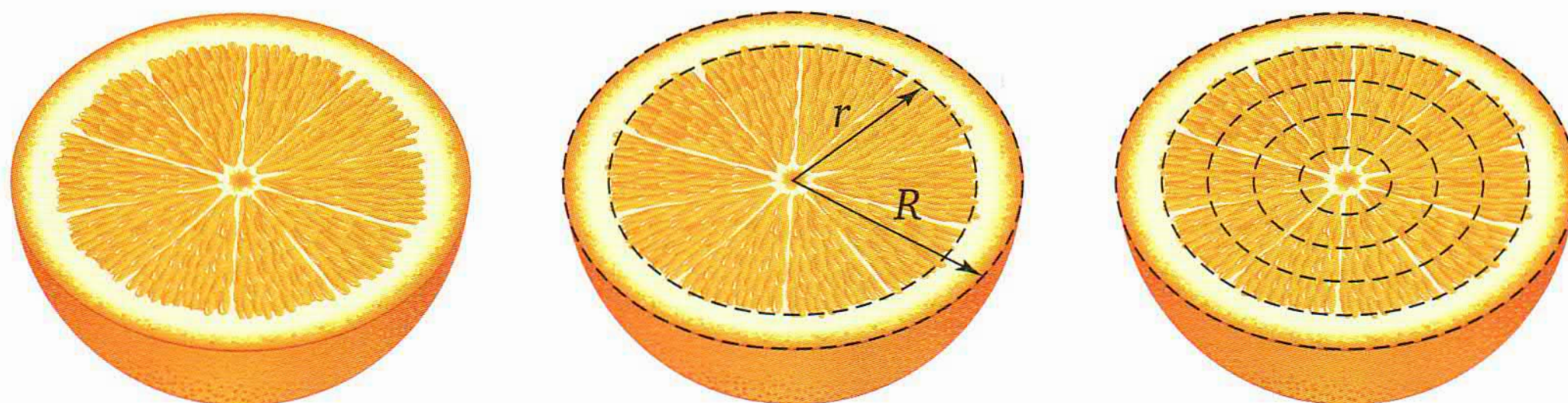
У «плоских» поверхностей (цилиндр, конус) гауссова кривизна нулевая, а у седловидной поверхности — отрицательная. Значит, превратить изгибанием цилиндрическую поверхность в «седло» не удастся.

Как следствие — цилиндрически согнутый ломтик пиццы застрахован от неожиданного перегибания и падения начинки. Так геометрическая теорема позволяет беззаботно наслаждаться пиццей.



Объём шкурки апельсина

Вы купили апельсин и разрезали его пополам. Можно ли, глядя на половинку апельсина, определить, чего в ней больше — кожуры или мякоти?



Вопрос кажется странным, ведь кожура — это тонкий слой, край апельсина (будем считать, что апельсин имеет форму шара). Оказывается, что относительно тонкий слой на границе шара имеет тот же объём, что и вся остальная часть. Например, у апельсина диаметром 10 см с кожурой толщиной 1 см почти половина всего объёма сосредоточена в кожуре!

Давайте проверим. Рассмотрим два шара радиусов R и r ($r < R$). Каким должен быть радиус меньшего шара, чтобы его объём составлял половину объёма большого?

Объём шара радиуса R равен $V_R = \frac{4}{3}\pi R^3$. Для нахождения r запишем уравнение

$$V_r = V_R - V_r, \quad \text{или} \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Из него следует что $R^3 = 2r^3$, т. е.

$$r = \frac{R}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,79R \approx \frac{4}{5}R.$$

Таким образом, почти половина объёма шара сосредоточена в слое около поверхности толщиной всего лишь $\frac{1}{5}$ радиуса.

В представленном на рисунке апельсине кожуры и мякоти поровну.

Поясним читателю выбор формы уравнения: $V_r = V_R - V_r$ вместо естественного $V_R = 2V_r$. Это сделано, чтобы напомнить одну идею, часто встречающуюся в геометрии и полезную при решении житейских задач, — фигура, для площади или объёма которой нет готовой формулы, представляется как разность «известных» фигур.

Конический фужер

Как уговорить ребёнка выпить злую микстуру? Можно пойти на «математическую» хитрость, и если она сработает, то в дополнение к порции лекарства ребёнок получит поучительное объяснение.



Нальём микстуру в конический бокал и предложим «больному» выпить половину («среднее дипломатическое» для уговаривающего и сопротивляющегося). Большинство автоматически решит, что «половина» — это «половина по высоте», и... выпьет $\frac{7}{8}$ содержимого бокала, т. е. почти всё!

А половина бокала будет выпита, если уровень жидкости понизится примерно на $\frac{1}{5}$ высоты (точнее, на $1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$). Число $\sqrt[3]{2}$ уже встречалось на предыдущей странице, его появление здесь вызвано похожими соображениями, только формулу объёма шара заменит формула объёма конуса.

Перечисленные «подходы» к бокалу изображены на рисунках. Несколько практических замечаний.

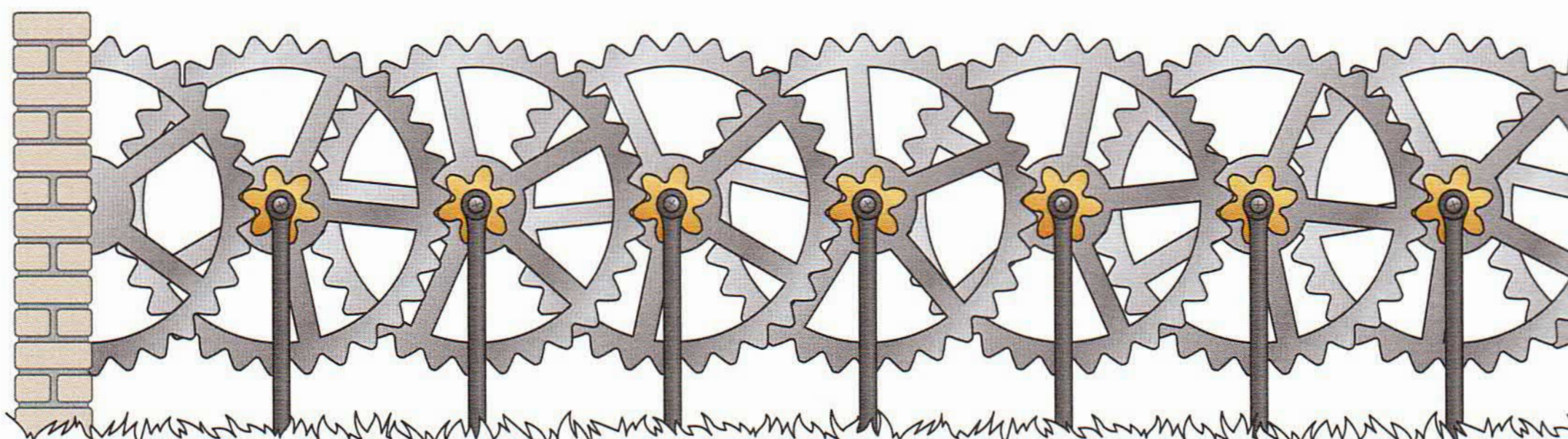
Приведённые соотношения действуют для любого конического фужера, так как не зависят от угла конуса.

В математике формулы, связи условий и утверждений в теоремах — часто вещи обратимые, их можно читать-применять и в одну сторону, и в другую. Так и в нашем примере: приведённые математические соображения позволяют разумно обосновать желание выпить больше, чем разрешают.

Практическая бесконечность

«Растёт в геометрической прогрессии» — это выражение часто можно услышать от телеведущих и экспертов, его можно встретить на страницах газет, в книгах по естествознанию, в условиях экзаменационных задач. А что оно означает?

Последовательность чисел $\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$, в которой каждое число b_n переходит в соседа справа b_{n+1} по правилу $b_{n+1} = b_n q$, называется геометрической прогрессией. Прогрессия определяется двумя параметрами: числом b_1 , которое называется первым членом геометрической прогрессии, и постоянной q — её знаменателем. На практике важно, что общий член прогрессии b_n можно найти напрямую по формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$, а не по цепочке последовательных вычислений $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_2 q$, ..., $b_n = b_{n-1} q$. Прогрессия называется возрастающей, если $q > 1$; убывающей, если $0 < q < 1$.



Познакомимся с примерами, в которых происходящее можно описать в терминах геометрической прогрессии, и посмотрим, насколько быстро может расти возрастающая геометрическая прогрессия, и, соответственно, быстра ли в своём убывании прогрессия убывающая.

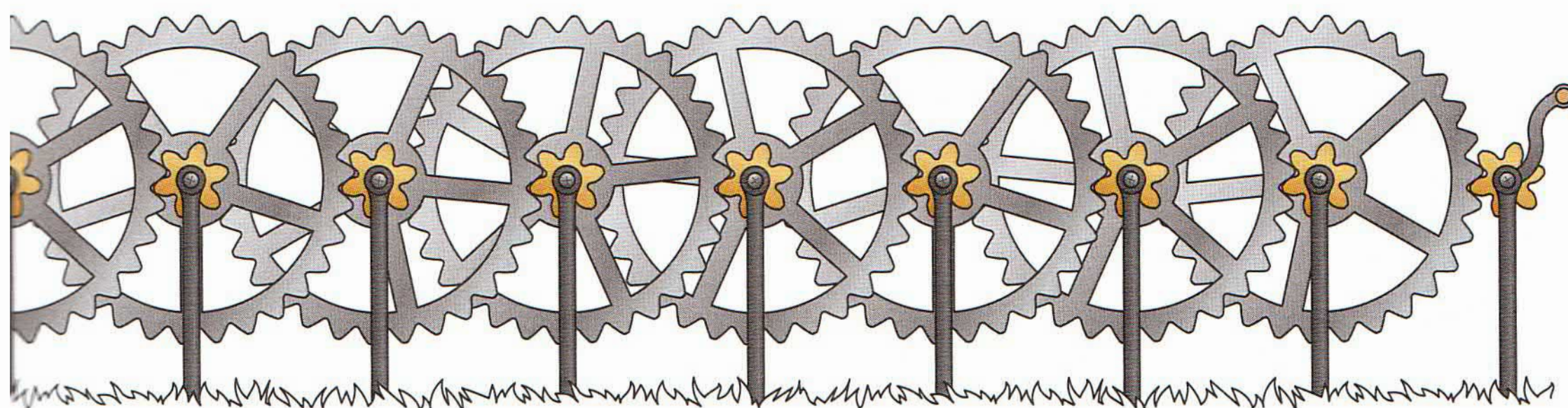
I. В самой популярной из легенд о происхождении шахмат рассказывается, что некогда в Древней Индии мудрец по имени Сесса придумал правила новой игры и преподнёс игру в дар царю Шераму.

Царь был очарован и предложил создателю игры самому выбрать награду. Тот попросил у царя немного зерна: на первую клетку доски положить 1 пшеничное зерно, на вторую — 2, на третью — 4 и т. д. — на каждую следующую клетку надо положить вдвое больше зёрен, чем на предшествующую. Возникает геометрическая прогрессия, в которой $b_1 = 1$, $q = 2$. «Скромная» просьба оказалась невыполнимой, понадобился бы урожай, собираемый на всей Земле за тысячи лет.

II. Невообразимый рост геометрической прогрессии можно ощутить и просто складывая обычный лист бумаги. После первого складывания пополам толщина бумаги увеличится вдвое, после второго — вчетверо, и очень скоро практические возможности будут исчерпаны. А если допустить, что удалось сложить лист 42 раза, то оказалось бы, что «толщина» конструкции больше, чем расстояние от Земли до Луны.

III. Примеры, иллюстрирующие свойства убывающей прогрессии, впечатляют не меньше. Изготовим цепочку из шестерёнок, зацепленных последовательно одна за другую так, чтобы каждая следующая вращалась в 5 раз медленнее предыдущей. Таким образом, угловые скорости шестерёнок образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен $1/5$.

Предположим, что цепочка достаточно длинная. Если начать вращать ось первой шестерёнки с большой скоростью, то даже после длительной непрерывной работы последняя шестерёнка практически не повернётся.

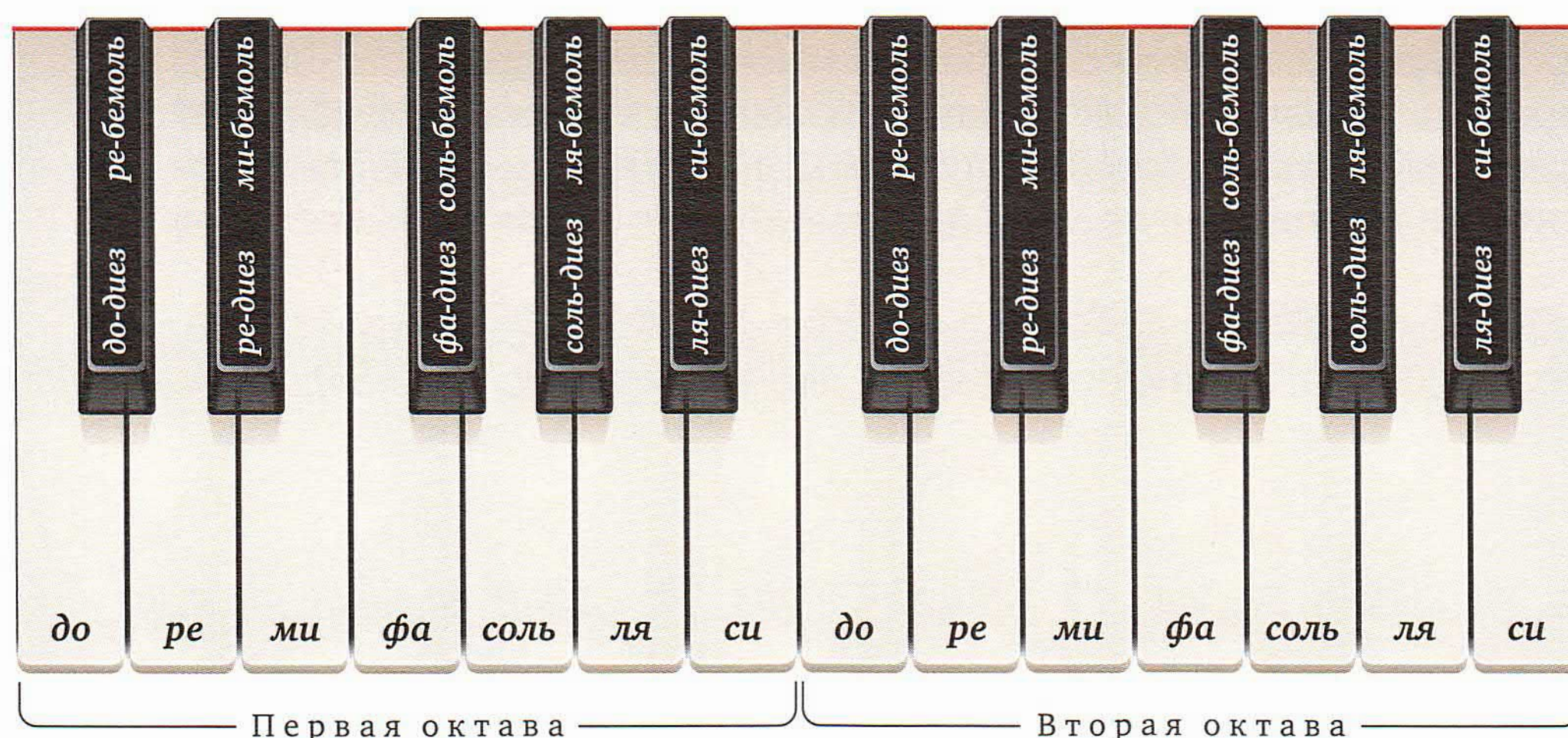


Например, если в цепочке 17 зацеплений и первую шестерёнку вращают со скоростью один оборот в секунду, то и «двадцать лет спустя» последняя шестерёнка не повернётся даже на одну тысячную оборота. Получается, что её можно наглухо закрепить в стене, и это не мешает работе механизма в течение долгих лет! С точки зрения быстротечной человеческой жизни этот пример — иллюстрация бесконечности «практической».

У выражения «растёт в геометрической прогрессии» есть очень близкий по смыслу родственник. Формулу $b_{n+1}=b_1q^n$ можно воспринимать как описание быстрых изменений величины во времени, если считать, что параметр n — это дискретное время, изменяющееся скачками. А в быстро протекающих непрерывных процессах появляются функции вида $y(t)=bq^t$, которые называются экспоненциальными. Отсюда и родственный термин — экспоненциальный рост.

Музыкальный строй

Музыкальный строй — это система сопоставления нот (знаков, обозначений) и звуковых частот. Периодом музыкального строя является октава — интервал между нотами, частоты которых отличаются в два раза. Традиционно октава состоит из 12 ступеней. Например, на клавиатуре рояля она представлена семью основными (белыми) клавишами и пятью дополнительными (чёрными). Применяемый в наши дни музыкальный строй допускает прозрачное и изящное математическое описание.



Появление в первой половине XVIII века сочинения Иоганна Себастьяна Баха «Хорошо темперированный клавир» канонизировало равномерно темперированный строй — музыкальный строй, в котором отношение звуковых частот соседних нот является величиной фиксированной. Будем обозначать это отношение через q (большей частоты к меньшей, $q > 1$).

Таблица частот нот равномерно темперированного строя может быть представлена в виде двусторонней последовательности, в которой соединены две геометрические прогрессии.

В качестве точки отсчёта берётся нота «ля» первой октавы, пусть f_1 — её частота. Правая ветвь последовательности — возрастающая геометрическая прогрессия $\{f_1, f_1q, f_1q^2, \dots\}$, её знаменатель равен q . Левая ветвь — убывающая геометрическая прогрессия $\left\{f_1, \frac{f_1}{q}, \frac{f_1}{q^2}, \dots\right\}$ со знаменателем $\frac{1}{q}$.

Зная, на сколько выбранная нота отстоит от «точки отсчёта», можно выписать формулу, связывающую частоты этих двух нот. Например, для правой ветви элемент геометрической прогрессии с номером n вычисляется по формуле $f_n = f_1 \cdot q^{n-1}$.

По определению октавы $f_{n+12} = 2 \cdot f_n$. С другой стороны, для элементов геометрической прогрессии $f_{n+12} = f_n \cdot q^{12}$. Значит, $f_n \cdot q^{12} = 2 \cdot f_n$, откуда $q^{12} = 2$. Следовательно, для октавы из 12 ступеней равномерно темперированного строя фундаментальной характеристикой, мультипликативным (т. е. по умножению) шагом, определяющим «равномерность» движения по последовательности частот, является число

$$q = \sqrt[12]{2} = 1,059463\dots$$

$\frac{f_1}{q^9}$	$\frac{f_1}{q^8}$	$\frac{f_1}{q^7}$	$\frac{f_1}{q^6}$	$\frac{f_1}{q^5}$	$\frac{f_1}{q^4}$	$\frac{f_1}{q^3}$	$\frac{f_1}{q^2}$	$\frac{f_1}{q}$	f_1	$f_1 \cdot q$	$f_1 \cdot q^2$	$f_1 \cdot q^3$	$f_1 \cdot q^4$	$f_1 \cdot q^5$	$f_1 \cdot q^6$	$f_1 \cdot q^7$	$f_1 \cdot q^8$	$f_1 \cdot q^9$	$f_1 \cdot q^{10}$	$f_1 \cdot q^{11}$	$f_1 \cdot q^{12}$	$f_1 \cdot q^{13}$	$f_1 \cdot q^{14}$
261,63	277,18	293,66	311,13	329,63	349,23	369,99	392,00	415,30	440	466,16	493,88	523,25	554,36	587,32	622,26	659,26	698,46	739,98	784,00	830,60	880	932,32	987,75
до	ре	ми	фа	соль	ля	си	до	ре	ми	фа	соль	ля	си										
Первая октава							Вторая октава																

Фиксация значения частоты ноты «ля» (например, по камертону) полностью определяет частоты всех нот равномерно темперированного строя. В наши дни каноническим вариантом является значение $f_1 = 440$ Гц.

В восприятии человеком мелодии отношение частот звучащих (последовательно или одновременно) нот важнее, чем их абсолютные величины. Именно это обстоятельство привело к осознанной необходимости выбора частот музыкального строя по «мультипликативному» принципу.

Постоянство «мультипликативного» шага у равномерно темперированного строя обусловило его главное преимущество перед историческими предшественниками — возможность «сдвигать» музыкальные мелодии на произвольное число ступеней. При сдвиге фрагмента отношение частот соседних нот остаётся неизменным, а следовательно, сохраняется и мелодический рисунок.

Чистые интервалы

Источником звука могут служить музыкальные инструменты различных типов (струнные, духовые и др.), но с точки зрения математики все способы извлечения звука можно представить с помощью одной, общей для всех них модели — колебаний струны.

Модельным устройством генерации звука можно считать монохорд, в древности служивший не только научным прибором,



но и музыкальным инструментом. Монохорд — это деревянный резонатор, над которым натянута струна, закреплённая в двух

точках. Длину звучащей части струны можно менять с помощью передвигающейся подставки.

Было установлено, что при неизменных характеристиках струны (материал, натяжение) частота её колебаний обратно пропорциональна длине ($f \sim 1/\ell$). Частота — главная математическая характеристика звука, определяющая его восприятие человеком на слух. Получается, что уменьшение длины струны увеличивает частоту её колебаний и, следовательно, высоту звука. Громкость звука связана с другой характеристикой колебаний струны — амплитудой.

В музыке очень важно то, как воспринимает слушатель сочетания звуков. Простейший вариант — пара звуков (музыкальный термин — «интервал»). Опытным путём были найдены приятные для слуха так называемые чистые интервалы.

Например, можно проводить эксперименты с двумя одинаковыми монохордами, один из которых служит эталоном, а на втором — менять длину звучащей части струны.

К чистым интервалам относятся: унисон, октава, квинта, кварта (расположены по убыванию благозвучия). Перечисленные интервалы можно описать, приводя отношения длин струн монохордов,



участвующих в эксперименте: унисон — длина добавочной струны равна длине эталонной, октава — отношение длины добавочной струны к длине основной равно $1/2$, квинта — отношение равно $2/3$, кварта — $3/4$.

А поскольку частота колебаний струны обратно пропорциональна её длине, то приведённые интервалы можно описать так: у октавы частоты звуков отличаются в 2 раза, у квинты — отношение частот добавочной и эталонной струн равно $3/2$, у кварты — $4/3$.

Мы считали, что у колебаний струны есть только одна частота (в дальнейшем будем называть её основной), но так дело обстоит только в идеальной модели. В зависимости от свойств струны к основному звуку неизбежно добавляются дополнительные звуки — обертоны.

Наблюдаемые колебания струны с закреплёнными концами можно представить как результат наложения так называемых стоячих волн с незакреплёнными, но неподвижными точками (узлами) и однотипными колебаниями равных по длине участков между узлами.

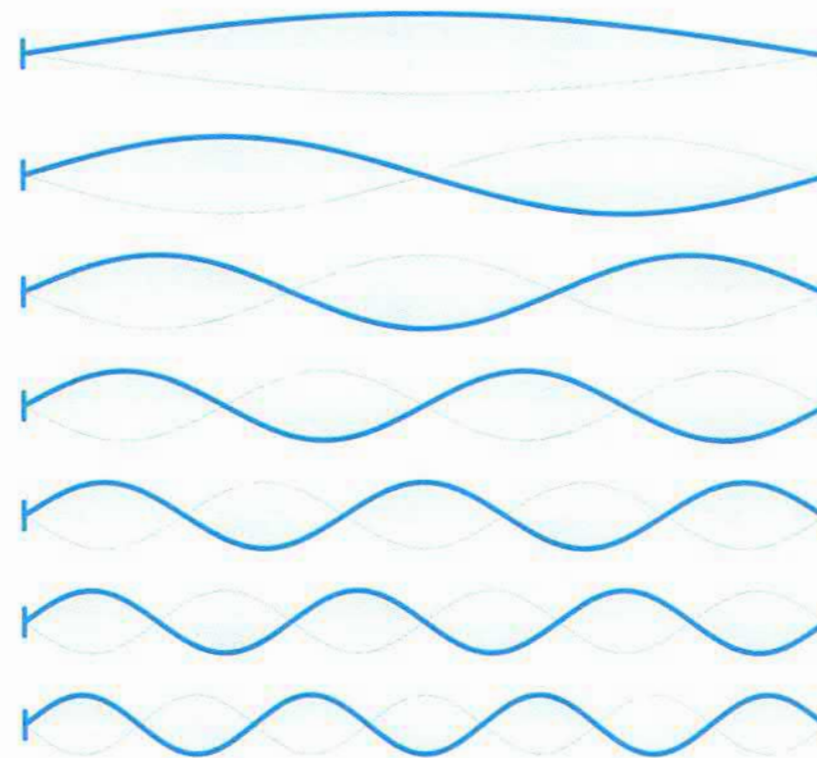
Основной тон (определяемый значением f — основной частотой струны) представляет стоячую волну без узлов, неподвижны только концы струны.

Первый обертон (т. е. первый «верхний тон») — стоячая волна с единственным узлом в середине струны. Фактически происходят колебания двух одинаковых струн половинной длины, частота колебаний этих «половинок» — $2f$. Второй обертон — стоячая волна с двумя узлами, которые делят струну на три равные части. Частота звука, порождаемого колебаниями каждой из трёх частей, втрое больше частоты полной струны.

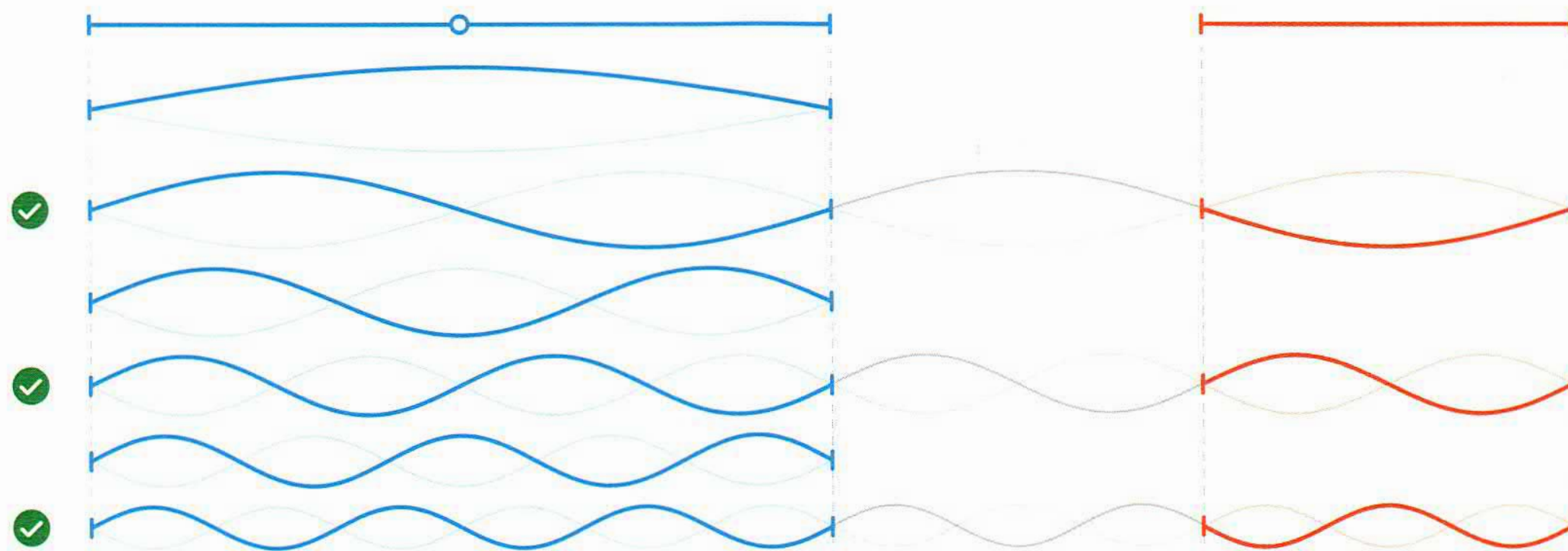
В общем случае у обертона с номером n имеется n неподвижных узлов, которые делят струну на $(n + 1)$ равных частей. Частота этого обертона равна $(n + 1)f$. Полным набором частот реальной струны будет $\{f, 2f, 3f, 4f, \dots\}$.

Звучание струны, её тембр, складывается не только из набора частот, но и из соотношения громкостей обертонов. Громкости обертонов ниже, чем громкость основного тона, и убывают с возрастанием номера обертона. «Природная» согласованность основного тона и обертонов приводит и к согласованности совместного звучания, наилучшие результаты — у обертонов с небольшими номерами. Взаимодействие основного тона и обертонов оказывается полезным при изучении того, почему благозвучны, хотя и в разной степени, чистые интервалы. Можно предложить такое объяснение.

У одинаковых струн один и тот же тембр, поэтому звучат они неразличимо (унисон). При изучении модели «одинаковость» — вещь понятная и достижимая. Но в реальной музыкальной жизни у «одинаковых» струн частотные наборы совпадают, а громкости обертонов могут чуть-чуть отличаться. Следовательно, их тембры близки, но не совпадают. Совместное звучание таких инструментов тоже будет унисоном, но интереснее, чем у каждого из них в отдельности, тембр — богаче.



В октаве длины струн отличаются в два раза, и если набор частот у большей струны $\{f, 2f, 3f, 4f, \dots\}$, то у половинной струны — $\{2f, 4f, 6f, 8f, \dots\}$. Второй набор является частью первого, что объясняет согласованность звуков в октаве — они воспринимаются как похожие, хотя и отличаются по высоте.



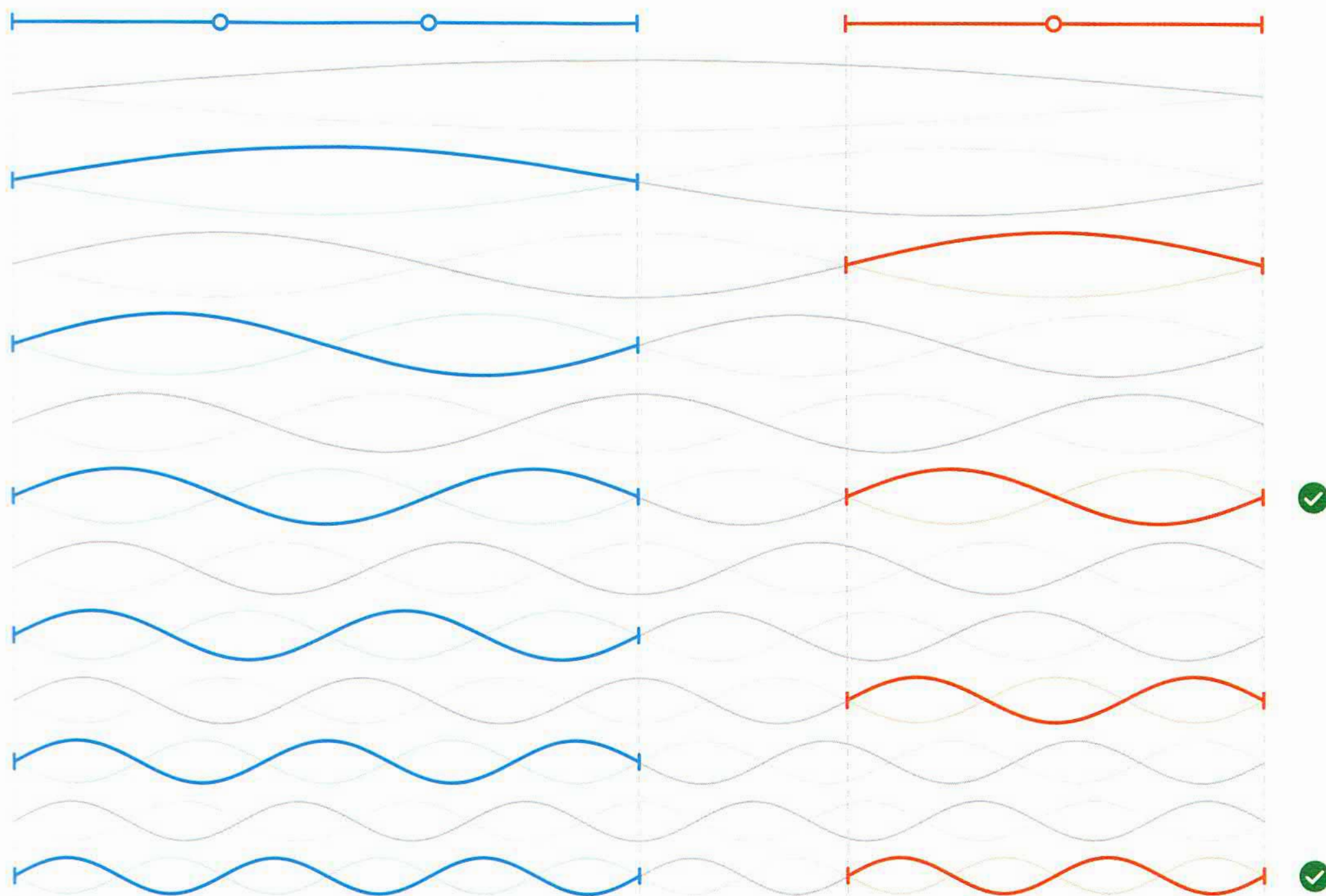
В отличие от унисона, в октаве громкость (амплитуда) меняется только у «чётных» обертонов большей струны, а у её основного тона $\{f\}$ и «нечётных» обертонов $\{3f, 5f, 7f, \dots\}$ — не меняется.

Перейдём к квинте. Если $\{f, 2f, 3f, 4f, \dots\}$ — частотный набор струны длины ℓ , то $\left\{ \frac{3}{2}f, 2 \cdot \frac{3}{2}f, 3 \cdot \frac{3}{2}f, \dots \right\}$ — частоты струны длины $\frac{2}{3}\ell$. Видно, что даже основной тон малой струны $\frac{3}{2}f$ не входит в число обертонов большей струны. Следовательно, рассмотренный подход, объяснивший благозвучие октавы, непосредственно на квинту не переносится.

Но при восприятии звуков происходит их сопоставление, сравнение, в первую очередь — основных тонов. И возникает воображаемая «объединяющая» струна длины 2ℓ , в частотный набор которой $\left\{ \frac{f}{2}, 2 \cdot \frac{f}{2}, 3 \cdot \frac{f}{2}, \dots \right\}$ погружаются и основные тоны струн ℓ и $\frac{2}{3}\ell$, и даже все их обертоны.

Важно, что длина «объединяющей» струны — 2ℓ , что относительно близко к длинам струн квинты. Длина 2ℓ — наименьшая, в которую целое число раз укладываются отрезки длины ℓ и длины $\frac{2}{3}\ell$, можно сказать, это их наименьшее общее кратное. Следствием близости числа 2ℓ к ℓ и $\frac{2}{3}\ell$ является то, что основные тоны струн квинты оказываются обертонами струны 2ℓ с небольшими номерами, т. е. являются благозвучными и «заметными» игроками в тембре объединяющей струны.

Включение частот обеих струн квинты в гармоничный мир обертонов объединяющей струны вызывает у слушателя ощущение благозвучности и согласованности.



С другой стороны, при восприятии звуков происходит и прямое сопоставление частот струн квинты: $\{f, 2f, 3f, 4f, \dots\}$ у струны ℓ , $\left\{\frac{3}{2}f, 2 \cdot \frac{3}{2}f, 3 \cdot \frac{3}{2}f, \dots\right\}$ у струны $\frac{2}{3}\ell$.

Все «чётные» обертоны малой струны являются обертонами большей, а основной тон и все «нечётные» обертоны малой струны — нет. Эти «непарные» тоны малой струны — причина того, что гармония становится неполной: квинта благозвучна, но уступает октаве.

Анализ звучания кварты проводится аналогично. Для струн длиной ℓ и $\frac{3}{4}\ell$ длина объединяющей струны возрастёт и будет равна 3ℓ . Результат — кварта является чистым интервалом, но звучит менее гармонично, чем квинта.

Описание звука струны как композиции основного тона и обертонов математически означает представление периодической функции суммой гармоник $\sin nx$, $\cos nx$. Эта сумма может быть «внешне» совсем непохожей на гармоники-составляющие. Из простых по звучанию тонов складывается богатый, выразительный тембр звука.

→ 331

Шкала ощущений

Слово «логарифм» читателю знакомо, известны ему также логарифмическая функция и логарифмическая линейка. Зато может удивить то, что человек, оценивая параметры внешних раздражителей, зачастую подсознательно их логарифмирует. Например, так происходит с громкостью звука и яркостью света.

В XIX веке на основе многочисленных опытов был сформулирован закон Вебера—Фехнера. В нём изменения ощущений человека количественно связаны с изменением внешних раздражителей. В частности, было установлено, что человек оценивает изменение громкости звукового воздействия в относительной шкале: важно не абсолютное значение «новой громкости», а его отношение к значению «начальной громкости». Получается, что организм человека настроен природой на восприятие изменений «в разы» (скажем, он чувствует рост в 1,2 раза), а не «на сколько-то».

Например, в экспериментах Вебера было обнаружено, что если добавить к 60 горящим свечам ещё одну, то наблюдатель заметит изменение яркости. А при 120 горящих свечах изменение яркости будет замечено только при добавлении двух свечей.

Обычно создание шкалы величин основывается на «аддитивном» принципе: сколько шагов длины a надо сделать, чтобы пройти расстояние b ? Иначе говоря, сколько раз надо сложить с собой a , чтобы получить b ? А можно использовать «мультипликативный» принцип: сколько раз надо умножить на себя величину a (в какую степень надо возвести a), чтобы получить b ?

Второй подход приводит к понятию логарифма: по определению $\log_a b = m$, если $a^m = b$. В термине «логарифм» один из создателей логарифмов Джон Непер, математик и астроном, соединил два слова из древнегреческого: $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ — отношение (в нашем, «мультипликативном» смысле) и $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ — число.

Одним из основных свойств логарифмов является следующее:

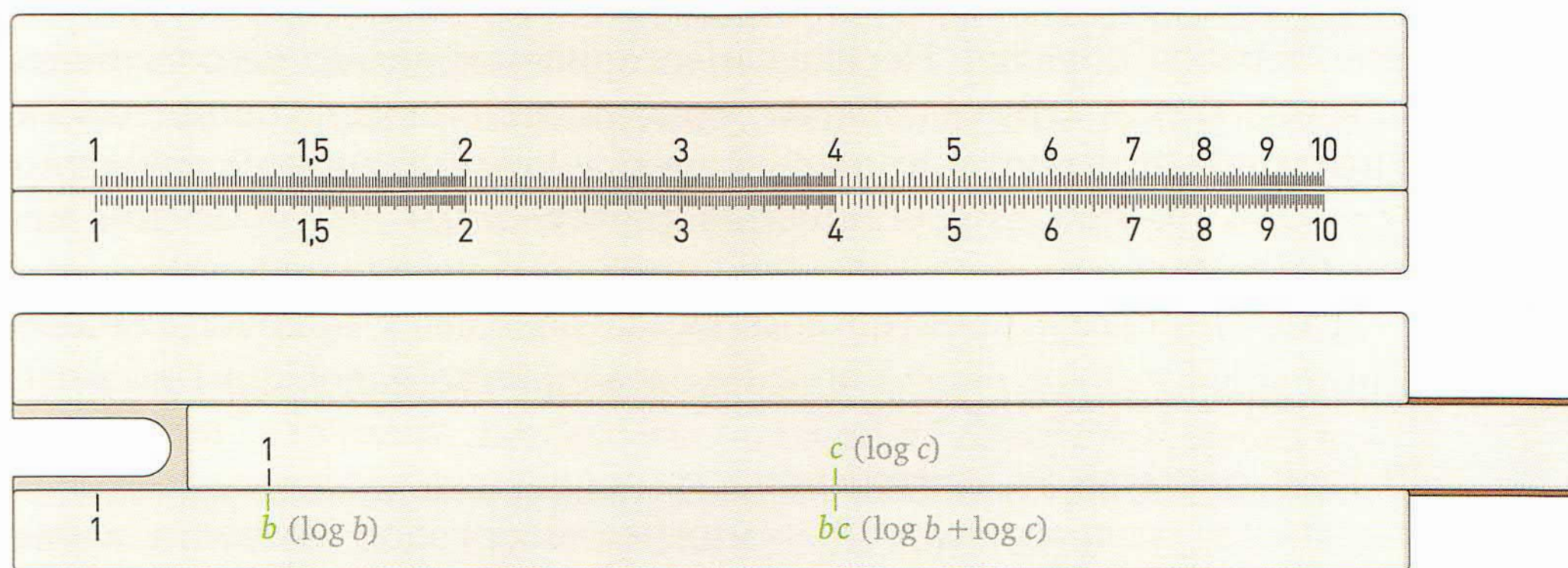
$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$$

Это соотношение устанавливает связь между операциями сложения и умножения — логарифм произведения равен сумме логарифмов. Сложение — более простая, более «быстрая» операция, чем умножение, а приведённое свойство позволяет свести вычисление произведения чисел к сложению их логарифмов.

Исторически первая вычислительная роль логарифмов была связана с этим свойством. Если у вычислителя есть таблица, в которой «подробно», с малым шагом, представлены числа и их логарифмы (по фиксированному основанию, например, при $a = 10$), то вычисление произведения bc распадается на последовательность несложных шагов. В таблице находим числа b и c (или близкие к ним), определяем по таблице их логарифмы, складываем эти логарифмы и по таблице подбираем число, логарифм которого близок к найденному значению. Появление такого способа приближённого умножения было особо оценено астрономами, работавшими с «астрономически» большими числами.

x	$\log x$
b	$\log b$
c	$\log c$
bc	$\log b + \log c$

«Механическая» реализация этой идеи, заменяющая работу с напечатанными таблицами, — логарифмическая линейка. Основа конструкции — две прилегающие и скользящие вдоль друг друга линейки с одинаковыми логарифмическими шкалами. Это означает, что на линейках штрихами обозначены логарифмы (десятичные) чисел, но в подписях к штрихам указаны сами числа, а не их логарифмы. Таким образом, на каждой линейке представлена таблица логарифмов. Относительное перемещение частей линейки механически складывает «штрихи-логарифмы», а цифровые подписи позволяют переходить от чисел к логарифмам и обратно.



С помощью логарифмической линейки можно не только умножать числа, но и делить их, а дополнительные шкалы линейки позволяют возводить в степень и извлекать корни, находить значения специальных функций (в частности, тригонометрических). Простота конструкции и удобство в использовании сделали логарифмическую линейку главным вычислительным инструментом учёных и инженеров докомпьютерной эпохи.

Ещё одно важное свойство логарифмов, объясняющее их особую роль в вычислениях и аналитических исследованиях: логарифм большого числа намного меньше самого числа. Например, число атомов в наблюдаемой части Вселенной оценивается как 10^{80} — огромное число. А десятичный логарифм этого числа вполне «осязаем»: 80.

У быстро растущих функций, таких как $y = 10^{kx}$, есть несколько неприятных особенностей. Во-первых, при больших значениях x график функции так быстро убегает вверх, что и на книжной странице, и на экране монитора от него останется лишь небольшой, узкий кусочек, а остальная часть окажется вне страницы или экрана. Во-вторых, в повседневной жизни человек редко сталкивается с большими изменениями чего-либо за небольшое время, исторически к этому не подготовлен (катастрофы типа извержений вулканов или землетрясений — редкие исключения). Неудивительно, что при встрече с резкими перепадами значений показательной функции ($y = a^x$) возникает желание сгладить эти перепады, заменить функцию более «спокойной», пологой. По обоим приведённым причинам удобно от функции $y = 10^{kx}$ перейти к функции $z = \lg y = kx$.

В естествознании многие законы записываются с использованием показательных функций. Подобные формулы возникают, если закон относится к процессу, в математическом описании которого основную роль играют линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Переход к логарифмам делает запись таких законов более «дружелюбной», график линейной функции $z = kx$ (прямая) не просто проще графика показательной функции $y = 10^{kx}$, его простота становится действенным инструментом исследования.

Рассмотренное понятие логарифма позволяет привести аналитическую формулировку закона Вебера—Фехнера: $S = k \lg \frac{P}{P_0}$.

В этой формуле S — интенсивность ощущения человека, P — сила внешнего раздражителя, P_0 — нижнее пороговое значение силы раздражителя (т. е. при $P < P_0$ раздражитель не воспринимается, ощущений нет), k — константа.

Получается, и мы об этом уже говорили, что человек воспринимает изменение силы внешнего воздействия в разы (для логарифмов этих величин — «на сколько-то»). Универсальность закона Вебера—Фехнера приводит к необходимости использования шкалы, в которой главная характеристика — не абсолютные значения величин, а их отношение.

В частности, этим законом описывается и то, как человек воспринимает звуковое воздействие. Поэтому логарифмическая шкала становится естественной. Другой довод в пользу этой шкалы — широкий диапазон значений воспринимаемых человеческим ухом громкостей: отношение громкостей максимального «безопасного» для человека звука и минимального из воспринимаемых равно 10^{15} . Сравнивать абсолютные значения при столь гигантском разбросе неудобно, в отличие от сравнения в логарифмической шкале, устроенной по мультипликативному принципу. Говорят, что две громкости отличаются на 1 бел, если отношение громкостей равно 10, т. е. $\frac{P_2}{P_1} = 10$, $\lg \frac{P_2}{P_1} = 1$ (бел). На практике чаще используется более мелкая единица — децибел, равная 0,1 бел.

В физике и технике идея подобного «сравнительного» измерения одноимённых величин широко применяется (громкость, яркость, мощность, энергия и др.). Для создания шкалы в таких измерениях удобно выделить базовый, опорный уровень. Например, при измерении звука опорный уровень P_0 — это минимальная для слуха пороговая величина.

Перевод кратного изменения громкости в аддитивную шкалу в децибелах (логарифмирование) позволяет создать на звуковоспроизводящем устройстве удобную регулировку: изменение громкости в определённое число раз независимо от исходной громкости реализуется поворотом ручки на постоянный угол или передвижением ползунка на постоянное расстояние.

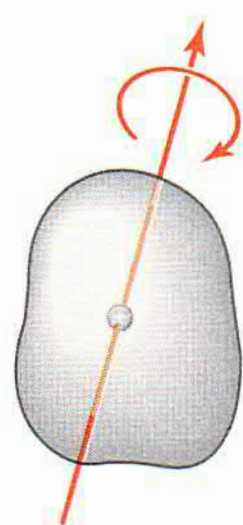
Яркость световых раздражителей человек также воспринимает «логарифмически». Поэтому регулировку настроек фотоаппарата тоже можно сделать на основе равномерной шкалы. Каждая ступень экспозиции фотоаппарата меняет количество излучения, которое попадает на светочувствительный элемент (матрицу или фотоэмульсию) в два раза. Ступень выдержки меняет в два раза время экспозиции, а ступень диафрагмы — площадь отверстия, через которое свет попадает на матрицу. Т. е. обе шкалы устроены «мультипликативно», их значения образуют геометрическую прогрессию. Логарифмы этих величин образуют уже арифметическую прогрессию, что позволяет расположить засечки шкалы диафрагмы равномерно. Если бы шкала не была равномерной, то пользоваться кольцом диафрагмы было бы неудобно — переходы от ступени к ступени отличались бы углами поворота кольца.

Итак, с помощью логарифмов можно не только описать нашу способность «логарифмировать» ощущения, но и проектировать удобные и полезные устройства.

Ориентация в трёхмерном мире

Ориентация, ориентироваться — эти слова связаны с определением положения объекта относительно сторон света (латинское *oriens* — восток), более широко — в некоторой системе координат. Задача управления ориентацией возникает и для реальных объектов (космические аппараты, самолёты, корабли, беспилотные устройства), и для виртуальных (например, в компьютерных играх). Во всех случаях изменение ориентации — результат движения тела в пространстве.

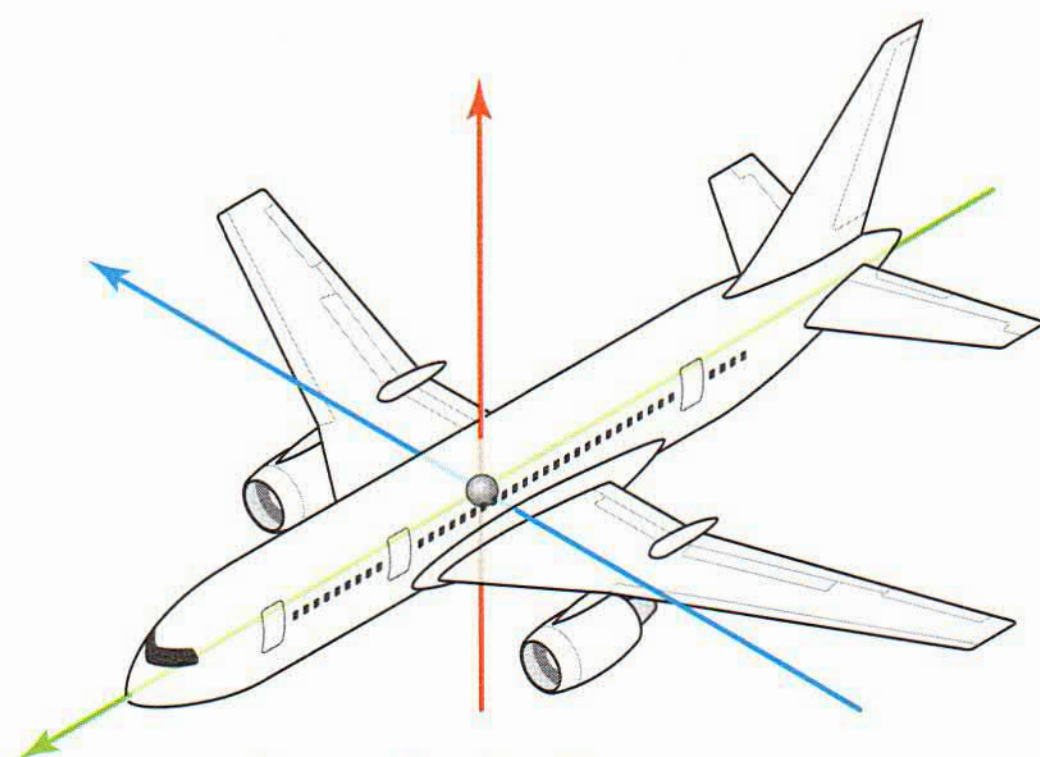
Рассмотрим задачу с математической точки зрения. Сначала разберёмся в структуре движения, узнаем, из каких элементов оно состоит.



Великий Леонард Эйлер доказал, что если движение (твёрдого) тела имеет неподвижную точку, то это поворот тела вокруг некоторой оси. Неподвижными оказываются все точки данного объекта, лежащие на этой оси!

Если тело вращается вокруг оси, которая не имеет с ним общих точек, то неподвижных точек нет (тело «летает» вокруг оси по кругу подобно кордовой модели самолёта). Ещё один пример движения без неподвижных точек — параллельный перенос. В начале XIX века было установлено, что любое движение тела — композиция (последовательное выполнение) переноса и поворота, ось которого параллельна направлению переноса.

Говоря об ориентации твёрдого тела, можно считать, что есть неподвижная точка (например, центр масс). В этом случае по теореме Эйлера набор движений сводится к поворотам, каждый задаётся осью и углом. Технически описать повороты можно разными способами. Самые популярные инструменты — углы Эйлера и кватернионы.



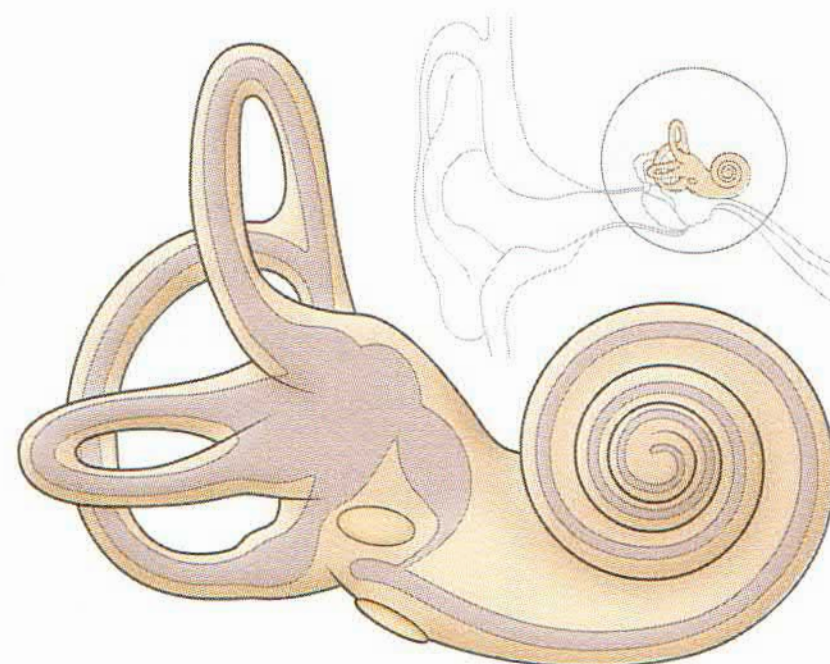
(корабля): Ox — ось движения, Oy — перпендикулярная плоскости крыльев (палубы) ось, Oz — ось, перпендикулярная плоскости Oxy .

Углы Эйлера представляют поворот тела как результат трёх последовательных вращений вокруг координатных осей, связанных с телом. В приложениях и в теоретической механике разработаны различные реализации этой идеи.

Например, в авиации и в морском деле традиционно используется система координат, оси которой естественно связаны с корпусом самолёта

Поворот (ориентация) самолёта или корабля определяется тремя последовательными вращениями вокруг оси Ox , вокруг оси Oy , вокруг оси Oz (углы поворотов относительно этих осей называются крен, рыскание, тангаж). Порядок поворотов важен, поскольку перестановка двух вращений может изменить результат. Данную модификацию углов Эйлера обычно связывают с именем математика и кораблестроителя А. Н. Крылова.

Применение углов Эйлера популярно в силу наглядности и удобства управления этими параметрами. Да и в природе такое решение уже существует. За ориентацию в пространстве у человека отвечает вестибулярный аппарат, «антенны» которого называются полукружными каналами — три кругообразные дуги в каждом ухе, расположенные во взаимно перпендикулярных плоскостях.



То, что углов Эйлера мало, всего три, конечно, удобно. Но это обстоятельство является и недостатком: можно доказать, что для математически «правильного» представления поворотов в трёхмерном пространстве трёх параметров не хватает. Следствием этих математических нестыковок являются проблемы практические, возникающие при использовании углов Эйлера.

Серьёзные трудности могут возникнуть в стандартной задаче управления ориентацией. В неподвижной системе координат (которую «хранит», например, бортовой гироскоп) задаются начальное и конечное положение объекта, а изменению ориентации надо сопоставить углы Эйлера. Такое соответствие должно быть однозначным и устойчивым. А как раз эти свойства могут оказаться под угрозой при некоторых заданных начальном и конечном положениях. Одна из подобных проблем носит название «складывание рамок» (происходит от термина из теории гироскопов). Поясняющий пример: вы следите за приближающейся стаей птиц, и когда она оказывается прямо над вашей головой, придётся резко повернуться, потому что запрокинуть голову дальше не удастся.

Процессы изменения ориентации, задаваемые углами Эйлера, обладают и другими неприятными свойствами, пусть и не катастрофическими. Разделённо-последовательное вращение вокруг трёх осей приводит к движениям, далёким от оптимальных, экономичных. В технике, скажем при управлении космическими аппаратами, будет перерасход горючего и увеличится время выполнения задания. А в анимационном фильме его герои предстанут комично-роботизированными существами с неестественными движениями.

Кватернионы — это алгебраические объекты, которые «приходят» из четырёхмерного мира и дают возможность представить движения точек мира трёхмерного как результат чисто арифметических действий с участием координат.

Вначале рассмотрим аналогичный, но более простой пример: задачу «алгебраизации» движений на плоскости.

Точки плоскости, т. е. пары вида $(a; b)$, «становятся» комплексными числами — традиционное обозначение $a+bi$ — после введения операций сложения (покоординатного) и умножения (в соответствии

\times	1	i
1	1	i
i	i	-1

с таблицей умножения элементов базиса $\{1, i\}$). Элемент i , называемый мнимой единицей, оправдывает своё название тем, как ведёт себя его квадрат: $i^2 = -1$. Оказывается, что параллельный перенос плоскости — это «прибавление» к каждому комплексному числу некоторого фиксированного комплексного числа, а поворот плоскости вокруг начала координат — умножение каждого комплексного числа на

фиксированное число $a+bi$, у которого $a^2 + b^2 = 1$ (модуль равен единице). Известно, что любое движение плоскости (не меняющее ориентации) является композицией параллельного переноса и поворота вокруг некоторой фиксированной точки (например, начала координат). Поэтому появляется возможность представления движений плоскости как алгебраических действий над комплексными числами. С этой точки зрения становится геометрически наглядной формула $i^2 = -1$: умножение на i — это поворот на угол 90° , следовательно, i^2 переводит произвольную точку z в $(-z)$, т. е. $i^2 z = -z$, или $i^2 = -1$.

Великий российский математик и замечательный популяризатор науки Владимир Игоревич Арнольд и на лекциях, и в книгах подчёркивал важность геометрического понимания такого подхода. Он писал: «Комплексные числа — математический аппарат для описания движений плоскости».

Одним из создателей теории комплексных чисел был ирландский математик Уильям Гамильтон. Следующим шагом стала естественная попытка «превратить в числа» и точки трёхмерного пространства так, чтобы эти «числа» играли в трёхмерной геометрии ту же роль, что и комплексные числа на плоскости.

Несмотря на многолетние усилия, такую теорию создать не удалось. Позднее было доказано, что в трёхмерном мире это в принципе невозможно.

Но размышления над трёхмерной задачей не были бесплодными: они привели Гамильтона к решению проблемы для четырёхмерного пространства — к созданию теории кватернионов.

Формально кватернион — это четвёрка действительных чисел $(a; b; c; d)$, которую по традиции записывают в виде $q = a + bi + cj + dk$. Эту запись можно воспринимать как разложение четырёхмерного вектора по базису $\{1, i, j, k\}$ (в отличие от комплексных чисел, здесь одна «обычная» единица и целых три мнимых!). Кватернионы можно складывать — по координатам. А если удастся придумать согласованные правила умножения базисных векторов, то появится алгебра кватернионов.

Таблица умножения мнимых базисных кватернионов и есть открытие Гамильтона. Главным условием согласованности, корректности правил умножения является цепочка формул $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, которая впервые была нацарапана Гамильтоном на каменном мосту в Дублине. Правило чтения таблицы: в клетке стоит произведение элемента из строки на элемент из столбца, например, $ij = k$, $ji = -k$. Видно, что произведение кватернионов зависит от порядка сомножителей.

\times	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	j
j	j	$-k$	-1	i
k	k	$-j$	$-i$	-1

Именно это непривычное свойство кватернионов объединяет их с движениями в трёхмерном пространстве. Но чтобы использовать это сходство, сопоставить кватернионы движениям, придётся сделать ещё один шаг — «выйти» из нашего трёхмерного мира в четырёхмерный.

Оказывается, если обычную точку $(x; y; z)$ записать как мнимый кватернион $p = (0; x; y; z)$, то параллельный перенос точки описывается сложением с фиксированным мнимым кватернионом, а поворот связан с умножением p на кватернион, в координатах которого «заложена» информация об оси и угле поворота (вспомним теорему Эйлера!). В обоих случаях p переходит в чисто мнимый кватернион, три последние координаты которого — координаты точки, в которую переводит точку $(x; y; z)$ данное движение.

Описание последовательности движений сводится к выполнению цепочки алгебраических действий над кватернионами. Выполнение двух переносов (их «сумма») — это добавление суммы соответствующих кватернионов. Если q_1 и q_2 — кватернионы, сопоставленные двум вращениям, то произведение $q_2 q_1$ будет задавать композицию этих вращений, их «произведение». В свою очередь, алгебраические операции с кватернионами — простые, так как сводятся к чисто арифметическим действиям с их компонентами, обычными числами.

Одно из важных преимуществ кватернионов перед углами Эйлера — на этом языке легко найти и описать оптимальную траекторию для изменения ориентации тела в пространстве.

Спутниковая навигация

Представление о том, что ваш GPS- или ГЛОНАСС-приёмник получает ваши же координаты от находящихся на орбите спутников, — ошибочно. Во-первых, спутники их просто не знают, во-вторых, свои сообщения спутники не персонифицируют и отправляют «в пространство», сразу всем, а не только вашему приёмнику. Как же тогда навигатор определяет ваши координаты?

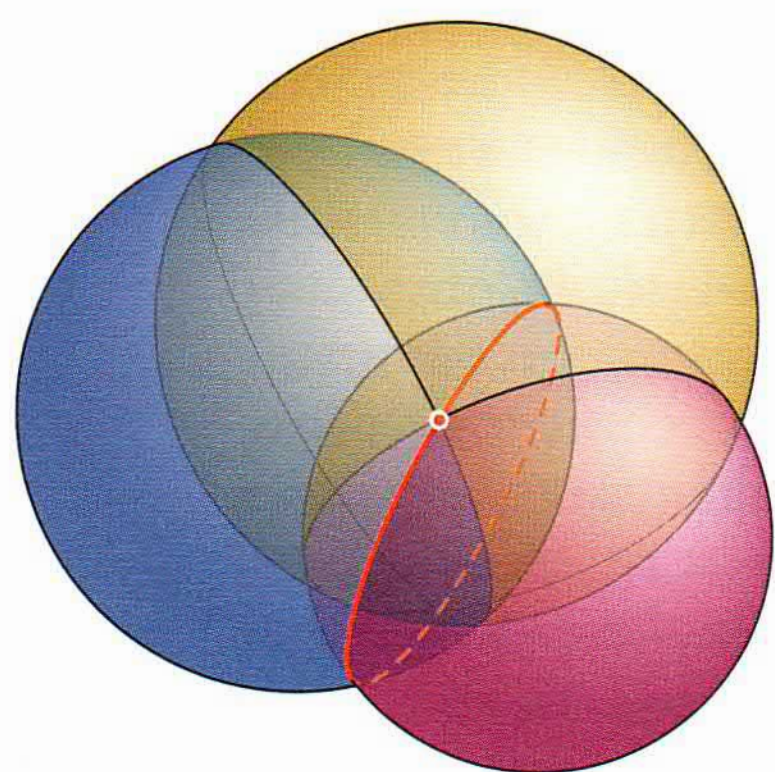
В спутниковой навигационной системе можно выделить два основных сегмента: космический и управленческий. Космический сегмент — созвездие спутников, равномерно расположенных вокруг Земли. Управленческий сегмент, находящийся на Земле, обеспечивает, в частности, синхронизацию на всех спутниках «общесистемного» времени и использование единой системы координат.

Каждый спутник постоянно передаёт навигационные сообщения, содержащие, в частности, координаты спутника в момент отправки сообщения и время отправки.

Приёмник, получивший такое сообщение, может рассчитать расстояние до спутника: $d = (t^{(\text{пр})} - t^{(\text{отпр})})c$.

В этой формуле время прохождения сигнала (от времени отправки $t^{(\text{отпр})}$ до времени приёма $t^{(\text{пр})}$) умножается на скорость распространения радиосигнала, т. е. скорость света c .

С другой стороны, если в прямоугольной декартовой системе координат ваши координаты равны $(x; y; z)$, а координаты спутника в момент отправки сообщения были равны $(x_1; y_1; z_1)$, то квадрат расстояния d_1 равен $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$.



Если приёмник одновременно получит навигационные сообщения ещё от двух спутников, то сможет найти ваши координаты $(x; y; z)$, решив систему из трёх уравнений

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d_1^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = d_2^2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = d_3^2, \end{cases}$$

где $(x_i; y_i; z_i)$ — координаты i -го спутника, а d_i — расстояние до него.

Геометрическая интерпретация этой системы такова. Сообщение от одного спутника выделяет часть пространства, в которой вы находитесь, — сферу, определяемую её центром-спутником и радиусом. Информация

от второго спутника — ещё одна сфера. Пересечение этих двух сфер, вообще говоря, — окружность. Сообщение от третьего спутника добавляет ещё одно ограничение — ещё одну сферу — и уже однозначно определяет ваши координаты. То, что все три сферы имеют общую точку, следует из самого составления системы. Из двух «формальных» решений (пересечение окружности и третьей сферы) одно — неправдоподобно, второе — ваши координаты.

Описанная схема спутниковой навигационной системы — упрощённая, реальность заставляет использовать более сложную модель. Например, рассмотренная схема очень чувствительна к погрешностям, одна из главных проблем — влияние точности хода часов навигатора, который не имеет возможности связываться с наземными станциями навигационной системы для корректировки времени. Представьте что часы отстают от общесистемного времени на 0,001 с. Скорость света равна $c = 300\,000$ км/с, таким образом, в определении расстояний до спутников (радиусов сфер) получится ошибка в 300 км! Выписанная система, если и будет иметь решение, то не относящееся к вашему местоположению...

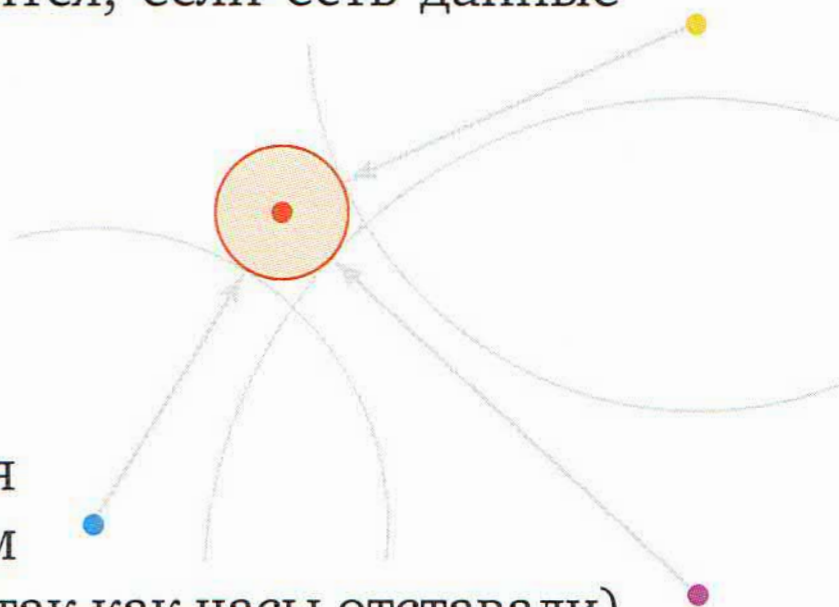
К счастью, подобная проблема преодолима, причём даже в том случае, когда точность хода часов нам неизвестна. Допустим, что часы приёмника отстают от общесистемного времени на (неизвестную нам) величину δ , и их показания в момент получения сообщения — $t^{(\text{пр})}$. Навигатор будет «считать», что расстояние до спутника равно $d = (t^{(\text{пр})} - t^{(\text{отпр})})c$, что меньше истинного расстояния $d + \delta c$.

Чтобы найти координаты $(x; y; z)$ и новую неизвестную $r = \delta c$, необходимо ещё одно уравнение, оно появится, если есть данные от четырёх спутников:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (d_1 + r)^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = (d_2 + r)^2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = (d_3 + r)^2, \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = (d_4 + r)^2. \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация решения задачи такова. Приёмник является центром сферы радиуса r , которая внешним образом (так как часы отставали) касается четырёх сфер радиусов d_i , центры которых — спутники. Такая сфера существует, а её центр — ваше местоположение. (На рисунке изображён двумерный вариант этой задачи: окружность радиуса r внешним образом касается трёх окружностей.)

Вычислив координаты по этой системе, навигатор в качестве дополнительного «бонуса» получает значение общесистемного времени, корректирует свои часы и сообщает вам точное время!



Полярный день

Земля движется вокруг Солнца и одновременно вращается вокруг своей оси, наклонённой к плоскости орбиты. Смена времён года происходит из-за этого наклона, а смена дня и ночи — следствие вращения Земли вокруг оси. Но наличие наклона оси в некоторых частях Земли разрушает привычное чередование дней и ночей. К полюсам примыкают шапочки, в которых наблюдаются полярные дни и полярные ночи — периоды длиной в несколько суток, когда Солнце не опускается за горизонт или не поднимается над горизонтом.

Чтобы понять происхождение полярных дней, посмотрим на Северное полушарие Земли в летние месяцы. Траектория любой точки при

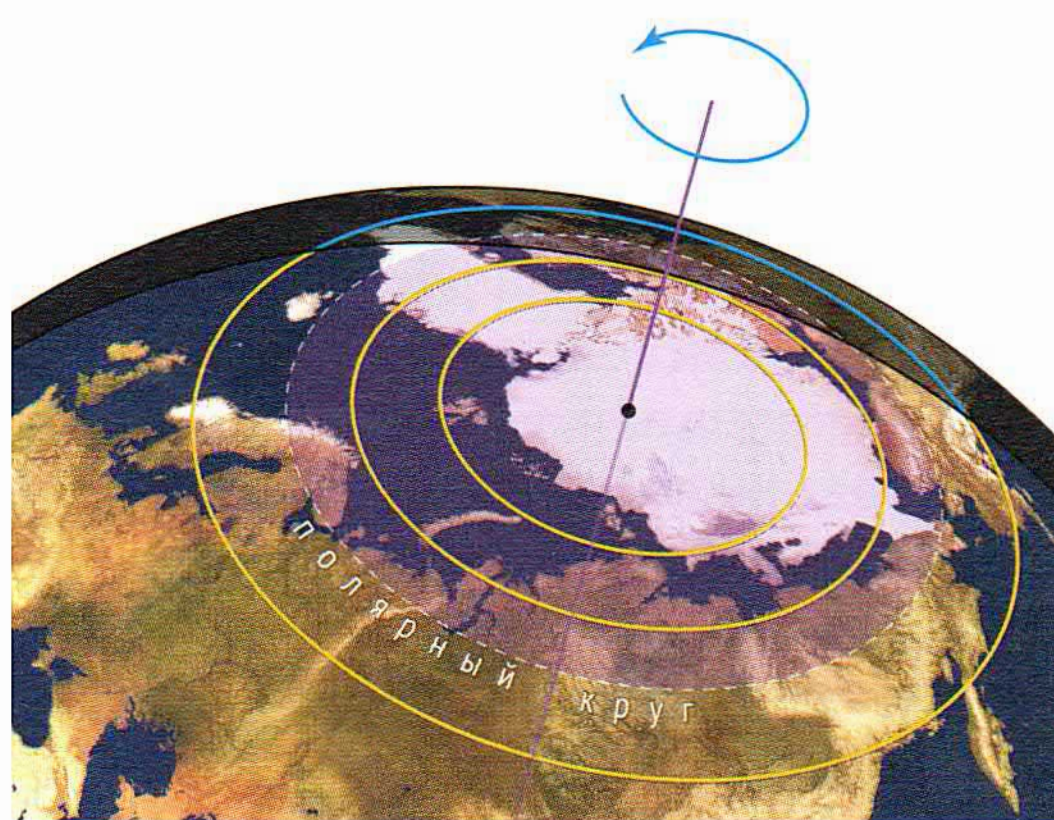
суточном вращении Земли будет окружностью, перпендикулярной оси. А если точка близка к Северному полюсу, то все точки этой окружности будут освещены, т. е. на достаточно высокой широте Солнце будет светить и день, и ночь.

Если окружность раздувать, то она коснётся терминатора — линии, разделяющей освещённую и неосвещённую полусферы. Название происходит от латинского *terminus* — граница, был в Древнем Риме и почитаемый бог границ и межевания Термин.

А для точек ниже этой окружности суточная траектория будет проходить, и по освещённой и по неосвещённой частям, т. е. смена дня и ночи вернётся.

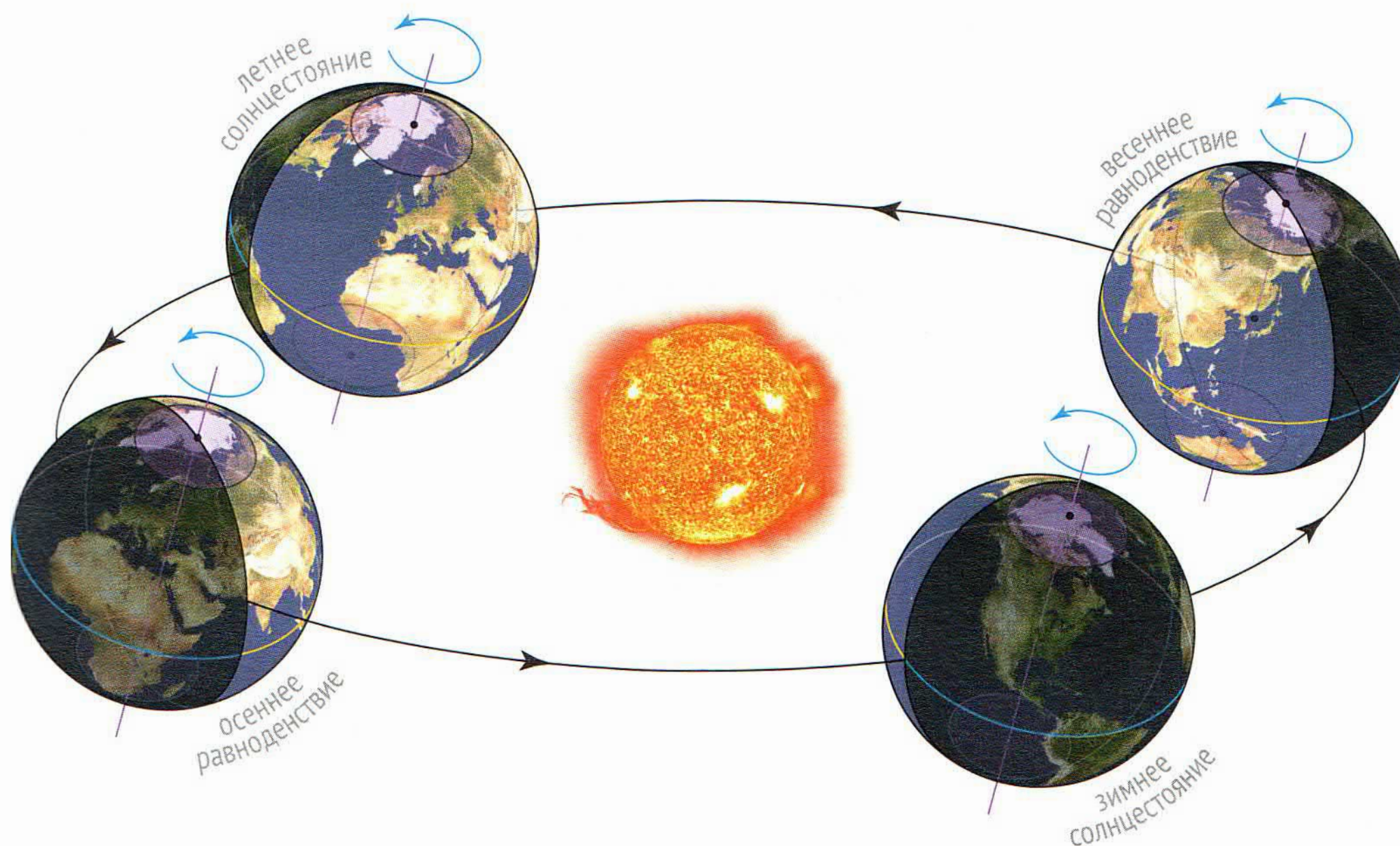
Теперь можно сформулировать и конкретные вопросы. Например, в каких широтах наблюдается полярный день и сколько суток он длится? Но главная задача — определение длительности светового дня на данной широте в какой-то день года по его порядковому номеру. Решение задачи будет предъявлено, но сначала стоит описать движение Земли вокруг Солнца.

Анализируя годовое движение Земли по орбите, будем считать, что ось Земли остаётся параллельной самой себе и всё время направлена на «бесконечно далёкую» Полярную звезду — в наши дни это α Малой Медведицы. Угол ε между осью и нормалью к плоскости орбиты постоянен и равен $\varepsilon = 23^\circ 26'$.



Это движение — периодическое, внутри периода выделяют четыре точки, которые делят год на четыре равные части.

Дни весеннего и осеннего равноденствия геометрически можно определить как моменты, когда ось вращения оказывается в плоскости терминатора. Из этого вытекает житейски привычное определение дней равноденствия: в любой точке Земли, на любой широте продолжительность дня равна продолжительности ночи.



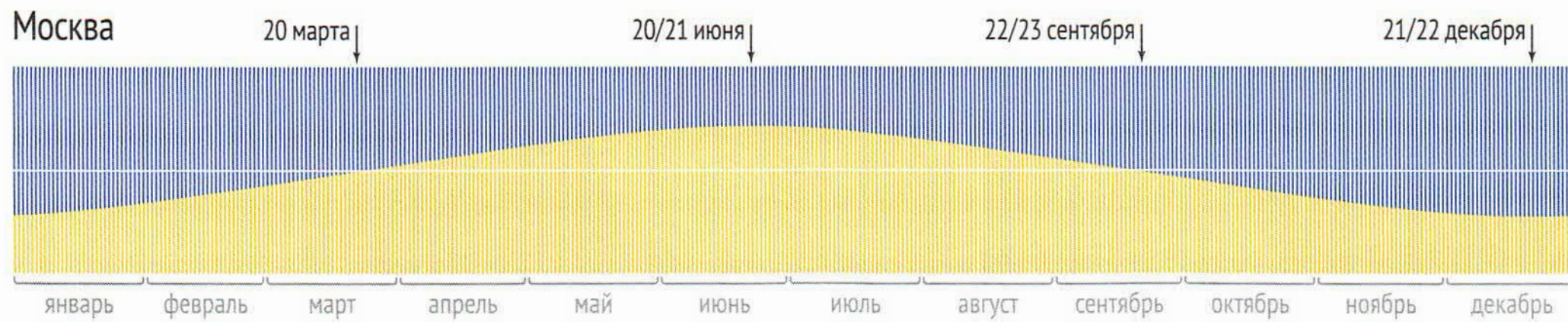
Дни летнего и зимнего солнцестояния — моменты, когда ось Земли максимально отклонена от плоскости терминатора; продолжительность дней и ночей — экстремальна. Шапочки полярных дней и ночей становятся максимальными, их границы, широтные окружности, называются, соответственно, Северным и Южным полярным кругом. Из геометрического определения дней солнцестояния следует, что широта Северного (Южного) полярного круга равна $90^\circ - \varepsilon = 66^\circ 34' (-66^\circ 34')$. За полярными кругами наблюдаются полярные дни и полярные ночи, а в полосе между Северным и Южным полярными кругами их не бывает.

Чтобы наглядно представить годовую динамику продолжительности светового дня и размеров шапочки полярного дня/ночи, выберем начальную точку отсчёта — день весеннего равноденствия и географическую область — Северное полушарие.

В течение трёх месяцев от весеннего равноденствия до летнего солнцестояния появляется и растёт шапочка полярного дня вокруг

Северного полюса, в этой области день становится круглосуточным. Но и вне увеличивающейся шапочки дни становятся всё длиннее. Ось вращения Земли всё больше «смотрит» на Солнце, а землянам кажется, что оно с каждым днём поднимается всё выше над горизонтом. Летнее солнцестояние — время максимумов. Затем долгота дня и размер шапочки начинают уменьшаться, в день осеннего равноденствия день и ночь уравниваются, шапочка исчезает. В интервале между осенним и весенним равноденствиями история повторяется, только день и ночь меняются местами.

Динамика продолжительности дня/ночи и размеров полярных шапочек напоминает поведение синуса, но чтобы ассоциации превратить в инструменты, надо правильно выбрать аргументы. Орбита Земли — эллипс, но вытянутый совсем немного, так что в упрощённых расчётах можно заменить его окружностью. Положение точки на окружности задаётся углом в пределах от 0 до 2π , в задаче о длительности дня естественный параметр — номер этого



дня в календаре, от 1 до 365. Угловая метка дня с номером n равна $2\pi \cdot \frac{n}{365}$, а с учётом сдвига точки отсчёта на день весеннего равноденствия (20 марта — 81-й день в году) приходим к «правильному» аргументу: $2\pi \cdot \frac{n - 81}{365}$.

В главной задаче определения длительности дня геометрически дело сводится к нахождению длин двух кусков широтной окружности, на которые она разбивается пересечением с терминатором. Технически решение задачи естественным образом приведёт к использованию тригонометрических функций. Вот итоговая формула для вычисления продолжительности светового дня в точке Земли на широте s ($-90^\circ < s < 90^\circ$) в день n ($1 \leq n \leq 365$):

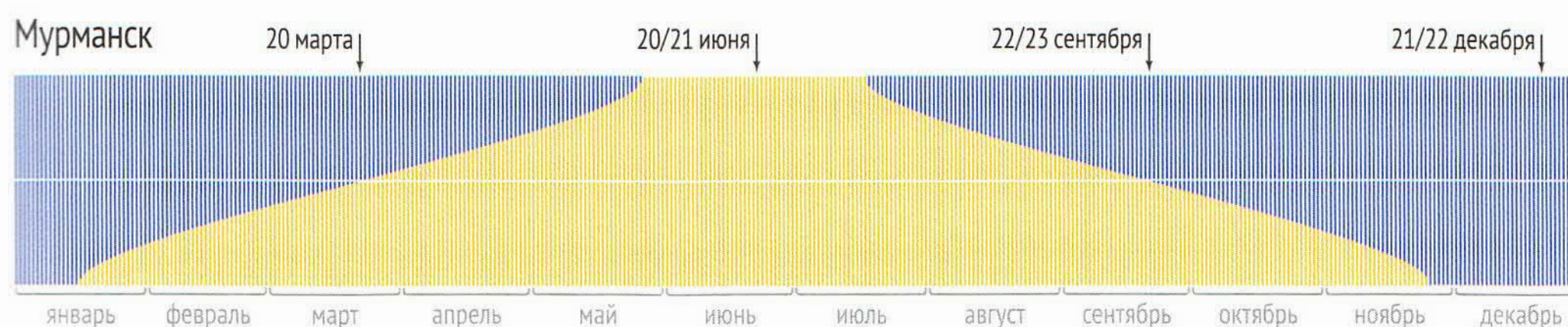
$$\frac{24}{\pi} \arccos(-\operatorname{tg} s \cdot \operatorname{tg} \arcsin(\sin \varepsilon \cdot \sin N)), \quad \text{где } N = \frac{2\pi}{365} \cdot (n - 81).$$

В формуле аргументы тригонометрических функций представлены и в градусной мере (s и ε), и в радианной (N , значения функций \arccos и \arcsin), результат измеряется в часах.

Чтобы увидеть эту формулу в действии, можно построить график зависимости продолжительности светового дня от номера дня в году, например, для Москвы ($55^{\circ} 45'$ с. ш.). Каждый вертикальный отрезок (сутки) делится графиком на день (часть под графиком) и ночь (над графиком). В дни равноденствия эти части совпадают (день и ночь по 12 часов), в дни солнцестояния — максимум и минимум функции.

В точках ближе к экватору график становится приплюснутым, колебания длительности дня и ночи незначительны, а на самом экваторе — равноденствие круглый год (экватор всегда делится терминатором пополам).

Для всех широт между Северным и Южным полярными кругами формула для пары «день—ночь» работает «круглогодично». А в городах Заполярья, например, в Мурманске ($68^{\circ} 58'$ с. ш.), в некоторые дни формула «не работает»: аргумент арккосинуса оказывается вне области определения (модуль больше 1). Это время полярного дня или полярной ночи.



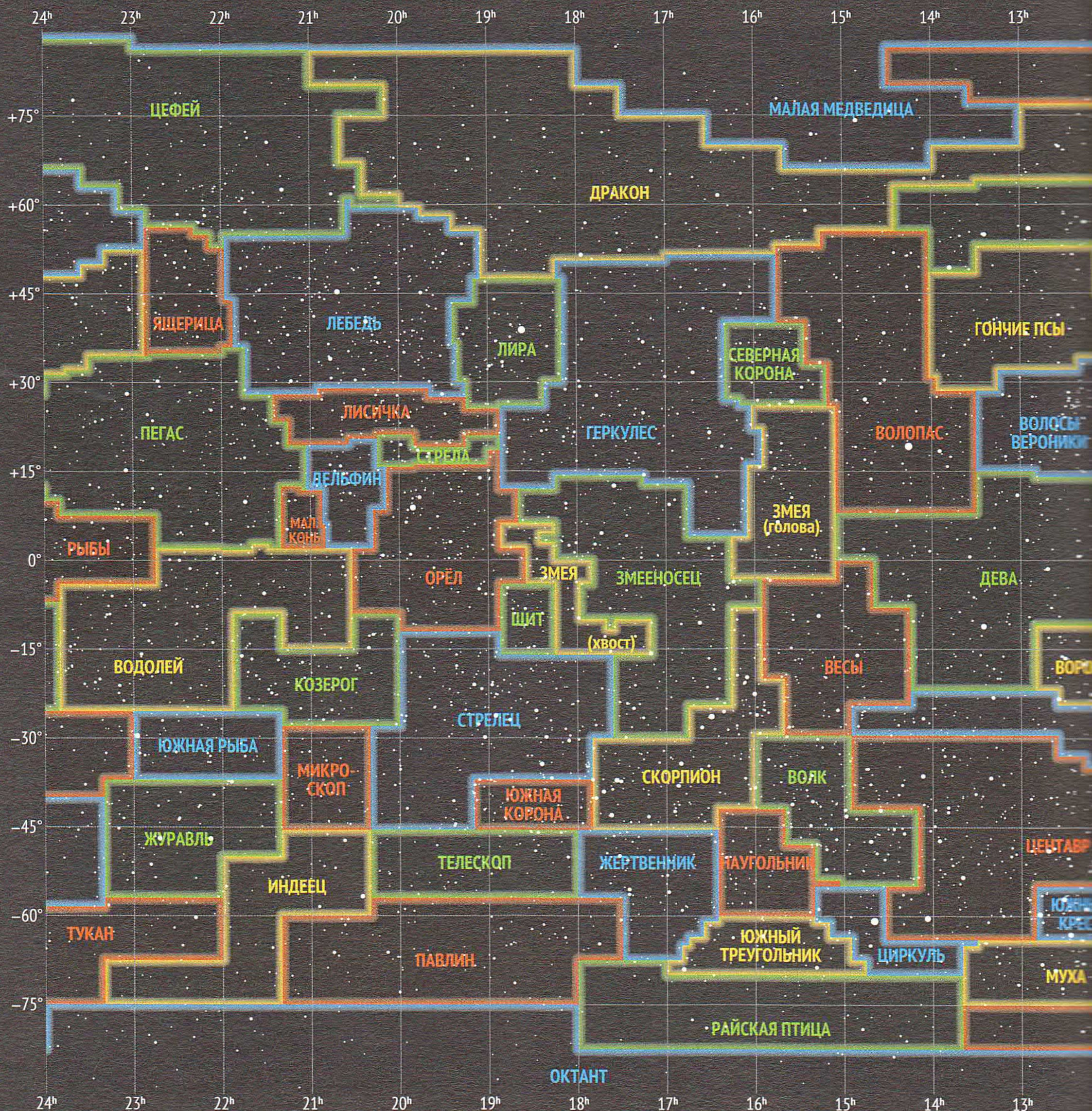
В нашей идеализированной картине мира есть симметрия в парах «день—ночь», как «обычных», так и полярных. Дни и ночи симметрично устроены на широтах φ и $-\varphi$. А полярные дни и ночи симметричны даже в двух смыслах. Скажем, в Мурманске длительность полярного дня и полярной ночи одинакова, по 30 дней. Кроме того, если в некоторый момент на широте φ — свет полярного дня, то на $-\varphi$ будет тьма полярной ночи. Все эти факты можно «увидеть» геометрически, а можно извлечь и из свойств функций в основной формуле.

Приведённый анализ верен по сути, но не буквально. В рассмотренной простейшей модели не учитывались два существенных обстоятельства: Солнце — не точка; из-за атмосферы Земли происходят рассеяние и преломление солнечного света. Реальный мир, оказывается, лучше и светлее, чем его модель.

День побеждает ночь. Световой день отнимает у ночи реальные минуты, даже в равноденствие; полярный день чуть длиннее, чем полярная ночь. С внешней стороны полярных кругов, например, в Санкт-Петербурге ($59^{\circ} 57'$ с. ш.), в относительно небольшой полосе, наблюдаются белые ночи — ночи, которые выглядят как светлые сумерки.

1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 2680, 26

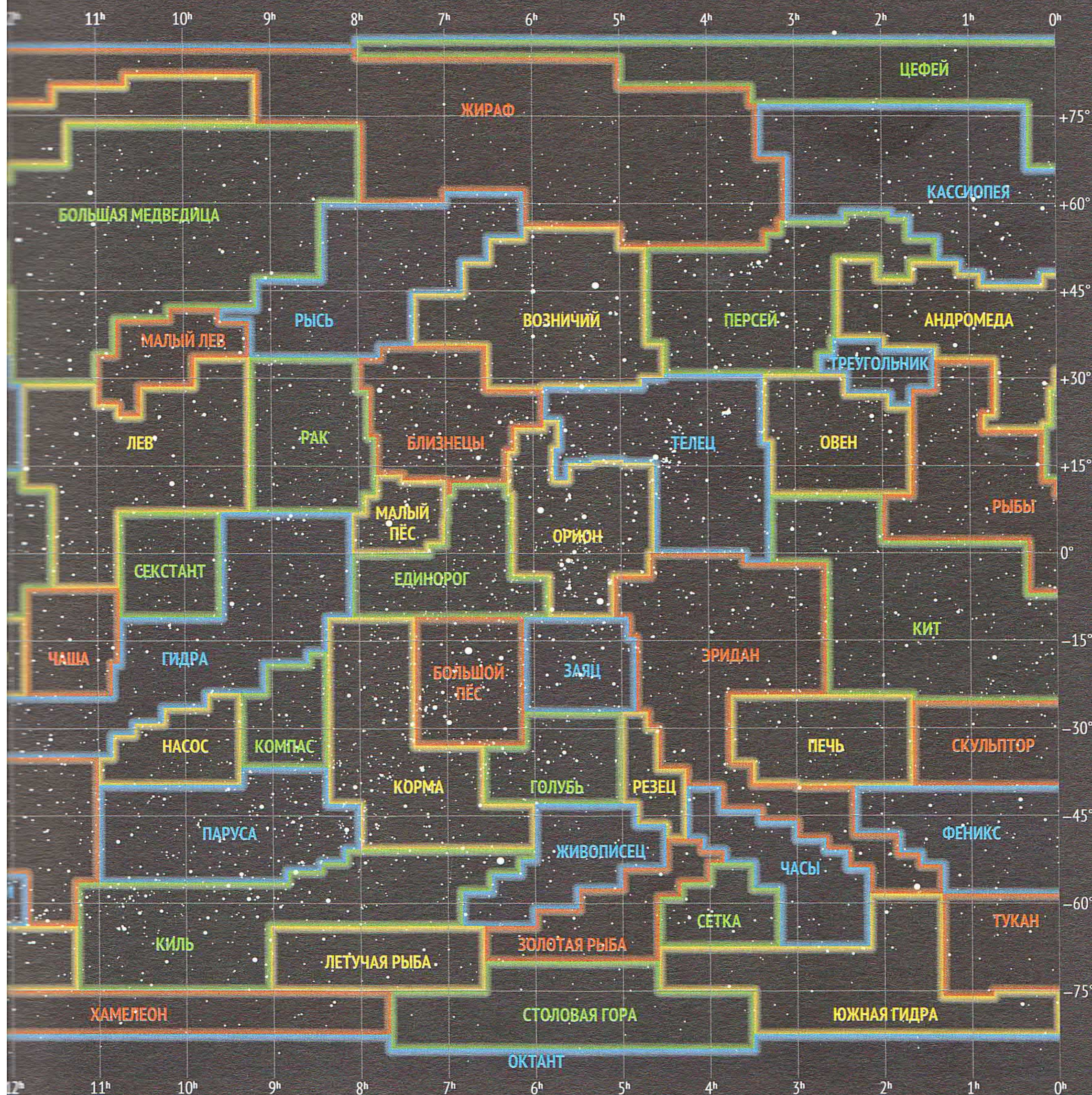
Карту звёздного неба можно составить по аналогии с политической картой мира. Есть «широта» (в астрономии склонение) —



отсчёт углов ведётся от экваториальной плоскости небесной сферы, диапазон значений от -90° до $+90^\circ$. Есть и «долгота» (прямое восхождение) — только здесь она измеряется не в градусах, а в часах, от 0^h до 24^h . Созвездия на такой карте выглядят как страны.

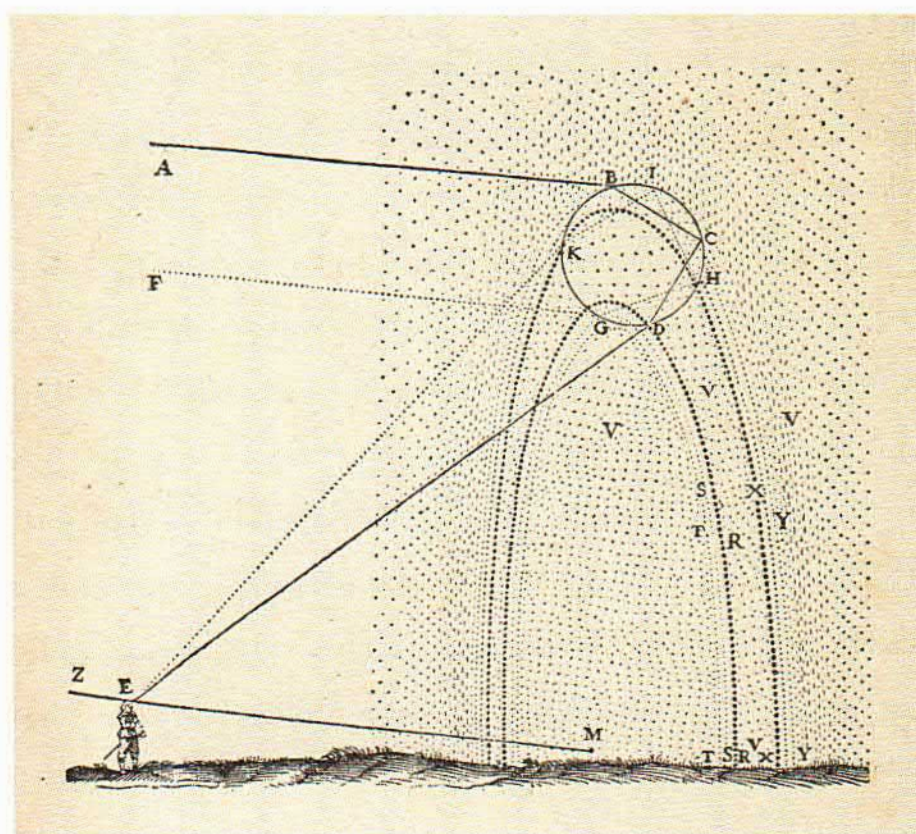
На утверждённой тогда карте координаты звёзд определены по состоянию на 1875 год, каждое созвездие можно представлять как объединение прямоугольников с горизонтальными и вертикальными сторонами. Математическое описание созвездия — совокупность систем линейных неравенств относительно угловых координат.

→ 336



Радуга

В кинотеатре зритель сидит перед экраном, за его спиной находится проектор, «передающий» на экран готовую картинку. Схожим образом происходит и просмотр природной картины «Радуга», но есть принципиальное отличие. На «экран» в виде стены дождя Солнце-проектор светит белыми лучами, а перед наблюдателем вспыхивает яркая многоцветная радуга.

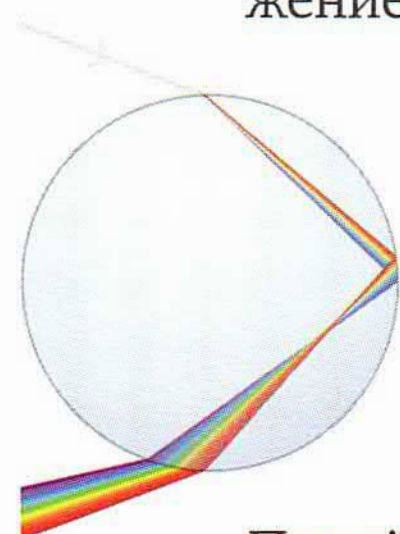


В объяснение формы радуги и её расположения на небе основной вклад внёс Рене Декарт (в 1637 году издано «Рассуждение о методе» с замечательными рисунками), а Исаак Ньютон «раскрасил» радугу (его «Оптика» была издана в 1704 году). Декарт свои выводы о механизме образования радуги сделал

на основе результатов тысяч проведённых опытов по изучению прохождения солнечных лучей через круглую колбу, наполненную водой. Ньютон, изучив разложение белого света на цветные составляющие при прохождении через стеклянную призму, смог объяснить цветовую гамму радуги и порядок цветов в ней.

Выводы как Декарта, так и Ньютона можно получить, изучая прохождение солнечных лучей через одну дождевую каплю. В первом приближении можно считать, что капля имеет форму шара, а приходящие от далёкого Солнца лучи параллельны.

При переходе лучей через границу двух сред — как из воздуха в каплю, так и из капли в воздух — происходят два процесса: отражение и преломление. Каждая такая развилка порождает новые лучи.



Рассмотрим ход лучей в «естественной» вертикальной плоскости. Будем следить только за теми лучами, которые, попадая в глаз наблюдателя, образуют первую радугу. Солнечные лучи падают на верхнюю половину капли и при переходе границы «воздух — капля» преломляются, изменяя направление движения (в воде, как в более плотной среде, лучи отклоняются в сторону нормали к границе).

Причём каждый солнечный луч при переходе границы капли расщепляется на пучок составляющих его разноцветных лучей (спектр). Объясняется это тем, что у лучей разного цвета коэффициенты

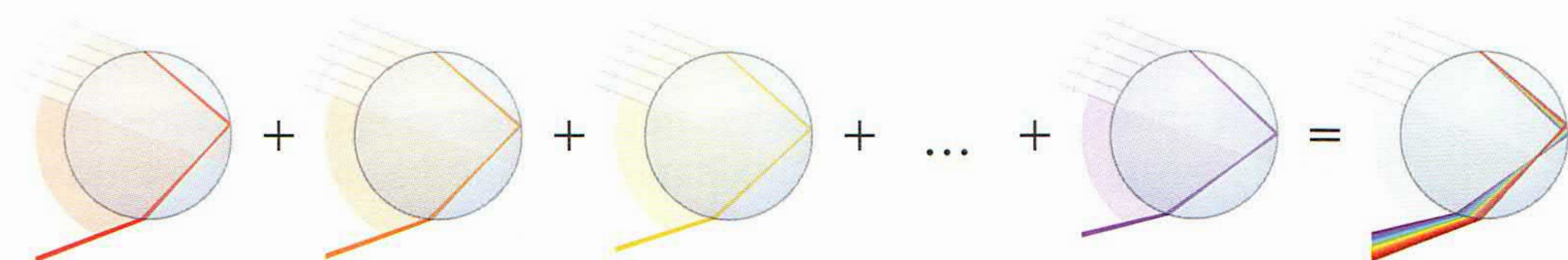
преломления различны. Здесь капля воды выступает в роли призмы из опытов Ньютона по разложению солнечного света на цветовые составляющие.

Затем цветные лучи отражаются от «дальней» стенки и ещё раз преломляются при выходе из капли.

Спектр солнечного света — непрерывное разноцветье с плавными переходами, от красного до фиолетового. Традиционно, вслед за Ньютоном, выделяют семь областей спектра, названия которых знакомы всем по повседневной жизни: красный, оранжевый, жёлтый, зелёный, голубой, синий, фиолетовый.

Маршрут путешествия каждой из цветовых составляющих белого луча, от красной до фиолетовой, можно представить наглядно.

Например, красные лучи, выходящие из капли после преломления — отражения — преломления, составляют веер лучей, образующих с направлением на Солнце углы от 0° до 42° . Эти значения — результат опытов, и вычислений, проделанных ещё Декартом. Но направление с углом выхода 42° (точнее, $42^\circ 22'$) — особое, здесь наблюдается концентрация, накопление красных лучей; интенсивность излучения красного цвета в этом направлении наибольшая.

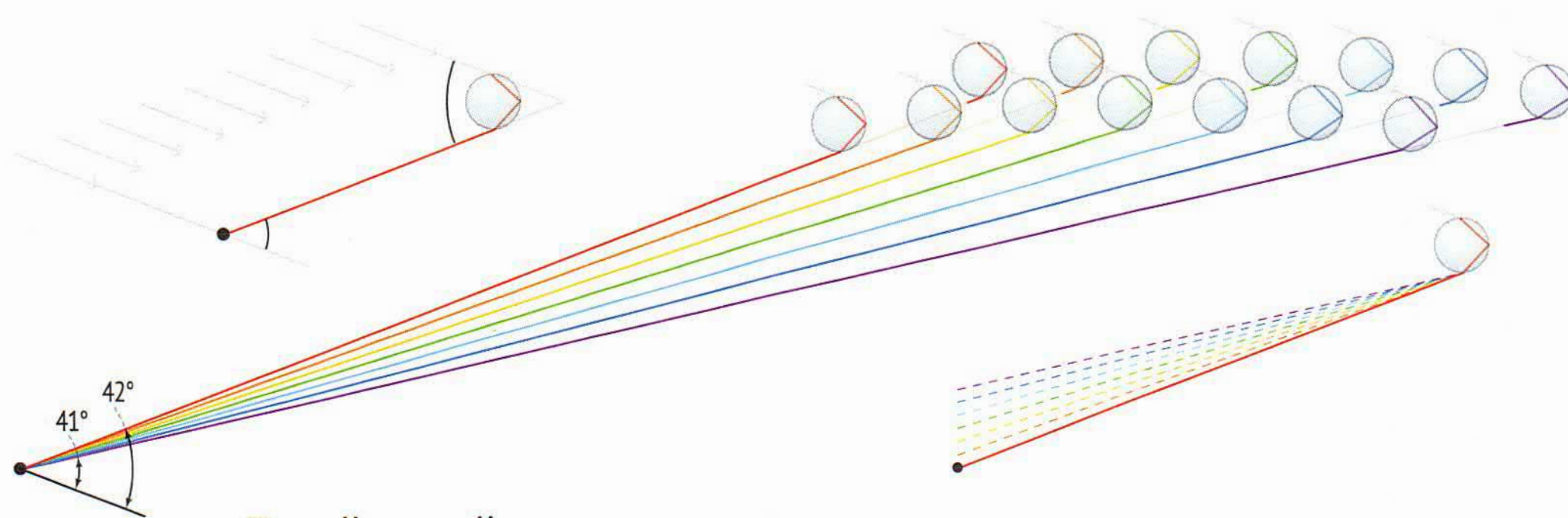


Аналогично обстоит дело с другими цветами спектра. Правда, есть важная деталь: коэффициент преломления лучей по мере движения от красного цвета к фиолетовому будет монотонно меняться, соответственно будет монотонно меняться (точнее, уменьшаться) и угол интенсивного свечения для данного цвета. Для фиолетового цвета, второй границы спектра, этот угол примерно равен 41° (точнее, $40^\circ 36'$).

Итак, лучи, падающие на верхнюю половину капли и отразившиеся внутри неё только один раз, порождают выходящие из капли разноцветные лучи, которые можно разделить на две группы. Во-первых, из каждой маленькой капли выходит узкий пучок разбегающихся интенсивно окрашенных разноцветных лучей, составляющих с направлением падающих солнечных лучей углы от 41° (фиолетовый) до 42° (красный). Этот пучок порождается солнечными лучами, расстояние от которых до центра капли составляет примерно 0,86 её радиуса. Во-вторых, в диапазоне от 0° до 41° собираются лучи всех цветов и малой яркости, порождающие мягкий

рассеянный свет от капли. Наконец, вне интервала углов (0° , 42°) вообще нет выходящих из капли лучей рассматриваемого типа.

От рассмотрения оптических свойств капель вернёмся к задаче описания радуги. Продолжим работу в «естественной» вертикальной плоскости, в которой находятся наблюдатель, Солнце за его спиной и ось «Солнце — наблюдатель», параллельная солнечным лучам. Перед наблюдателем — вертикальный срез облака капель. Из каждой капли выходят яркие разноцветные лучи, по каждому направлению в диапазоне от 41° до 42° — только один. Значит, если в глаз наблюдателя попадает один из этих лучей, то остальные проходят мимо, а сама эта капля становится для наблюдателя ярко-одноцветной.



Такой яркий луч, пересекая две параллельные прямые солнечных лучей, проходящих через наблюдателя и каплю, образует с ними равные накрест лежащие углы. Например, каждая капля испускает красный луч под углом 42° , поэтому наблюдатель увидит на небе ярко-красную точку тоже под углом 42° к оси «Солнце — наблюдатель». Можно показать, что для наблюдателя все капли в толще дождя, расположенные рядом с лучом 42° , будут ярко-красными.

Наблюдателем все капли внутри угла 41° — 42° (в вертикальной плоскости) будут восприниматься как видимый объект — кусочек радуги, сияющей всеми цветами спектра от красного до фиолетового.

Вращением этого фрагмента радуги вокруг оси «Солнце — наблюдатель» можно получить полный портрет радуги (так как в каждой плоскости, проходящей через ось, процессы одинаковые). Радуга в небе как видимый объект для наблюдателя — круговая дуга «толщиной» около 1° и с центром на оси «Солнце — наблюдатель» (говорят, что центр радуги находится в противосолнечной точке).

Для каждого цвета спектра соответствующая окружность представляет все ярко-одноцветные точки, уходящие вдаль по образующим кругового конуса, ось которого — «Солнце — наблюдатель», вершина — наблюдатель, а полураствор (в зависимости от цвета) — от 41° (фиолетовый) до 42° (красный).

Высота радуги в небе зависит от положения Солнца. Например, если Солнце садится, то на коромысле качелей «Солнце — наблюдатель — центр радуги» будет подниматься противовес Солнца — центр радуги, а с ним и вся радуга. И наоборот: чем выше Солнце, тем ниже радуга, тем меньше её дуга. Самая большая радуга, почти половина окружности, — когда Солнце находится у линии горизонта. А вот с самолёта на фоне облаков можно увидеть радугу и в виде полной окружности.



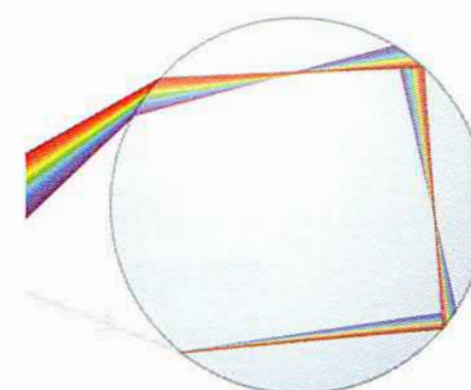
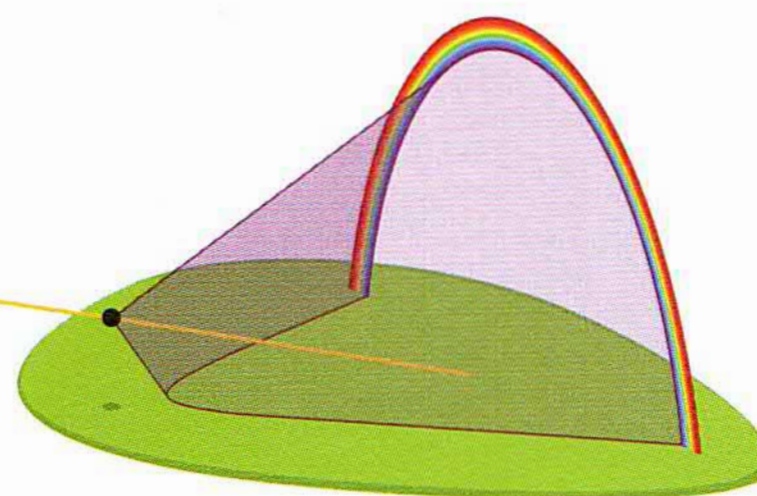
Иногда в небе видна и вторая радуга. В отличие от первой радуги, у формирующих вторую радугу солнечных лучей более сложный путь.

В вертикальной плоскости лучи падают на нижнюю половину капли, преломляются, отражаются от стенок капли два раза, ещё раз преломляются и выходят наружу. Два внутренних отражения приводят к четырём изменениям в свойствах выходящего из капли пучка: угловой диапазон смещается в район 51° — 52° ; он становится шире; интенсивность излучения снижается; порядок цветов меняется на противоположный.

Перечислим свойства второй радуги, сравнивая их со свойствами первой: в небе «висит» примерно на 10° выше первой, угловая толщина около 2° , является менее яркой (иногда её просто не видно невооружённым глазом), порядок цветов в ней обратный — от фиолетового до красного (сверху вниз).

Если вам повезло и на небе видна двойная радуга, то станет заметным ещё одно оптическое явление: тёмная полоса между первой и второй радугами. Названная полосой Александра в честь описавшего её древнегреческого философа, эта область темнее, чем области ниже первой радуги и выше второй. Дело в том, что в области ниже первой радуги, от 0° до 41° , наблюдатель видит мягкое свечение, вызванное рассеянием солнечных лучей (о котором уже говорилось). Аналогичная картина и выше второй радуги. А вот зона между радугами освещена только общим светом неба.

Рассмотренные радуги — первая и вторая — возникают в зависимости от числа внутренних отражений солнечных лучей в капле. Теоретически, формируются и радуги, порождённые бóльшим числом отражений лучей в капле, но поскольку при каждом отражении энергия теряется, радуги высоких порядков — бледные, неяркие и заметить их трудно.



Цветовые пространства

То, как человек воспринимает цвета, изучали и поэты, и естествоиспытатели, и математики (И. Гёте, Т. Юнг, Дж. Максвелл, Г. Гельмгольц, Г. Грассман и др.). В середине XIX века математик Г. Грассман, один из создателей теории векторных пространств, показал, что цветовое пространство (цветовые ощущения человека) можно рассматривать как «трёхмерное векторное» пространство.

Векторность означает, что вводятся правила сложения цветов и умножения на числа. Сложение — это смешение цветов, умножение на число — изменение интенсивности.

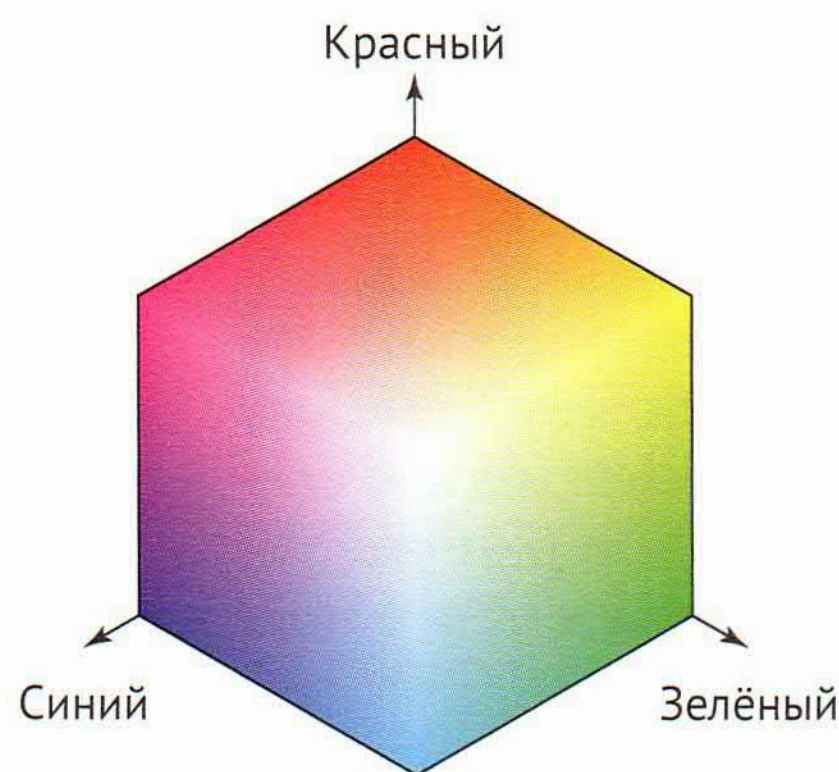
Трёхмерность означает, что, выбрав набор из трёх независимых цветов (т. е. таких, что ни один из них нельзя получить смешением двух других), мы сможем любой различимый глазом цвет получить как их комбинацию. Выбранные три цвета можно воспринимать как базис в цветовом пространстве, а любой цвет — как линейную комбинацию базисных векторов.

Например, из законов смешения цветов, установленных Грассманом, вытекает следующее. Пусть $\{A, B, C\}$ — некоторый базис в цветовом пространстве, тогда «колоритная» операция смешения цветов с координатами $(a_1; b_1; c_1)$ и $(a_2; b_2; c_2)$ сводится к сложению векторов — итоговый результат будет представлен вектором $(a_1 + a_2; b_1 + b_2; c_1 + c_2)$.

Рассмотрим некоторые употребительные модели цветового пространства.

В мире компьютерных и планшетных экранов — излучающих устройств, свет от которых попадает на сетчатку глаза, — для моделирования восприятия цветов человеком обычно используется модель RGB, предложенная в XIX веке физиком Дж. Максвеллом. В этой модели в качестве трёх базисных цветов выбраны: красный (Red), зелёный (Green) и синий (Blue). Эти цвета независимы — ни один из них нельзя получить как комбинацию двух других.

С другой стороны, большую часть различимых глазом цветов можно получить как их комбинацию. Таким образом, набор R, G, B можно воспринимать как базис в соответствующем «цветовом» трёхмерном пространстве, которое удобно представлять в виде единичного



куба. В этой модели координатные оси — базовые цвета R, G, B; начало координат совпадает с вершиной куба и символизирует чёрный цвет («отключены» все цвета, $r = g = b = 0$). А противоположная вершина куба — «белая» (смешаны все три базисных цвета максимальной интенсивности, $r = g = b = 1$).

В цветной полиграфии, в том числе и при печати данной книги, основой является другой набор базисных цветов, СМУ: голубой (Cyan), пурпурный (Magenta) и жёлтый (Yellow). В единичном «цветовом» кубе система координат, связанная с моделью СМУ, следующая: начало координат — вершина куба, представляющая белый цвет, а координатные оси — базовые цвета C, M, Y.

Системы координат базисов RGB и СМУ как бы смотрят друг на друга.

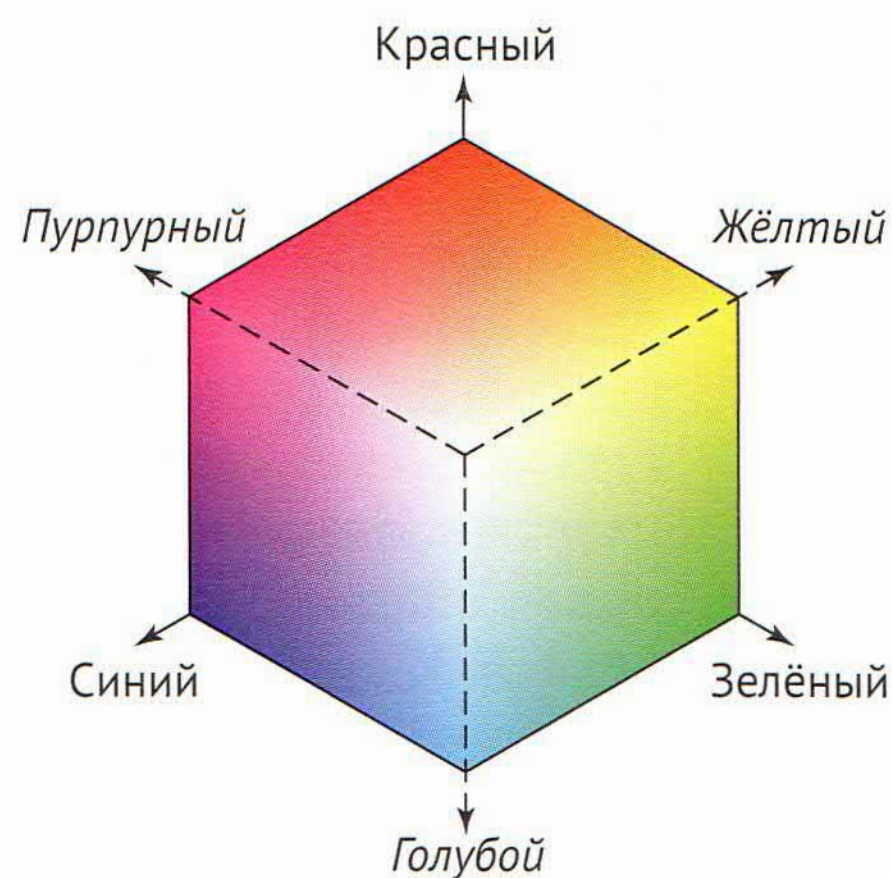
То, что в двух приведённых ситуациях (экраны и книги) используются разные модели цветового пространства, довольно естественно. Для экрана компьютера начальное (нулевое, невозмущённое) состояние характеризуется чёрным цветом. Соответственно, начало координат модели RGB — чёрный угол «цветового» куба. Для книги, бумаги первичное (начальное) состояние задаётся белым цветом (никакие краски на лист ещё не нанесены). Соответственно, начало координат модели СМУ — белый угол куба.

Взаимное расположение осей, представляющих разные модели (RGB и СМУ), определяется физическими соображениями и механизмом возникновения цветовых ощущений у человека. Так, при падении света окрашенный лист бумаги поглощает некоторые цвета, и в отражённом свете мы видим цвета, дополнительные к нанесённым на лист. Получается, что лист воспринимается зелёным, если он окрашен в цвета, дополнительные к зелёному.

Определение дополнительных цветов, которые надо наносить на бумагу, можно провести с помощью простых формул, связывающих координаты цвета (т. е. точки цветового куба) в системах RGB и СМУ: цвета $(r; g; b)$ и $(c; m; y)$ совпадают, если

$$c = 1 - r, \quad m = 1 - g, \quad y = 1 - b.$$

Эти формулы дают ответ на вопрос: как подобрать краску $(c; m; y)$, чтобы залитая ею область воспринималась как область цвета $(r; g; b)$.



Например, чтобы область листа казалось красной, $(r; g; b) = (1; 0; 0)$, её надо залить краской $(c; m; y) = (0; 1; 1)$, т. е. смешать краски М и У, не добавляя С.

Разумеется, приведённые формулы можно читать и «справа налево»:

$$r = 1 - c, \quad g = 1 - m, \quad b = 1 - y.$$

В этих формулах описано цветовое впечатление, которое сложится, если закрасить область краской $(c; m; y)$.

Для получения чёрного цвета в модели СМУ надо смешать три базисные краски максимальной интенсивности: $(c; m; y) = (1; 1; 1)$. Однако полиграфически результат такой операции не очень хорош: есть технологические проблемы, да и при печати текста видно, говоря словами Ильфа и Петрова, что получается не «радикально чёрный цвет». Поэтому к базису добавляют ещё один цвет (обозначаемый буквой К), обычно чёрный, предназначенный, в первую очередь, для печати текста. Такая модель называется СМУК. (И в этой статье в дальнейшем примем за К чёрный цвет.)

При четырёх компонентах СМУК теряется однозначность представления цветов. Например, и доля чёрного $(0; 0; 0; 0,2)$, и смешение трёх компонент $(0,2; 0,2; 0,2; 0)$ соответствуют одному и тому же серому цвету.

Типографские машины наносят краску мелкими точками, которые на каждой (по компонентам СМУК) печатной форме распределяются с переменной плотностью (сами краски по интенсивности одинаковые), что и приводит к меняющейся от области к области интенсивности цвета. Заметим, что при такой технике печати возникает проблема муара — «незапланированного» геометрического узора, возникающего из-за регулярности, правильности решёток. Применяемое на практике решение этой проблемы — чисто геометрическое: муар будет не так заметен, если решётки форм повернуты относительно друг друга.

Для выделенной области у каждой печатной формы — своя цифровая инструкция, число от 0 до 1: 0 означает, что в область точки данного базисного цвета ставить не надо, 1 — точки ставятся с максимальной плотностью (полная заливка), а промежуточные значения от 0 до 1 определяют плотность равномерного распределения окрашенных точек в области (отношение площади закрашенной части области к полной). Например, лист розового цвета (как оттенок красного) закрашен редко расставленными точками красок М и У.

Подчеркнём, что координаты цвета в указанных базисах дают возможность называть цвета не ограниченным набором слов, а точно,

наборами чисел. По координатам можно вычислить и ещё одну важную для восприятия цвета характеристику — светлоту. Светлота показывает, насколько цвет «разбавлен белым», «близок» к нему. Базисные цвета модели RGB человек ощущает как цвета различной светлоты. Если принять светлоту чёрного за 0, а белого — за 1, то эмпирически установлено, что в базисе RGB светлота цвета (1; 0; 0) равна 0,299, цвета (0; 1; 0) — 0,587, цвета (0; 0; 1) — 0,114. Векторность цветового пространства — возможность умножать на числа и складывать — позволяет записать формулу для светлоты цвета (r; g; b), «арифметически» описывающую человеческие ощущения:

$$L = 0,299r + 0,587g + 0,114b.$$

Заметим, что значения числовых коэффициентов в этой формуле согласуются с тем, что три базисных цвета максимальной интенсивности $r = g = b = 1$ дают белый цвет.

В цветовом кубе уравнение $L = \text{const}$ задаёт плоскость, все точки которой, при выполнении стандартной для графического редактора операции перевода в серую шкалу (Grayscale), переходят в одну точку — точку пересечения этой плоскости с диагональю «чёрный—белый». Таким образом, цветовой куб расслаивается на плоскости одинаковой светлоты.

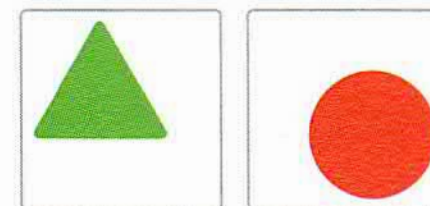
Базисные цвета модели СМУ человеком также воспринимаются как цвета различной светлоты (на рисунке представлены горизонтальными полосками). Формулы, связывающие координаты цвета в базисах RGB и СМУ, дают аналогичную формулу для светлоты при разложении по второму базису.

Светлоту читатель может представлять как величину, обратно пропорциональную количеству тонера, расходуемого чёрно-белым копировальным устройством при передаче некоторой площади данного цвета. На рисунке левая вертикальная полоса в системе СМУ имеет координаты (0; 0,5; 1), правая — (0,38; 0,5; 0). Значения светлоты L для обеих полос совпадают, и их копии, сделанные на чёрно-белом копире, отличаться не будут.

Модели RGB и CMYK — канонические. Конечно, есть и другие модели, например, у дизайнеров популярны системы, в которых светлота становится одной из базисных координат (Lab, HSB). Ситуацию можно сравнить с описанием объектов трёхмерного пространства — можно использовать декартовы координаты (RGB, СМУ), а можно — сферические (Lab, HSB).



Арифметика изображений



Изображения, представленные в компьютере, можно складывать и вычитать, умножать и даже возводить в степень! Именно на арифметических операциях основана работа компьютерных программ с растровыми изображениями, таких как Photoshop или инструментов для обработки фотографий в социальных сетях.

Растровое изображение можно представлять как светящуюся картинку на экране — это прямоугольная таблица, состоящая из ячеек (пикселей). В каждой из них хранится числовой набор $(r; g; b)$, характеризующий яркость трёх базисных цветов (красный, зелёный, синий), из которых складывается цвет пикселя. Целые числа r , g и b хранятся в виде байтов: каждая двоичная запись состоит из восьми нулей и единиц, поэтому диапазон значений — от 0 до 255 ($= 2^8 - 1$). Значение 0 означает отсутствие данного цвета в комбинации, значение 255 — яркость цвета максимальна. Примеры: $(0; 0; 0)$ — чёрный пиксел, $(255; 255; 255)$ — белый, $(255; 0; 0)$ — красный, $(0; 100; 0)$ — тёмно-зелёный, $(200; 200; 0)$ — жёлтый.

Арифметические операции над изображениями выполняются по-пиксельно и покомпонентно. Для одинаково расположенных пикселей $(r_1; g_1; b_1)$ и $(r_2; g_2; b_2)$ их сумма равна $(r_1 + r_2; g_1 + g_2; b_1 + b_2)$, а произведение равно $\left(\left\lfloor \frac{r_1 r_2}{255} \right\rfloor; \left\lfloor \frac{g_1 g_2}{255} \right\rfloor; \left\lfloor \frac{b_1 b_2}{255} \right\rfloor \right)$. В сложении сумма принимается равной 255, если она больше этого числа; в определении произведения квадратные скобки обозначают целую часть числа. В общем, при сложении получается более яркая точка, при умножении — менее яркая. Например, прибавление к картинке белого фона обесцвечивает всю картинку, превращая её в «белое безмолвие». А если умножить цветную картинку на «чёрный квадрат», то образуется квадратная «чёрная дыра».

Непосредственные результаты применения введённых операций обескураживают. Взяв зелёный треугольник (A) и красный круг (B), в сумме $A + B$ получим жёлтый ломтик в пересечении. Если взять

$$A + B = \text{жёлтый ломтик} \quad \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \text{темно-зелёный/красный} \quad AB = \text{чёрный/темно-красный}$$

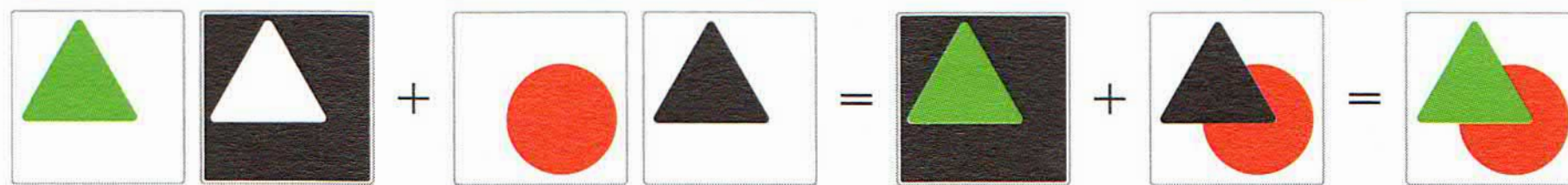
«по половине изображений» $0,5A + 0,5B$, уменьшив вдвое яркости всех составляющих, то треугольник и круг по форме сохраняются, но изменятся по цвету: в пересечении фигур будет тёмное пятно, а допол-

няющие части станут светлее. В произведении AB пересечение фигур будет тёмным, а остальные части сохраняют оригинальные цвета.

Но большой класс практических задач можно решить «арифметически», если использовать монохромные, серые маски — изображения с оттенками от чёрного до белого. Рассмотрим чёрно-белые маски M_A и M_B , построенные по A и B : сами фигуры становятся белыми, а белый фон — чёрным. Ещё две маски, $\overline{M_A}$ и $\overline{M_B}$ — их «антиподы», чёрный и белый меняются местами (вычитание из белого, инвертирование).

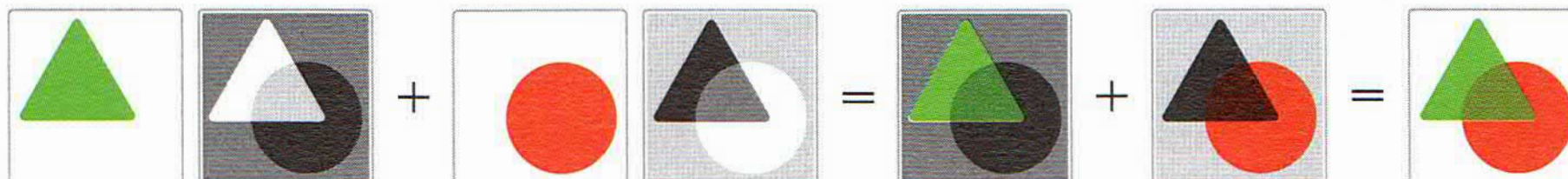


Умножение изображения A на его маску M_A даёт изображение треугольника на чёрном фоне, а умножение B на маску $\overline{M_A}$ вырезает

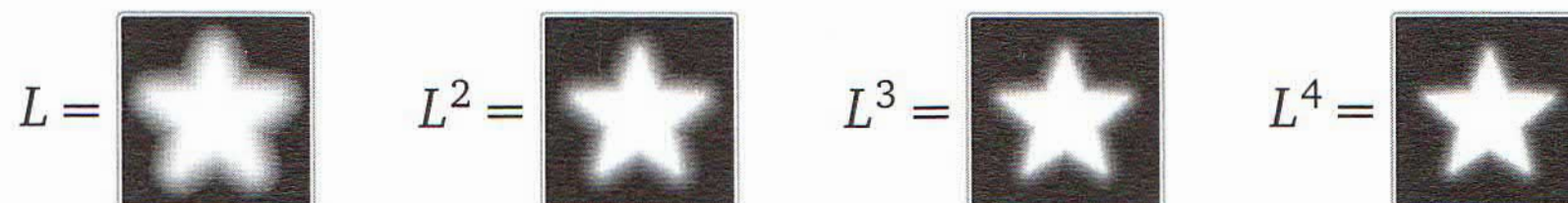


чёрный треугольник из изображения с кругом. Наконец, сумма полученных изображений $AM_A + B\overline{M_A}$ — это наложение зелёного треугольника A на красный круг B . Аналогично, $BM_B + A\overline{M_B}$ — наложение красного круга на зелёный треугольник.

Приведённые маски были чёрно-белыми, но «подлинно» серые маски тоже применяются. Например, с их помощью можно сделать наложенное изображение полупрозрачным. Две серые маски, линейные комбинации чёрно-белых, порождают полупрозрачное наложение треугольника на круг: $A(0,7M_A + 0,3\overline{M_B}) + B(0,7\overline{M_A} + 0,3M_B)$.



Полезные инструменты получаются и при работе только с одним изображением, например, возведение в степень — способ увеличить резкость чёрно-белой фотографии.

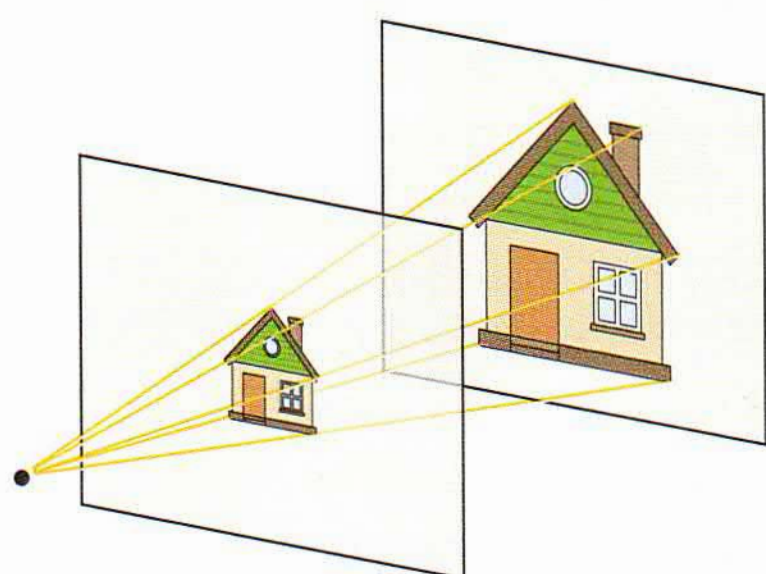


Базовые операции рассматривались в простейшей модели, с обработкой по отдельным пикселям. Но используются и инструменты, которые меняют цвет пикселя с учётом цветов окружающих пикселей. Например, усреднение цветов даёт эффект размытия фотографии.

Масштабирование изображений

Когда мы смотрим фильм на гигантском экране или разглядываем небольшие фотографии в семейном альбоме, то, независимо от размеров изображения, «правильно» воспринимаем и оцениваем картинку. Так происходит потому, что во всех «копиях» одинаковые пропорции: совпадают и отношения размеров всех объектов, и отношения расстояний между ними.

А какие геометрические инструменты обеспечивают такую «правильность» копирования? Ключевое словосочетание — «преобразование подобия», понятие, изучаемое в школьном курсе геометрии.



При таком преобразовании плоскости (или пространства) расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз: если точки A и B переходят в A_1 и B_1 , то $A_1B_1 = kAB$, где k — числовая характеристика преобразования, её называют коэффициентом подобия.

Наглядный пример преобразования подобия — гомотетия (соединены древнегреческие слова «одинаковый» и «расположенный»): фиксируются центр O и коэффициент $k > 0$, точка A переходит в такую точку A_1 на луче OA , что $OA_1 = kOA$. По сути, всякое преобразование подобия сводится к гомотетии: можно доказать, что преобразование подобия — результат последовательного выполнения гомотетии и движения.

Замечательной чертой преобразования подобия является сохранение важных геометрических свойств. Например, прямые линии переводятся в прямые, сохраняются углы между прямыми.

То, что эти утверждения справедливы в случае движения, очевидно, для гомотетии они выводятся из свойств подобных треугольников. А упомянутая теорема о структуре произвольного преобразования подобия «объясняет», почему они верны и в общем случае.

Свойства подобия делают исходную картинку и масштабированную копию равноправными изображениями. Сохранение углов, пропорций, характера линий — всё соединяется в сознании зрителя в итоговом решении: это «одинаковые» изображения, портреты одного оригинала, и единственное, что их отличает, — размеры.

Удивительно, что богатый набор полезных свойств преобразования подобия выводится из лаконичного и простого по формулировке определения: все расстояния изменяются в одно и то же число раз.

Невозможные фигуры

И фотографии, и картины обычно не вызывают сомнений в реальности изображённых на них объектов. Но встречаются и озадачивающие примеры. Самые известные — гравюры Маурица Эшера.

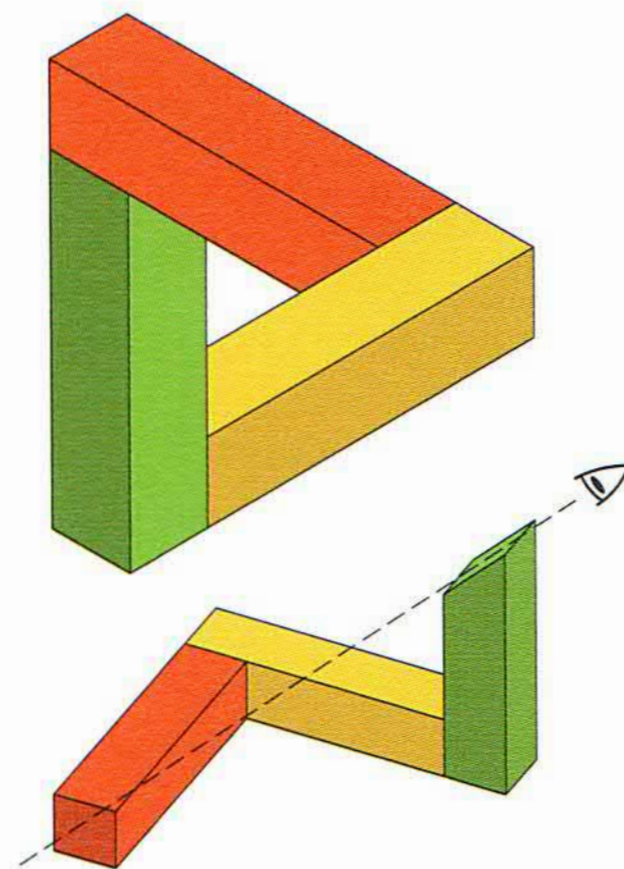
На литографии «Спускаясь и поднимаясь» (1960) изображены идущие по замкнутой лестнице навстречу друг другу две группы. Причём у идущих в одном направлении по ступеням лестницы — бесконечный подъём вверх, а у идущих навстречу — бесконечный спуск. Эшер писал про бесконечную лестницу: «Это нечто замкнутое, кольцевое, словно змея, заглатывающая собственный хвост. Тем не менее, можно нарисовать её в правильной перспективе: каждая ступень выше (или ниже), чем следующая».

На гравюре «Водопад» (1961) представлена «действующая» модель вечного двигателя: поток воды низвергается вниз, по дороге крутит колесо, а потом бежит вниз к... верховьям водопада.

Идея, на которой основаны эти работы, восходит к шведскому художнику Оскару Рутерсварду. В 1934 году, ещё учась в гимназии, он на уроке по латинской грамматике нарисовал первую невозможную фигуру. Работы Эшера — художественное воплощение геометрических моделей, предложенных в 1950-х годах Лайонелом и Роджером Пенроузами (отец и сын, психолог и математик).

Самая простая из этих моделей, невозможный треугольник, состоит из трёх взаимно перпендикулярных прямоугольных брусков — непрерывной цепочки трёх попарно перпендикулярных рёбер куба. Если смотреть на конструкцию из точки на продолжении диагонали куба, проходящей через крайние концы цепочки, то цепочка замкнётся, превратившись в «треугольник» (в эксперименте стоит закрыть один глаз). На плоском изображении увиденного соединение элементов вызывает ощущение, что такого не может быть.

А на самом деле каждая из подобных «невозможных» фигур обладает реальным прототипом, при взгляде на который лишь с определённых точек видишь то, что существовать, казалось бы, не может! Более того, даже «простой» невозможный треугольник можно получить как портрет цепочек из трёх брусков, края которых устроены по-разному, а в процессе визуального «замыкания» это различие исчезает.



Орнаменты

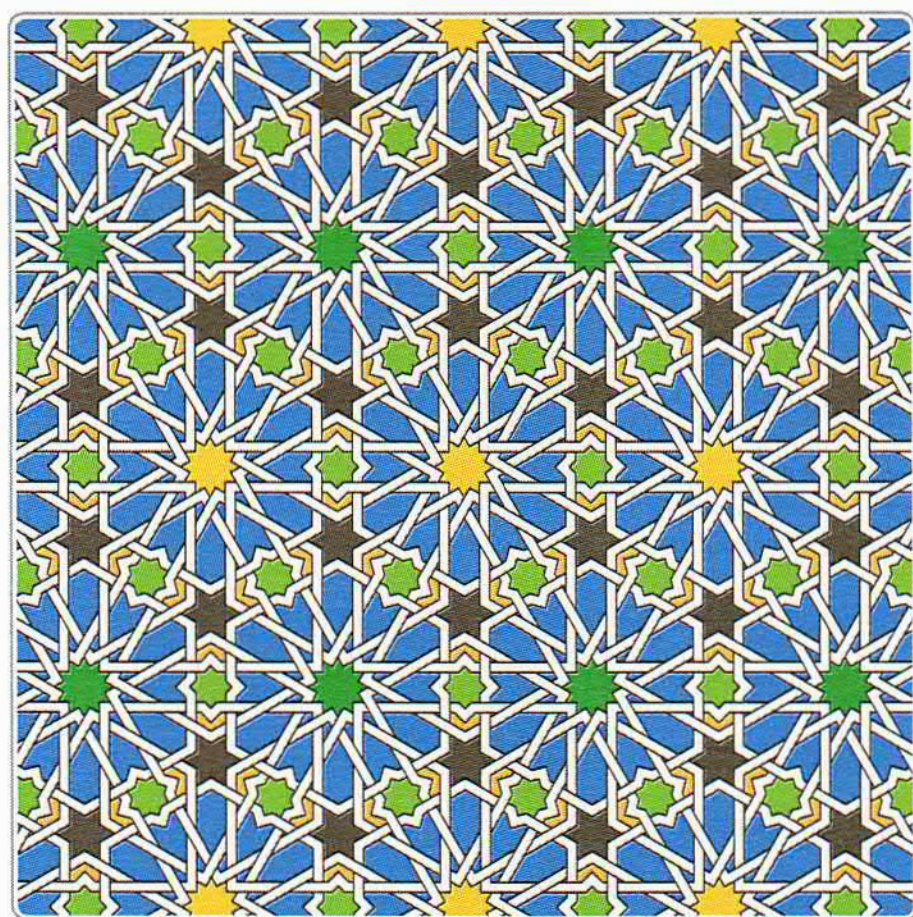
С древних времён для украшения изделий или зданий люди использовали орнаменты — плоские узоры, составленные из небольшого набора одинаковых элементов и отличающиеся геометрической правильностью, повторяемостью рисунка. Собственно, латинское слово *ornamentum* и означает «украшение». И зрительное восприятие, и математическая классификация выделяют два типа плоских узоров.

Бордюр — это полоска, внутренняя каёмка на краю предмета. Бордюрные узоры могут украшать одежду, книжную страницу, обрамлять фреску в настенной живописи, стену или потолок. В античной Греции бордюры как украшения можно было встретить



повсюду: от горлышка вазы до фриза (полоса в верхней части здания). Для часто встречающихся рисунков, состоявших из изломов прямых линий, греки даже ввели отдельное название — меандр, в честь одноимённой извилистой реки.

Орнаменты плоские, в отличие от бордюров-полос, занимают не край полотна или стены, а всё выделенное поле. В исламской архитектуре орнаменты — главная часть декора, знаменитые при-

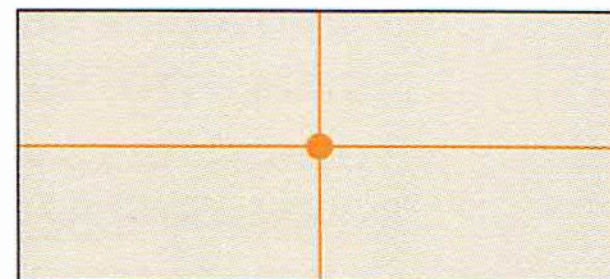


меры — исторические памятники Самарканда, отделка дворцов Альгамбры, построенных в Испании во времена мавританского владычества.

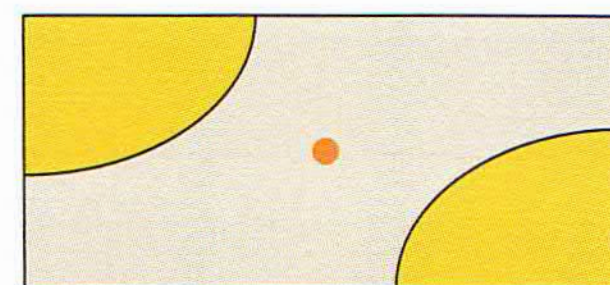
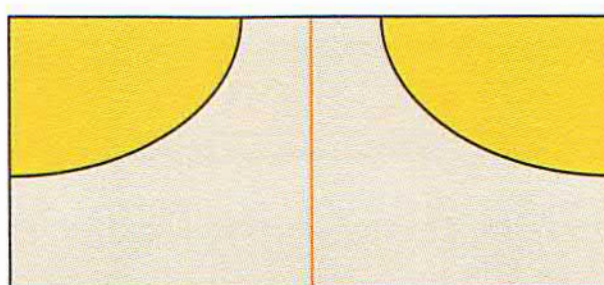
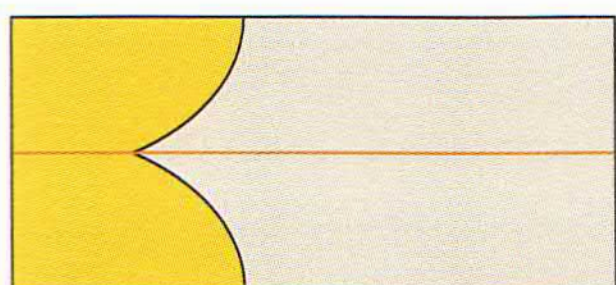
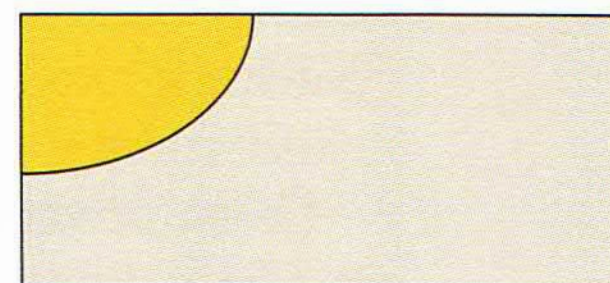
Если отвлечься от художественной стороны узоров, весь разнообразный и многоликий мир орнаментов можно классифицировать в зависимости от того, как выглядит группа, набор движений, переводящих данный орнамент в себя. Можно взглянуть на эту классификацию и с точки зрения динамики: выяснить, как выглядят преобразования, с помощью которых из небольшой ячейки «восстанавливается» весь орнамент.

Оказывается, классификационных типов немного: бесконечных бордюров — 7 типов, бесконечных плоских орнаментов — 17 типов.

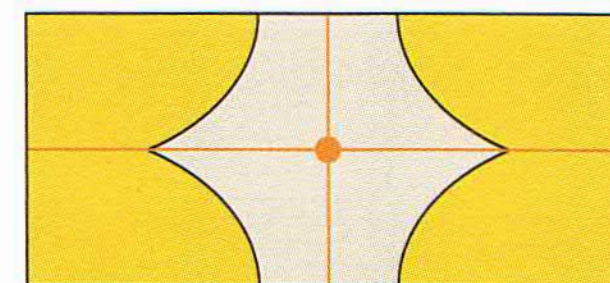
Начнём разговор о классификации с простого, но содержательного примера — прямоугольника. Эта геометрическая фигура обладает двумя осевыми симметриями: H — симметрия относительно горизонтальной прямой, проходящей через центр; V — вертикальной. Ещё имеется центральная симметрия, обозначим её через R , поскольку она совпадает с поворотом вокруг центра на 180° . Другими симметриями прямоугольник не обладает. Доказательство основано на том, что для любой конечной фигуры (в том числе для прямоугольника) при движении, совмещающем её с собой, центр тяжести фигуры переходит в себя. Значит, движение может быть или поворотом около центра, или симметрией относительно прямой, проходящей через центр. Можно и экспериментально «убедиться», что кроме H и V нет других осевых симметрий (попробуйте, например, складывая прямоугольный лист по диагонали), а единственный нетривиальный поворот — на угол 180° .



А какие симметрии бывают у раскрашенного прямоугольника? Симметрии такого прямоугольника надо искать только среди набора $\{H, V, R\}$, поскольку прямоугольник в любом случае должен перейти в себя. Чтобы последующее получило наглядное представление, будем одинаково закрашивать углы прямоугольника. Если закрашен только один угол, то такой прямоугольник не обладает ни одной из симметрий H , V или R . Если закрашены два угла, то, в зависимости от сочетания углов, имеется только одна из базовых симметрий H , V или R .



Любопытно, что прямоугольного узора ровно с двумя симметриями не может быть. Перемещения закрашенного угла под действием симметрий помогают увидеть, что $VH = R$, $RV = H$, $HR = V$ — последовательное выполнение двух симметрий (в любом порядке) даёт третью. Таким образом, если у прямоугольного узора имеются две симметрии, то имеется и третья. Пример: прямоугольник с четырьмя одинаково закрашенными углами.

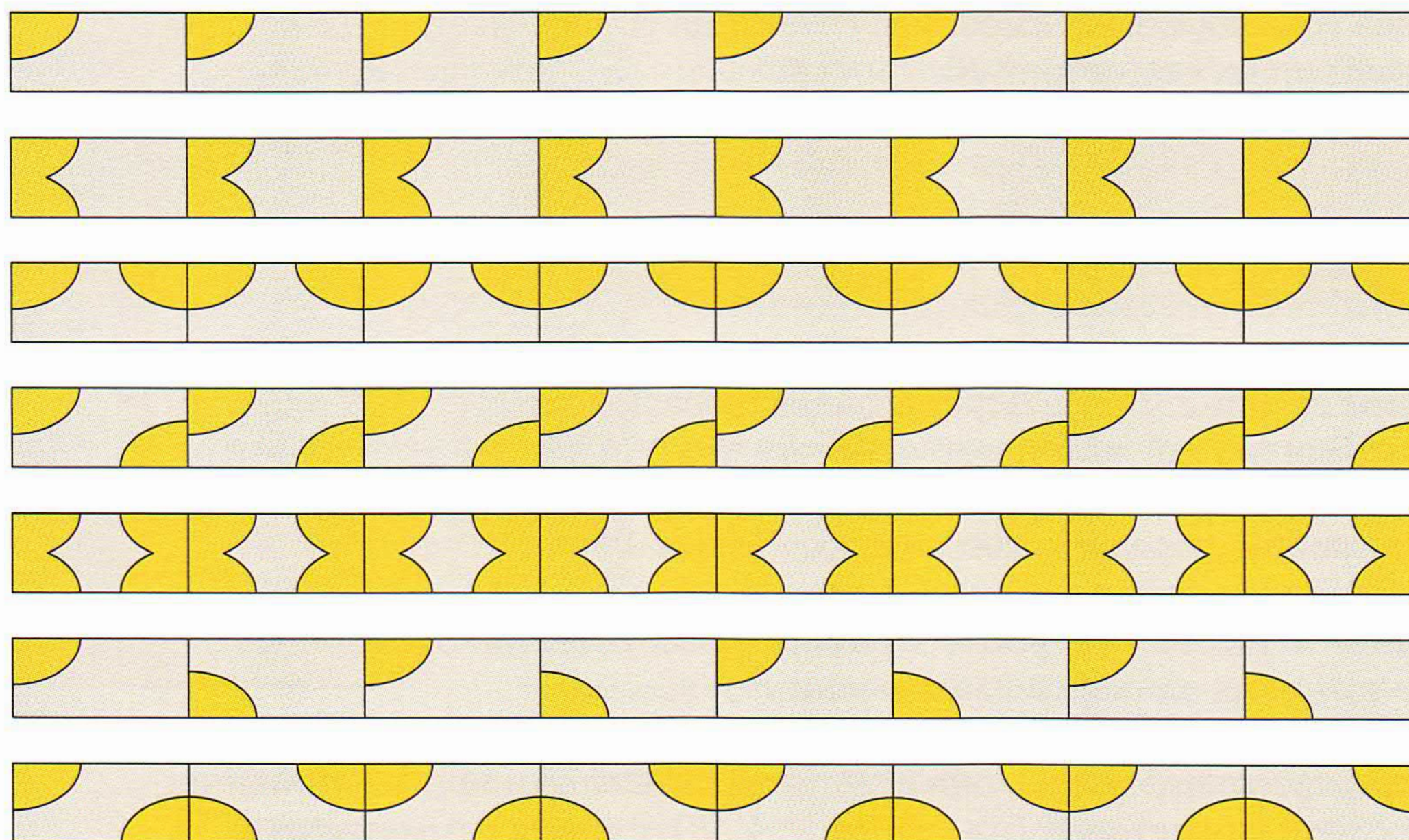


Итак, в зависимости от числа симметрий, которыми обладают прямоугольные узоры, они делятся на пять типов: несимметричные, с одной симметрией (из набора H, V, R), с тремя симметриями.

Набор движений, переводящих раскрашенный прямоугольник в себя, является группой. Движение плоскости — это преобразование, сохраняющее все расстояния. Примеры: параллельный перенос, симметрия, поворот. Группой в математике называется множество, на котором определена операция (условно называемая умножением) такая, что: «произведение» двух элементов группы — тоже элемент группы; есть «единица» — нейтральный элемент относительно умножения; у каждого элемента есть обратный, умножение на который даёт единицу. Для движений плоскости умножение — это их композиция, т. е. последовательное выполнение; единицей является тождественное преобразование I ; обратный элемент — обратное преобразование. В случае прямоугольника число элементов группы зависит от раскраски, наибольшая возможная группа состоит из четырёх элементов — $\{I, H, V, R\}$.

Бордюр — повторяющийся (периодический) узор, бесконечно продолжаемый, заключённый между двумя параллельными прямыми. Все такие узоры можно построить, если к согласованным с прямыми границами бордюра симметриям вида H , V и R добавить ещё два вида движений: параллельные переносы T вдоль границ и скользящие симметрии G — композиции горизонтальной симметрии и параллельного переноса ($G = HT$).

Семь возможных типов периодических бордюрных узоров следующие. Бордюры первых пяти типов получаются параллельным



переносом рассмотренных прямоугольных узоров (одинаково раскрашенные прямоугольники приставлены друг к другу, образуя бесконечную в обе стороны ленту). Ещё два типа — результат применения скользящей симметрии к несимметричным прямоугольным узорам (прямоугольники с одним закрашенным углом) и к прямоугольникам с одинаково закрашенными противоположными углами.

Других типов периодических бордюров нет. Доказательство основано на анализе группы движений бордюрного узора, элементами которой могут быть горизонтальная симметрия H и представители семейств V , R , T и G . Несложно проверить, что композиция перечисленных видов даёт движение из этого набора, например, композиция вертикальной симметрии и скользящей симметрии — центральная симметрия. Но, в отличие от случая прямоугольника, теперь порядок проведения преобразований важен, например, композиция двух вертикальных симметрий в разных порядках даёт параллельные переносы, но в противоположных направлениях.

Ещё одно замечание: как и в группе $\{I, H, V, R\}$, преобразования в наборе $\{H, V, R, T, G\}$ не независимы. Например, скользящая симметрия по определению — композиция HT . Это приводит к различным способам описания конкретного бордюра. Так, бордюр пятого типа можно двумя способами получить из прямоугольного узора с тремя симметриями (четыре закрашенных угла в прямоугольнике): параллельным переносом и скользящей симметрией. Этот же бордюр можно получить даже из половинки прямоугольника с помощью вертикальных симметрий. А бордюр седьмого типа тоже можно построить не скользящей симметрией прямоугольника, а вертикальными симметриями.

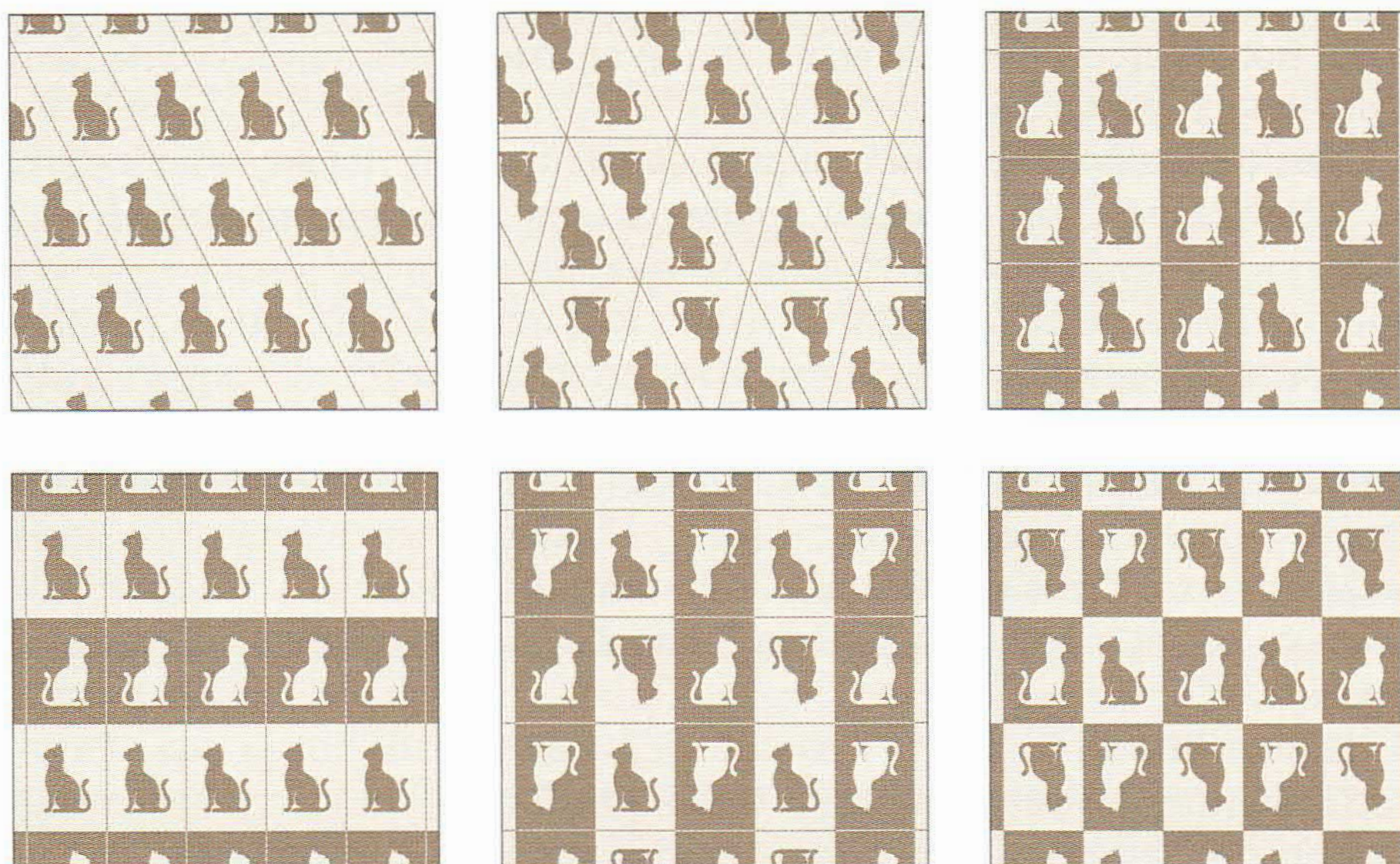
Наличие параллельных переносов в группе движений бордюра необходимо. Из четырёх других видов преобразований (H , V , R и G), в принципе, в группе может не быть ни одного, могут присутствовать только один, только два или только три (в разных сочетаниях), все четыре. Формально получается $16 = 2^4$ возможных вариантов, но реализуются они не все. Ситуация сходна с приведённым ранее объяснением того, что не бывает прямоугольного узора ровно с двумя симметриями. Например, в случае бордюра не могут входить в группу только симметрии вида H и вида V , поскольку тогда в группу входило бы и их произведение, симметрия $R = HV$.

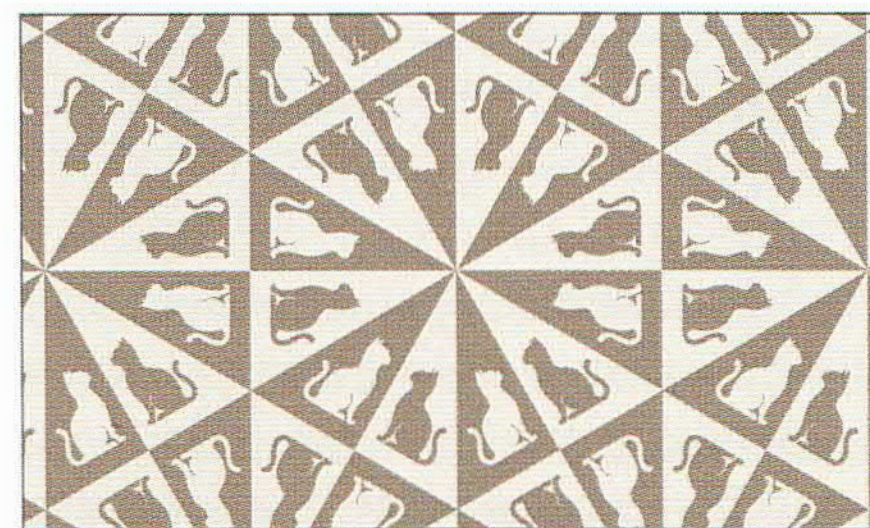
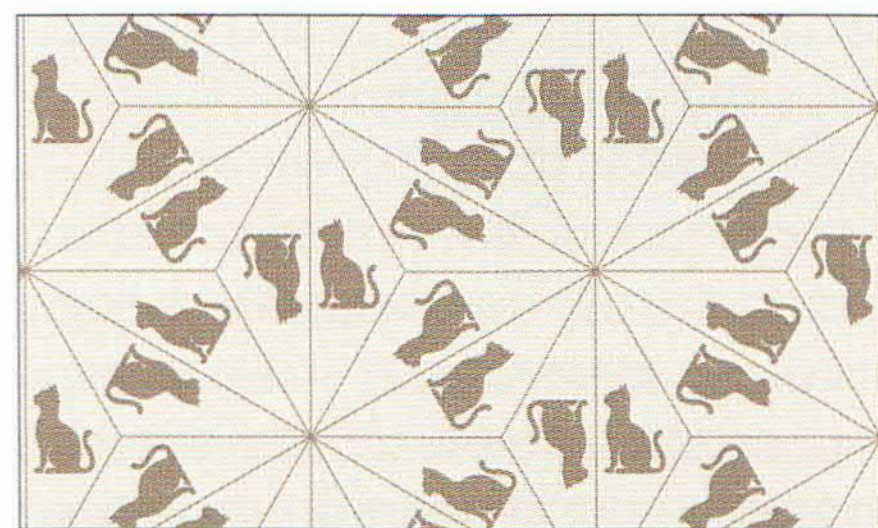
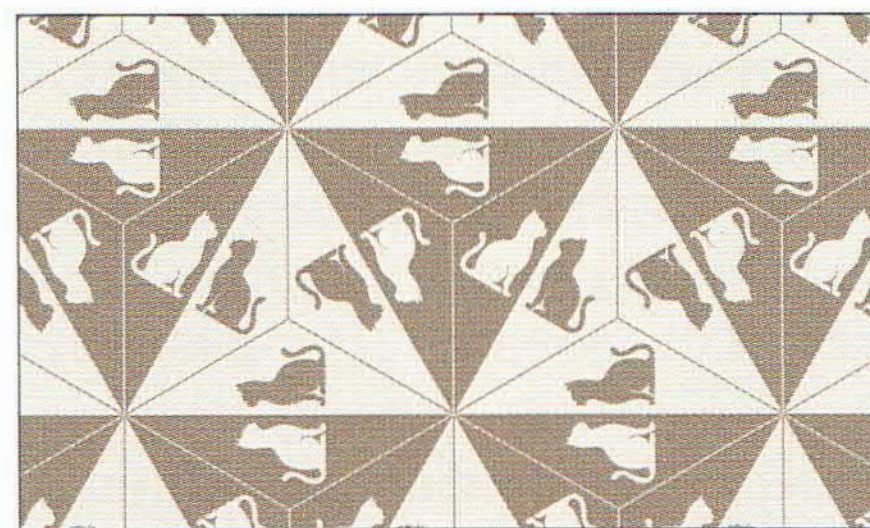
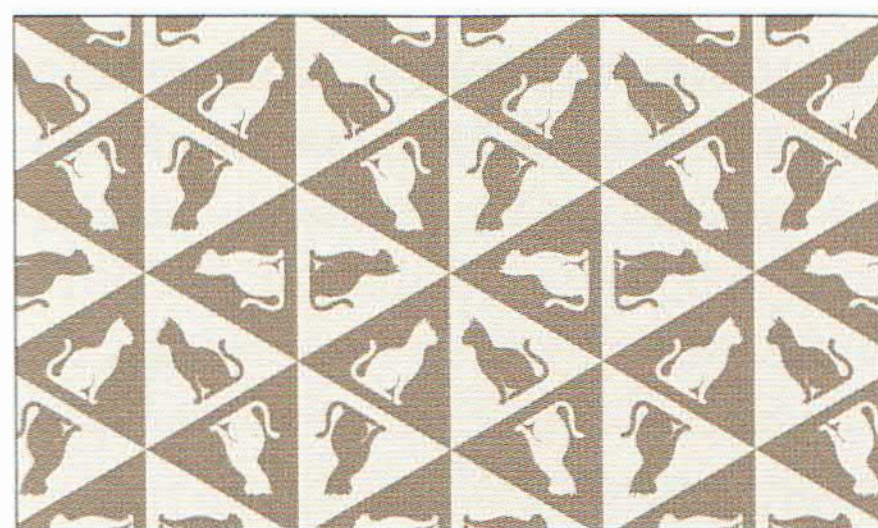
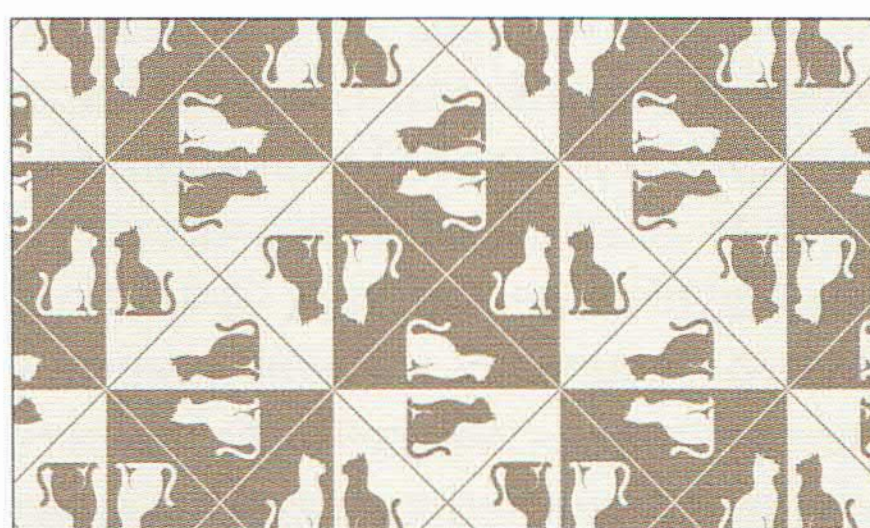
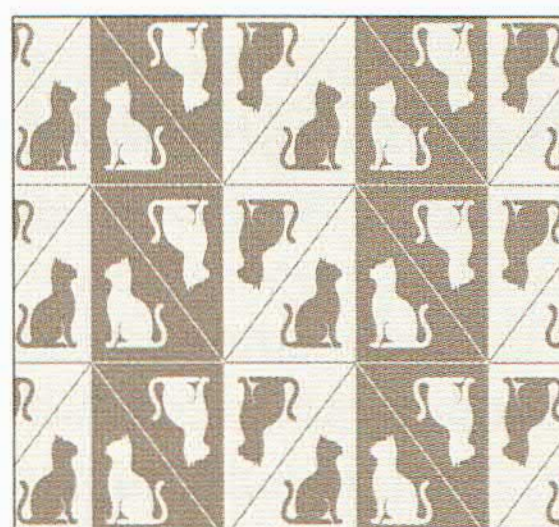
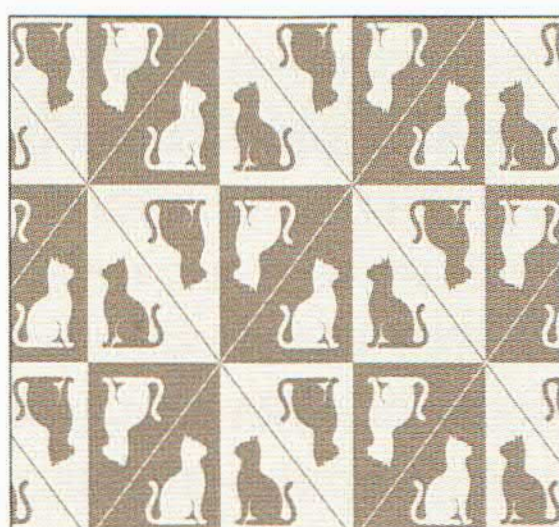
И хотя имеется всего 7 типов периодических бордюров, внутри исходного прямоугольника можно выбирать узор произвольно, а значит, и запас красивых бордюрных узоров неисчерпаем.

Бесконечный плоский периодический орнамент обладает двумя чертами. Во-первых, его правильность имеет математическую формализацию — движения, переводящие орнамент в себя, образуют группу. Во-вторых, весь орнамент можно построить с помощью этих движений из какого-то небольшого его фрагмента (ячейки). Исходя из этого, можно описать все возможные группы движений орнамента.

Традиционно движения плоскости распределяются по видам $\{S, R, T, G\}$: S — симметрии относительно прямых, R — повороты, T — параллельные переносы, G — скользящие симметрии. Оказывается, в группе движений орнамента должны быть переносы по непараллельным направлениям (как минимум двум), а повороты возможны только на углы вида $360^\circ/n$ при n , равном 2, 3, 4 и 6 (в частности, n не может равняться 5). Всего таких групп, называемых плоскими кристаллографическими (или фёдоровскими), — только 17. Это было доказано выдающимся российским кристаллографом Евграфом Степановичем Фёдоровым.

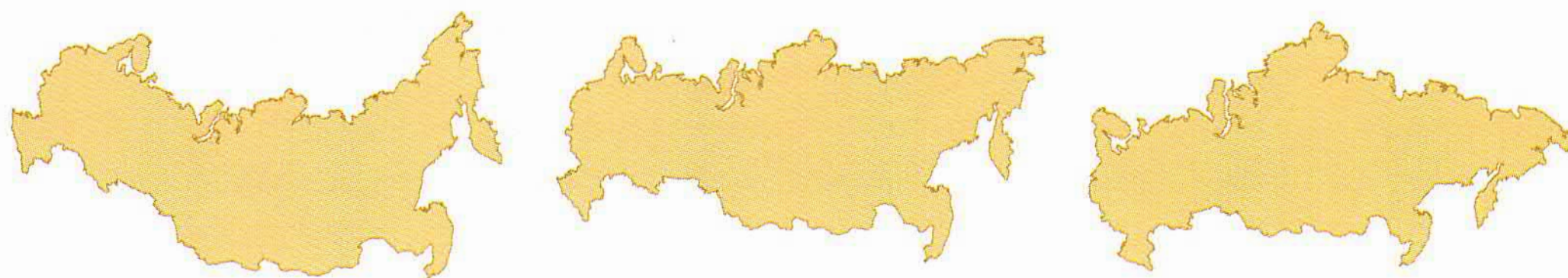
И создание теории групп как раздела математики, и применение её методов к классификации орнаментов — события XIX века. Интересно, что уже за 500 лет до этого все 17 плоских кристаллографических групп нашли воплощение в работах художников. Как и в случае бордюров, безграничность мира плоских орнаментов порождена разнообразием узоров в образующей «ячейке»: в разных культурах в орнаментах встречаются геометрические фигуры, люди, растения, животные.





Картографические проекции

География, буквально «описание Земли», начинается с наглядного представления. Самый популярный способ — географическая карта. Но разглядывание карты может удивить и озадачить. Например, остров Гренландия на некоторых картах занимает больше места, чем вся Южная Америка, хотя его площадь в восемь раз меньше. «Белый континент» Антарктида может предстать и почти круглым пятном, и широкой полосой, занимающей всю нижнюю часть карты Земли. А изображения основной материковой части России могут отличаться настолько, что на одних картах очертания Чукотки визуально находятся на одном уровне с контурами полуострова Таймыр, на других — могут быть выше или ниже. На самом деле именно на Таймыре находится северная оконечность материковой России — мыс Челюскин. Чтобы научиться «читать» географические карты, стоит познакомиться с методами их создания.



Форма Земли достаточно сложна (её название — геоид), но близка к эллипсоиду вращения с полуосями 6378 км и 6357 км: «несферичность» её настольной копии была бы миллиметровой. Наилучший «портрет» Земли — глобус: проекция поверхности Земли на сферу.

Естественная система координат на глобусе (и на Земле) — сферическая, положение точки определяется двумя углами. Долгота отсчитывается от нулевого (Гринвичского) меридиана, широта — от экватора. На глобусе эту систему координат представляет сетка — параллели и меридианы с фиксированным угловым шагом (обычно 10° — 20°).

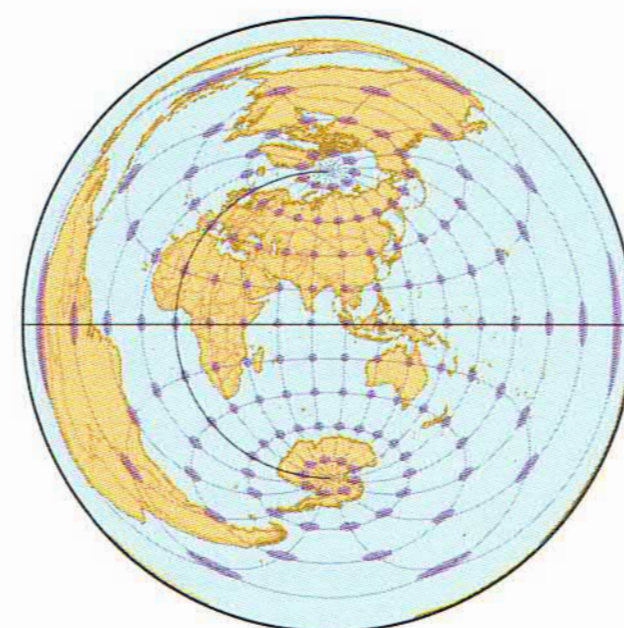
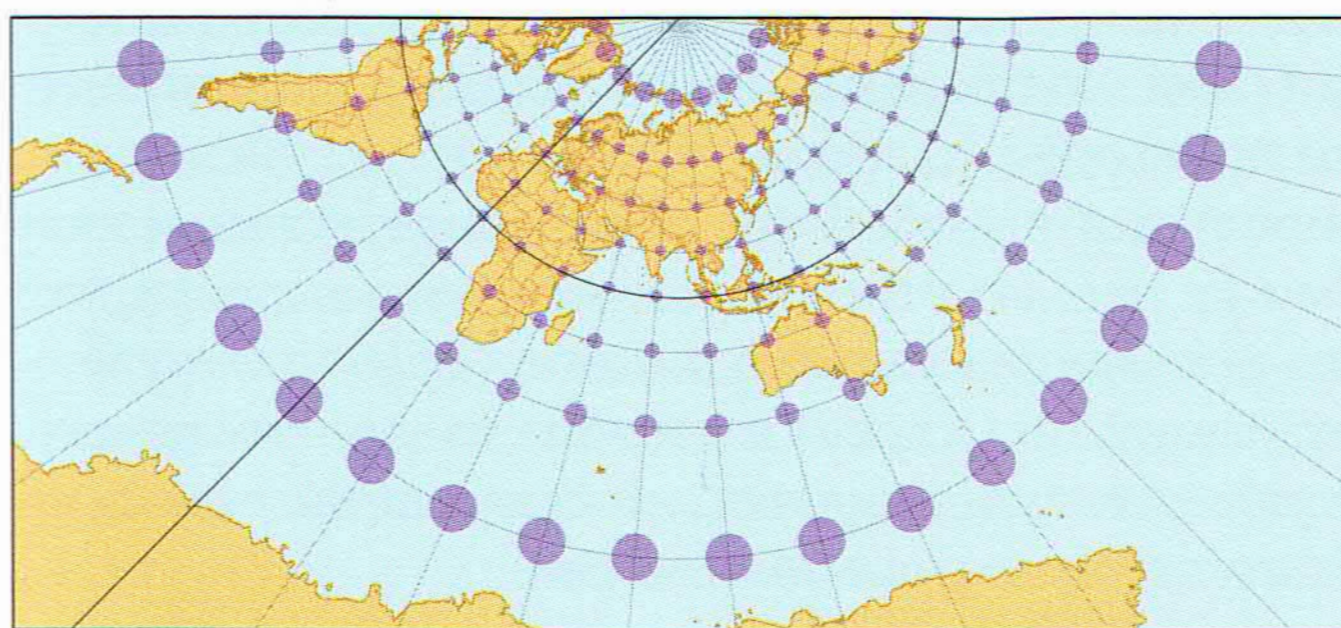
Наглядно-понятный глобус обладает и неустранимыми недостатками: например, невозможно изготовить глобус, на котором детально представлена какая-то местность или город. Получить правильное и удобное изображение земной поверхности на плоской карте — основная задача картографии. Математическая постановка: найти отображение сферы (глобуса) на плоскость (карту), вывести формулы, связывающие координаты точек на глобусе и на карте.

Этой задачей и близкими вопросами геодезии занимались многие великие математики, соединявшие изучение оригинальной математи-

ческой проблемы с разработкой ценных практических инструментов. Леонард Эйлер писал теоретические работы, а ещё лично чертил и редактировал карты, руководил картографическими работами в Академии наук и гордился тем, что способствовал приведению российской географии «в исправнейшее состояние». К. Ф. Гаусс не только открыл важнейшую общую теорему, но был также и активным участником полевых геодезических измерений. П. Л. Чебышевым была сформулирована теорема о «наивыгоднейшей» (в некотором смысле) проекции, которая даёт практические рекомендации картографам.

Казалось бы, окончательное наилучшее решение задачи уже должно быть найдено. Но на самом деле невозможно создать карту точную, сохраняющую все расстояния, поэтому на любой плоской карте есть искажения. Это следует из теоремы Гаусса, названной им самим «замечательной»: при отображении, сохраняющем расстояния, одной поверхности на другую будут совпадать их гауссовы кривизны в соответствующих точках. Гауссова кривизна — это числовая характеристика, которая даёт представление о степени и характере искривлённости поверхности в данной точке. И поскольку у глобуса (сферы) кривизна всюду положительна, а у плоскости — нулевая, отобразить сферу на плоскость с сохранением расстояний не удастся. С другой стороны, можно доказать, что поверхность нулевой кривизны можно «развернуть» на плоскость с сохранением расстояний.

Причина появления искажений в том, что при любой проекции (отображении) сферы на плоскость расстояния между точками изменяются неодинаково. Степень растяжения или сжатия длин путей может зависеть и от положения точки на глобусе, из которой выходят пути, и даже от направления их выхода из точки. Визуальное представление об искажениях можно получить, рассматривая на карте



образы одинаковых маленьких окружностей на глобусе. Эти образы, называемые эллипсами искажений, демонстрируют зависимость изменений в равноудалённости точек окружностей от их центров, то, как эти изменения выглядят по разным направлениям.

Но если искажения всюду и разные, то что означает масштаб, всегда указываемый на карте? Все привыкли думать, что это единый коэффициент изменения размеров изображений объектов на карте в сравнении с размерами самих объектов на поверхности Земли. На самом деле на карте приводится так называемый главный масштаб — отношение размеров картографируемого глобуса и Земли. Это оправданно, поскольку проекция глобуса на карту всегда выбирается так, чтобы были точки или линии без искажений. Но необходимо добавить и предостережение: для других линий масштаб отличается от главного и вычисление реальной длины пути по измерениям на карте не сводится к умножению на главный масштаб.

Для использования карт в практических задачах желательно, чтобы какие-то характеристики (свойства) на глобусе сохранялись при отображении на карту. По этому принципу среди картографических проекций выделяют три основных типа: равновеликие, равнопромежуточные, равноугольные.

Равновеликая проекция при отображении на карту сохраняет площади всех областей. Следовательно, отношение площадей участков земной поверхности сохраняется не только на глобусе, но и на карте. Заметный недостаток проекции — значительное искажение на общей карте Земли контуров крупных областей (например, континентов). Карты данного типа применяются как для решения задач в масштабах Земли, когда надо сравнивать площади больших территорий и целых стран, так и в делах, требующих подробных карт, планов, — в сельском хозяйстве, геологоразведке.

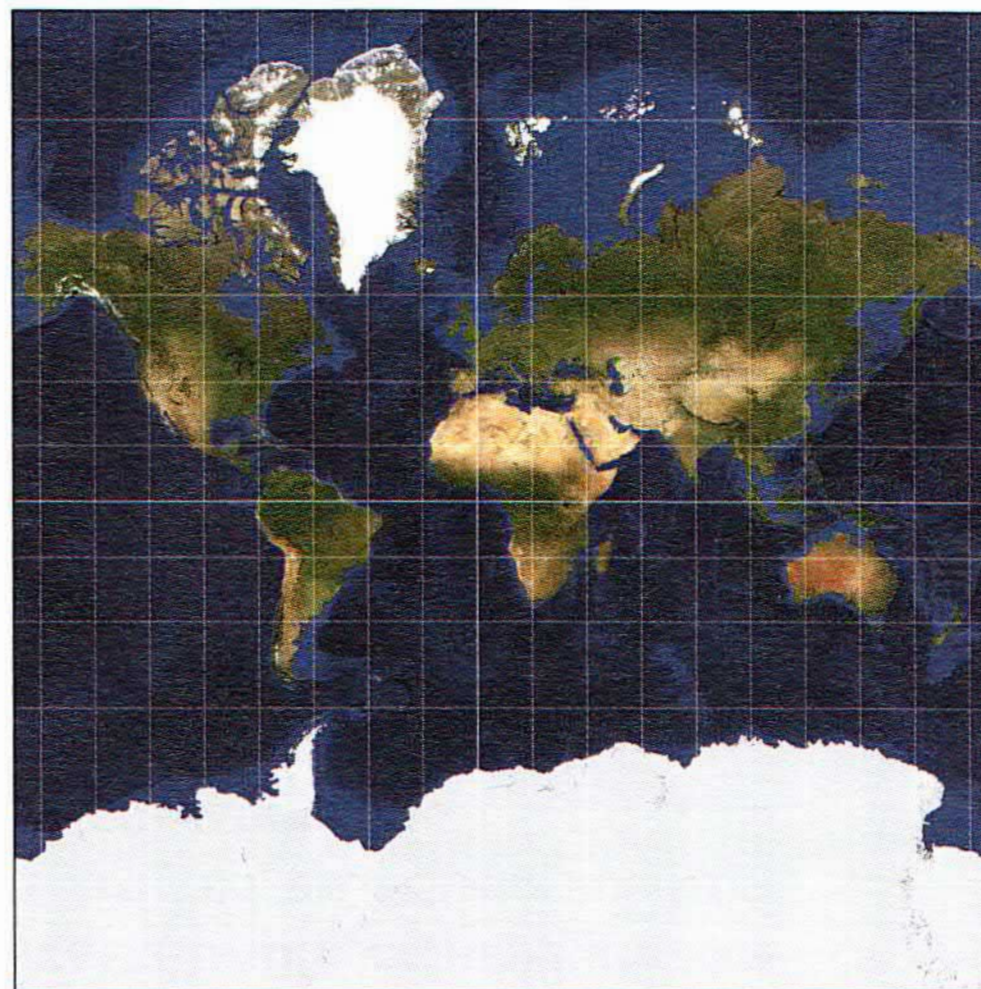
Равнопромежуточность подразумевает сохранение каких-либо длин. Часто используемый вариант — сохранение длин (главного масштаба) на меридианах. Искажения углов (контуров областей) на таких картах меньше, чем при равновеликой проекции. Карты в равнопромежуточной проекции привычны, «хорошо читаются».

Равноугольная проекция в любой точке сохраняет углы между путями, выходящими из неё. Из этого условия можно вывести, что масштаб в точке для всех направлений одинаков (образы окружностей на сфере — окружности на карте) и зависит только от положения точки. Карты с равноугольной проекцией стали незаменимыми спутниками в путешествиях, на суше и на море.

Например, в спортивном ориентировании удобно работать с картами в равноугольной проекции. Во-первых, равноугольность позволяет точно идти по азимуту, во-вторых, на такой карте маленькие территории изображаются почти без искажений их формы, что позволяет узнавать детали местности.

При плавании в открытом море, напротив, видимых ориентиров нет. Более четырёх веков главной морской картографической проекцией является равноугольная проекция Меркатора (1569 год). На такой карте меридианы и параллели представлены вертикальными и горизонтальными (взаимно перпендикулярными) прямыми.

Чтобы решить задачу прокладывания курса корабля, можно просто соединить на карте два пункта отрезком и определить угол пересечения прямой с меридианами. Вследствие равноугольности проекции Меркатора под тем же углом будет пересекать меридианы Земли маршрут, определяемый данной прямой. Полученный маршрут постоянного путевого угла — не наикратчайший, но управление кораблём будет простым и понятным: держать постоянный курс.



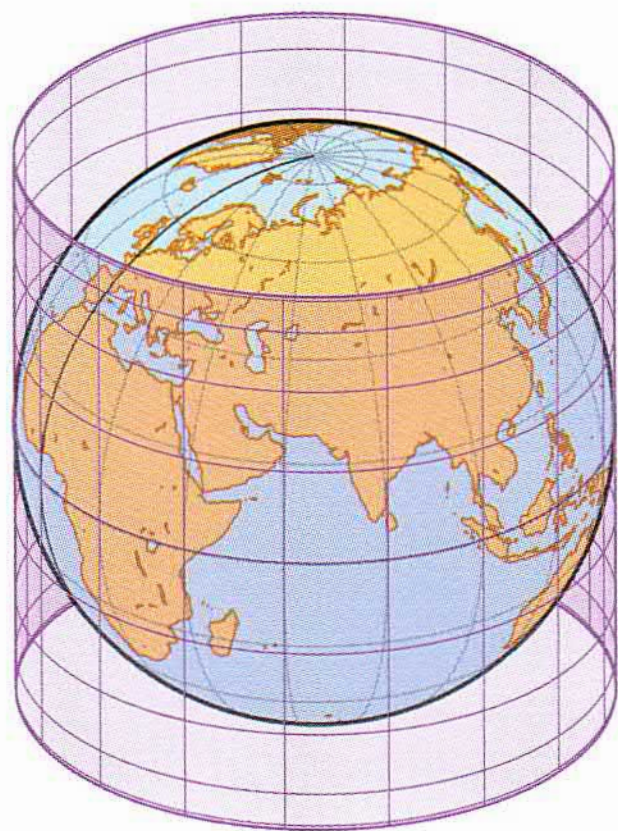
Проекция Меркатора служит основой также «сухопутных» топографических карт в ряде стран Европы и Америки. Она же — основа самых распространённых электронных карт, установленных на каждом смартфоне, и программ в навигаторах.

Построить картографическую проекцию с заданными свойствами геометрически возможно разными способами. Среди самых распространённых вариантов два «подсказывает» упоминавшаяся теорема Гаусса — это цилиндрическая и коническая проекции. На первом шаге сфера отображается на развёртывающуюся поверхность (нулевой кривизны) — цилиндр или конус. А затем эту поверхность с полученным изображением «разворачивают» на плоскость, уже без искажений. Самый наглядный вариант, можно сказать, классический — когда ось цилиндра (или конуса) совпадает с осью Земли.

Если цилиндр касается глобуса, то экватор — их общая линия — при проекции «остаётся на месте», поэтому масштаб вдоль экватора не меняется. Более того, касание поверхностей означает их сходство в малой окрестности точки касания, поэтому неудивительно, что и искажения длин при переходе со сферы на цилиндр оказываются весьма небольшими в узкой полоске вдоль экватора.

Можно выбрать и цилиндр, радиус которого меньше, чем у глобуса. Пересечением сферы и цилиндра будут две окружности,

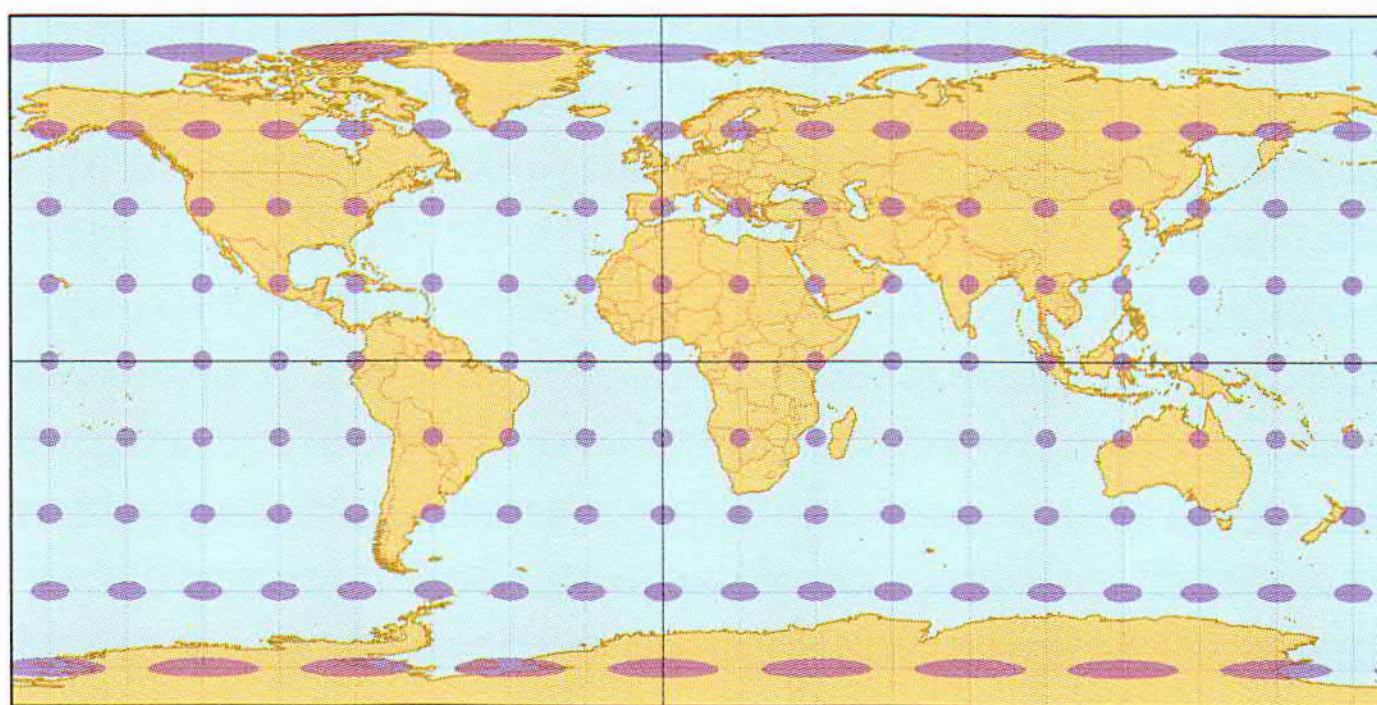
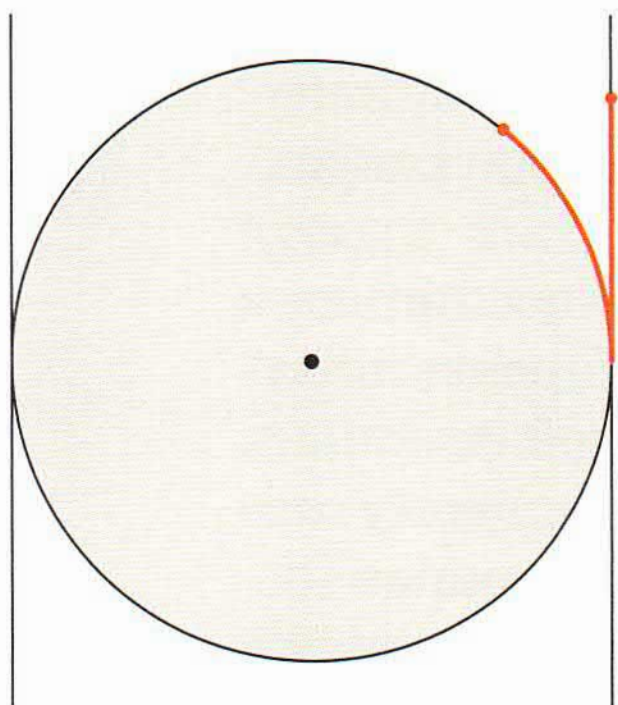
масштаб будет сохраняться вдоль обеих параллелей. В частности, это можно использовать при картографировании территорий, расположенных и к северу, и к югу от экватора. Но и для территории в одном полушарии такая проекция представляет интерес: можно обеспечить отсутствие искажений в точках важной для страны параллели.



При естественном проецировании глобуса на цилиндр меридианы переходят в вертикальные прямые, параллели — в окружности. При разворачивании цилиндра окружности-параллели переходят в прямые, и сетка меридианов и параллелей на глобусе превращается в прямоугольную сетку на карте-прямоугольнике.

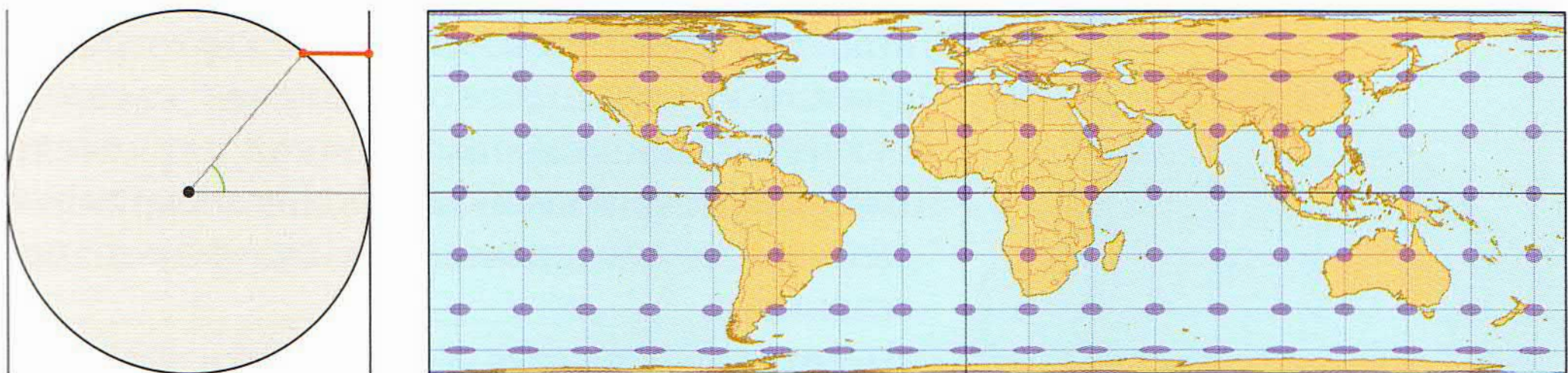
Если цилиндр касается глобуса, то декартова координата x пропорциональна долготе: $x \sim \lambda$. Масштаб на каждой параллели будет постоянным, но различным на разных параллелях (поскольку на глобусе они имеют разную длину). А вот с декартовой координатой y однозначности нет: картинку на цилиндре можно растягивать по вертикали, причём коэффициент растяжения может зависеть от широты точки.

Например, можно выбрать растяжение так, что проекция окажется равнопромежуточной (на меридианах). Достаточно в качестве второй декартовой координаты взять широту: $y \sim \varphi$. Геометрически: ниточку, натянутую от экватора до полюса по меридиану, распрямляют на цилиндр. Эту проекцию придумал древнегреческий картограф Марин Тирский (II век н. э.). В современном мире она используется во многих геоинформационных системах.

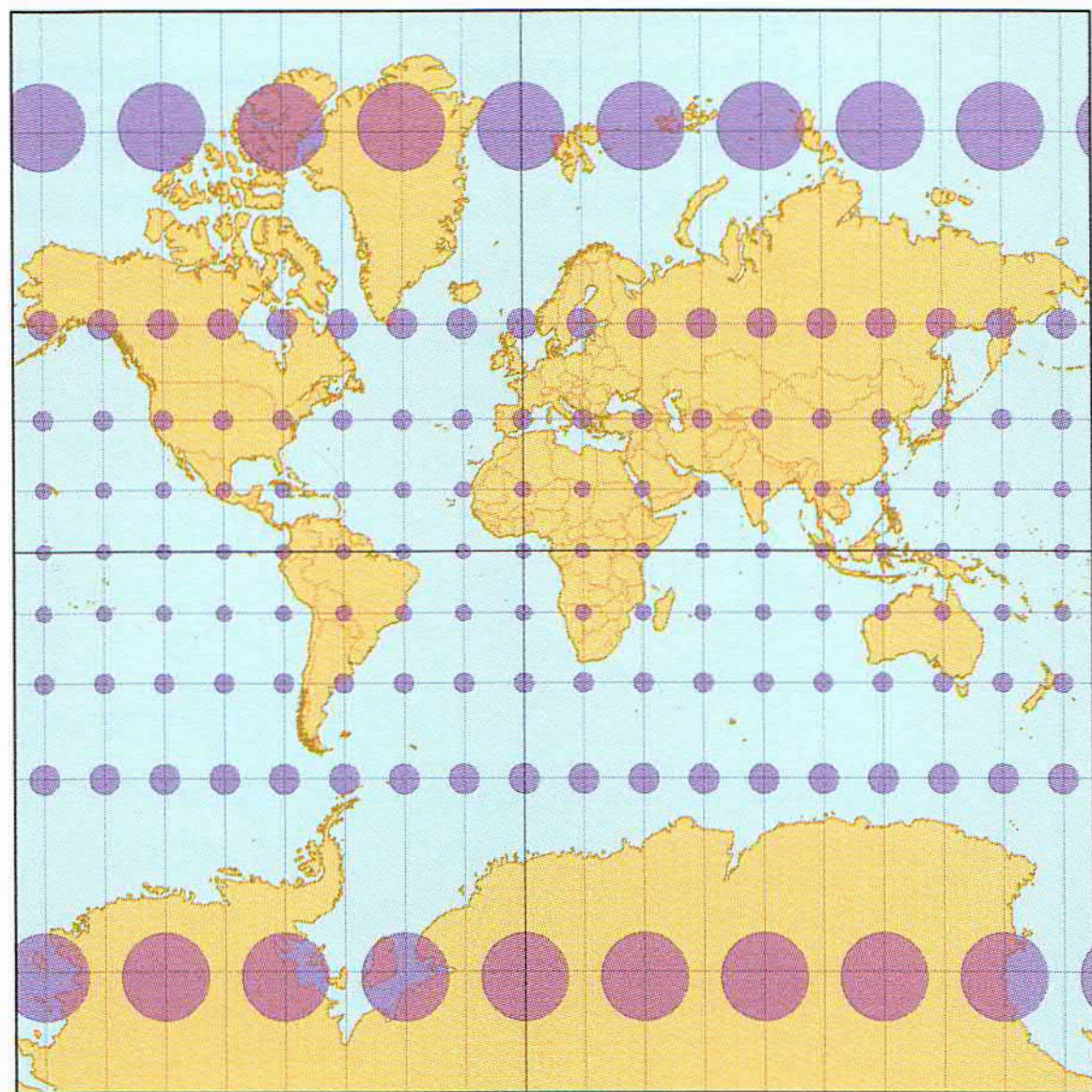


Равновеликую цилиндрическую проекцию разработал в 1772 году математик и астроном Иоганн Ламберт. (Кстати, он же чуть раньше

доказал, что знаменитое число π — иррациональное.) В этой проекции $y \sim \sin \varphi$, т. е. проецирование дуги меридиана на цилиндр происходит горизонтально, «по определению» синуса. Равновеликость вытекает из того, что площадь полосы между двумя параллелями на глобусе равна площади её горизонтальной проекции на цилиндр.



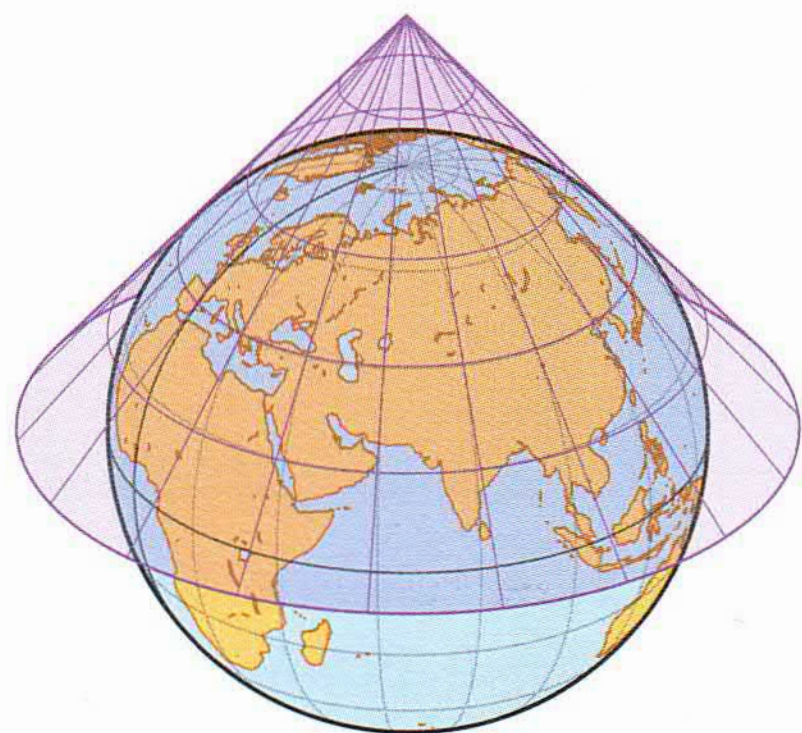
Можно построить и равноугольную проекцию, если вспомнить про связь равноугольности с независимостью масштаба в точках от выбора направлений выходящих путей. Надо выбрать растяжение так, чтобы в каждой точке масштаб вдоль параллели совпадал с масштабом вдоль меридиана. Масштаб вдоль параллели определяется тем, что проекция цилиндрическая, он увеличивается при движении от экватора к полюсу. Поэтому и расстояния между горизонтальными образами параллелей стандартной сетки на глобусе увеличиваются с ростом широты. В результате получается уже знакомая проекция Меркатора, в которой $y \sim \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$. При приближении точки на глобусе к полюсам значение этой функции «уходит в бесконечность», поэтому образы полюсов физически не могут появиться на такой карте, и обычно её укорачивают, не изображая на ней полярные шапочки.



Конические проекции похожи на цилиндрические — и по построению, и по свойствам. В конической проекции, как и в цилиндрической, меридианы переходят в прямые на плоской карте,

но параллели теперь превращаются в дуги окружностей, при этом линии разных семейств, как и раньше, пересекаются под прямыми углами.

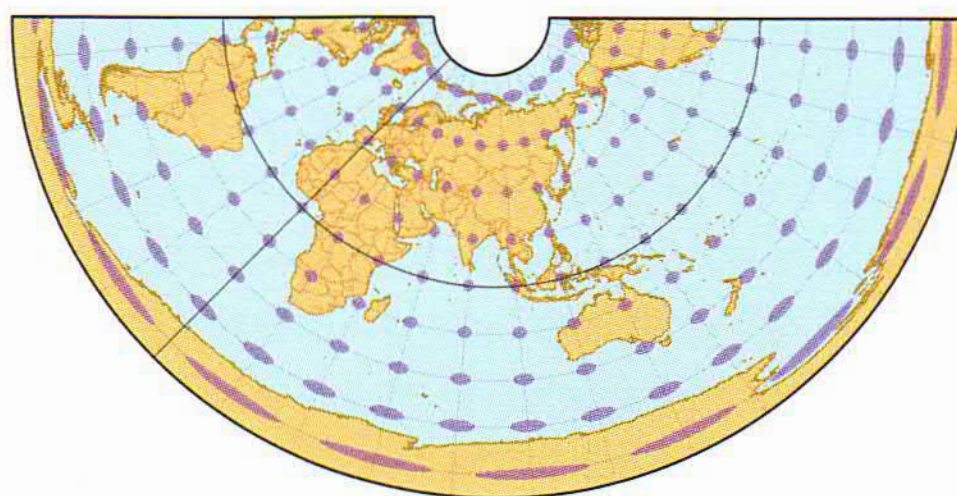
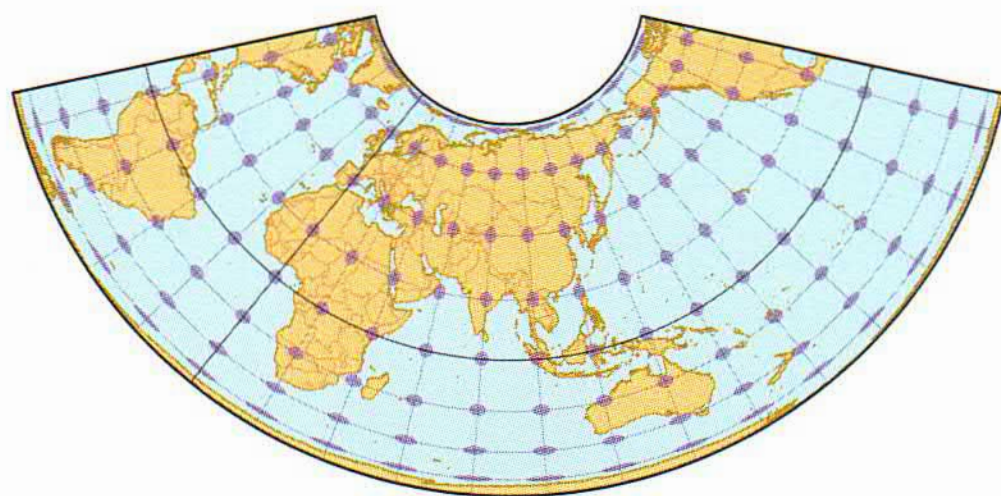
Но у конуса в сравнении с цилиндром больше настроек: можно выбирать и положение вершины на оси глобуса, и угол раствора. Например, можно выбрать параметры конуса так, что он будет



касаться поверхности глобуса по выбранной параллели на территории картографируемой страны. Как и в случае касания глобуса с цилиндром, в точках параллели масштаб сохранится, а в полосе, окружающей параллель, искажения будут незначительными.

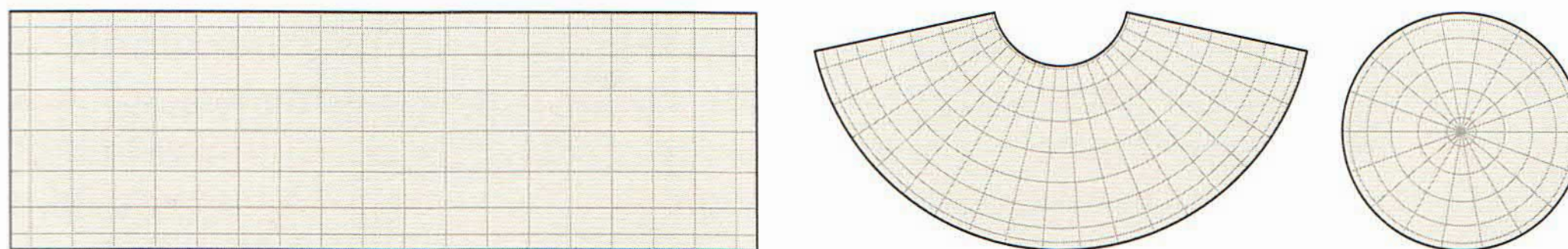
Пересечение конусом глобуса по двум окружностям, близким к северной и южной границам страны, сохраняет масштабы на окружностях и позволяет надеяться, что и в полосе между ними (т. е. на всей территории страны) искажения будут не очень значительными. Оба варианта «настройки» конической проекции особенно актуальны при картографировании стран, протяжённых по долготе — например, России.

В конической проекции (подобно цилиндрической) растяжением вдоль образующих конуса можно добиться, чтобы проекция стала равновеликой, равнопромежуточной или равноугольной. В российской картографии среди конических проекций равнопромежуточные чаще применяют для создания карт всей страны, а равноугольные используются для картографирования отдельных областей.



Координатные сетки цилиндрической или конической проекции в классическом варианте (когда ось совпадает с осью глобуса) можно узнать сразу. В первом случае сетка прямоугольная, во втором — состоит из прямых и дуг окружностей. Ещё одна

классическая координатная сетка состоит из концентрических окружностей и их радиусов. Окружности — образы параллелей на глобусе, радиусы — меридианов. Так выглядят карты в азимутальной полярной проекции, их форма соответствует сетке — круглая. «Изготовление» классической азимутальной сетки можно представить так: вырежем из резинового глобуса шапочку вокруг полюса и прижмём её к плоскости, чтобы она «расплющилась». Переход параллелей в окружности и меридианов в отрезки порождает соответствующие преобразования угловых координат на глобусе в полярные координаты на карте: широта становится характеристикой удалённости окружности от центра (радиус), долгота переходит в полярный угол.



Тип этой сетки не изменится, если растягивать картинку вдоль радиусов (коэффициент растяжения в точке, т. е. степень «расплющивания» резиновой шапочки, зависит от расстояния до центра и не зависит от направления). Свобода действий позволяет создавать азимутальные проекции с требуемыми свойствами.

Азимутальная равновеликая проекция (И. Ламберт): глобус лежит на плоскости карты; хорда, соединяющая точку касания с точкой на глобусе, «шарнирно» опускается в плоскости меридиана на карту, определяя проекцию точки.

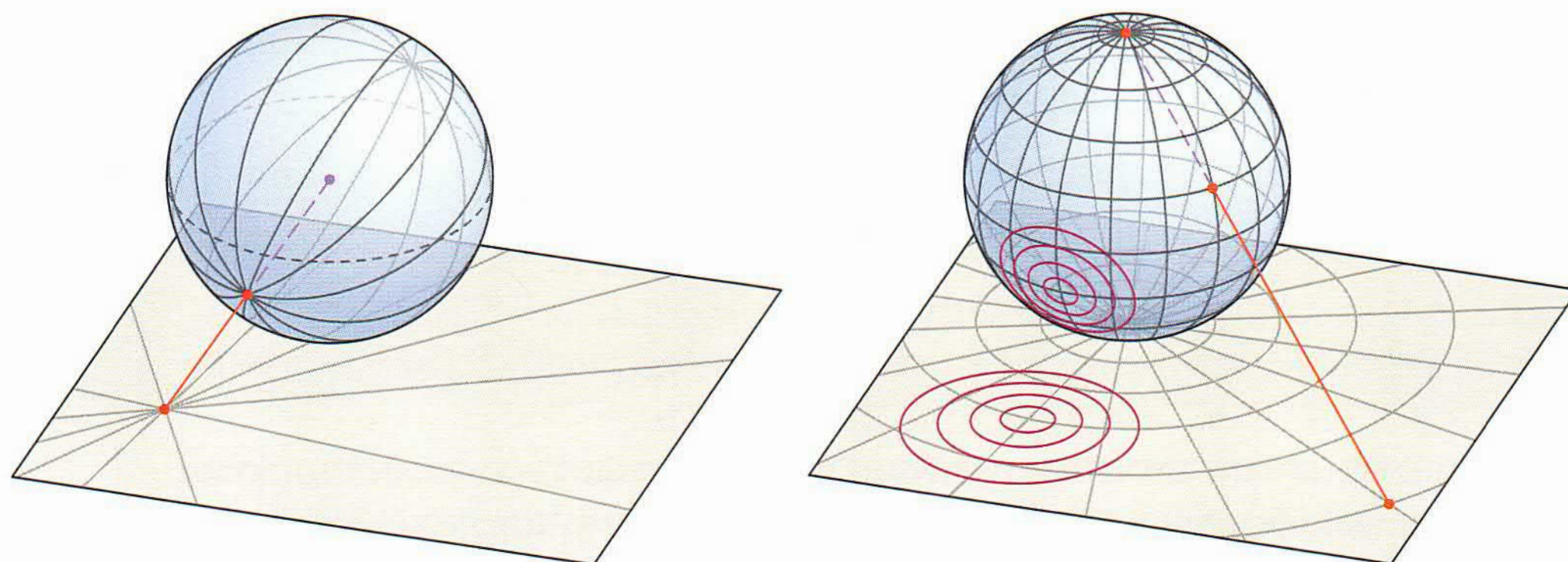
А на эмблеме Организации Объединённых Наций представлена азимутальная полярная равнопромежуточная проекция (не меняются расстояния вдоль меридианов).



Целая группа азимутальных проекций получается с помощью центрального проецирования. Полярный вариант — когда плоскость карты касается глобуса в одном из полюсов, а центр проекции находится на оси Земли: вне Земли — внешняя азимутальная проекция, на поверхности (в полюсе) — стереографическая, в центре Земли — гномоническая. Азимутальная проекция точки на глобусе — пересечение с плоскостью карты луча, проведённого из центра проекции через данную точку. В зависимости от расположения центра меняются и свойства проекции, и её возможные применения.

Внешняя проекция — взгляд из космоса со спутника на обращённое к нему полушарие Земли.

Стереографическая проекция — самая «умная», она сохраняет все углы (т. е. является равноугольной) и в дополнение сохраняет один, но важный тип кривых — окружности. Точнее, окружности, не проходящие через полюс, переходят в окружности на плоскости, а проходящие через него (не только меридианы!) — в прямые. Эта проекция представляет на карте всю поверхность Земли, исключая полюс — центр проекции.

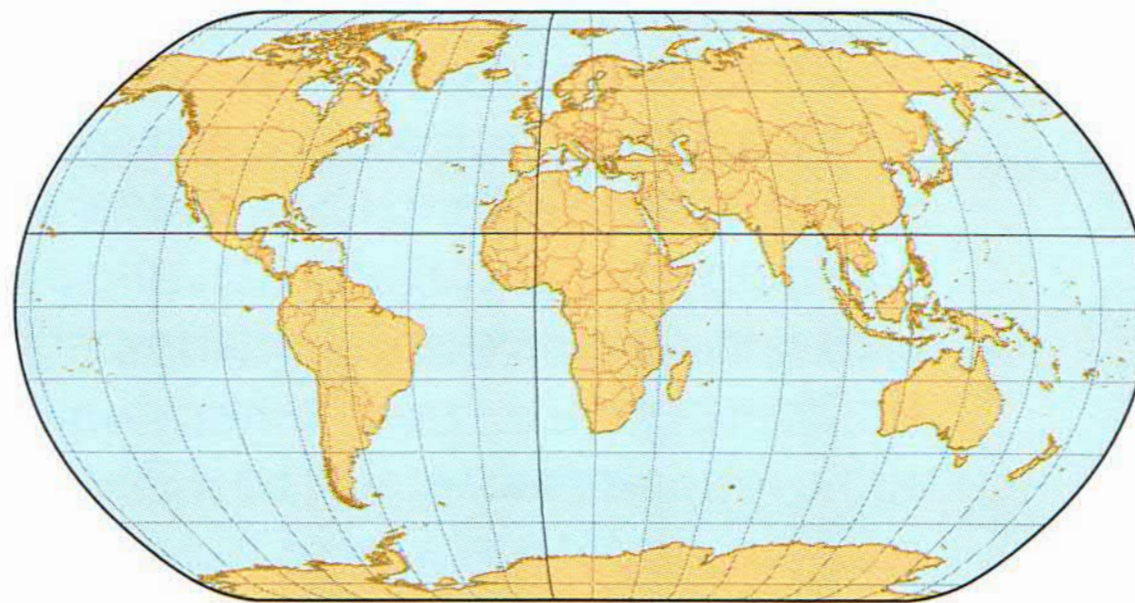


Если центр проекции находится в центре Земли, то дуга любого большого круга переходит в прямую. Это означает, что кратчайший путь между точками поверхности Земли изображается на карте отрезком прямой, становится «видимым». И хотя проекция не сохраняет расстояния, углы и площади, она оказывается полезным инструментом.

Все описанные картографические проекции были представлены в классических полярных вариантах — их ось совпадала с осью глобуса. Но для создания карт специального назначения можно перевести ось проекции и на другой земной диаметр. С одной стороны, привычные координатные сетки при косо́й проекции могут измениться до неузнаваемости, с другой — карта становится ещё более гибким инструментом. Например, подобную идею реализуют в авиационных и сейсмических картах, где расстояние от фиксированного центра до любой точки должно быть наглядным и легко измеряемым. Удобный вариант — азимутальная равнопромежуточная карта, центром которой служит центр событий.

Рассмотренная классификация картографических проекций, основанная на способе проецирования (цилиндрические, конические, азимутальные) и на типе искажений (равновеликие, равнопромежуточные, равноугольные), не является полной.

Читатель может встретить проекции, координатные сетки которых лишь напоминают одну из классических. В названиях таких проекций отражают и то, на что они похожи, и то, что они «ненастоящие». Например, есть общие карты Земли, на которых параллели — прямые, а меридианы при приближении к полюсам изгибаются в сторону Гринвичского меридиана. Такая сетка напоминает классическую прямоугольную, и проекцию называют псевдоцилиндрической.



Интересные и полезные проекции можно получить, если условия сохранения свойств сделать менее категоричными, точными, жёсткими. В частности, речь может идти о создании «гармоничной» проекции, в которой всё хорошо в среднем: минимизируется суммарное искажение углов, площадей и т. д. Задача отыскания такой проекции была поставлена П. Л. Чебышевым, и им же была сформулирована теорема, ставшая в картографии рабочим инструментом: среди равноугольных проекций области земной поверхности наилучшей является та, у которой масштаб вдоль границы — величина постоянная.

До сих пор рассказ о картографических проекциях носил описательно-наглядный характер. В математической картографии уже давно чисто геометрические подходы заменены аналитическими, формульными. Задачи, условия, требования, которым должна соответствовать создаваемая карта, превращаются в уравнения, связывающие координаты точек на глобусе и на карте. На этом языке может быть представлено всё: от желания получить прямоугольную сетку до равноугольности будущей проекции. Причём в уравнениях можно отразить не только «упрощённый» сферический глобус, но и более близкий к реальности глобус-эллипсоид. Уравнения сложные, их изучение и решение всегда требовало не только упорства и изобретательности, но и использования «новейших» математических достижений. Ещё в проекции Меркатора появились тангенсы и диковинные для того времени логарифмы; стереографическая проекция тесно связана с изучением комплексных чисел. И в наши дни с применением разнообразных математических инструментов разрабатываются новые картографические проекции. Но теперь они служат не только штурманам и путешественникам, а всем, кто выбирает маршрут в современном мире.

Арифметические фокусы

Знание элементарных свойств чисел и умение безошибочно выполнять простейшие арифметические действия позволят вам удивить друга, представ перед ним в роли математического мага.

Например, попросите друга проделать следующие действия: загадать натуральное число; прибавить к нему 5; умножить результат на 2; вычесть из полученного загаданное число; проделать последнюю операцию ещё раз. После выполнения всех операций вы можете поразить друга, сказав, что знаете полученное число — 10.

Прозрачность фокуса становится очевидной, если словесную инструкцию операций с задуманным числом x представить как последовательность арифметических действий: $(x + 5) \cdot 2 - x - x = 10$.

«Дар предвидения» можно проявить и в случае, если итоговый результат оказывается задуманным числом (независимо от его значения). Попросите друга задумать трёхзначное число и записать его подряд дважды. Полученное шестизначное число предложите разделить на 7, полученное — на 11, и ещё раз — на 13. Во-первых, шестизначное число разделится нацело, во-вторых, результатом окажется задуманное число.

Секрет фокуса раскрывают два факта: результат умножения трёхзначного числа на 1001 совпадает с тем, что получается, если это число выписать дважды подряд (шесть цифр); а разложение на множители числа 1001 имеет вид $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Делимость чисел (включая деление с остатком) — важный источник, механизм арифметических фокусов. Попросите друга загадать двузначное число (не меньше дюжины); умножить это число на 9; назвать любые две цифры получившегося трёхзначного числа. После этого вы сразу называете третью цифру.

Признак делимости на 9, основа фокуса, выводится из представления трёхзначного числа по сотням, десяткам и единицам: $100a + 10b + c = (99a + 9b) + (a + b + c)$. В этом разбиении первая скобка делится на 9, поэтому делимость числа на 9 равносильна делимости на 9 суммы его цифр $(a + b + c)$.

В фокусе трёхзначное число — результат умножения задуманного числа на 9, поэтому надо подобрать третью цифру так, чтобы сумма всех цифр делилась на 9. Если сумма названных другом двух цифр не равна 9, то это делается однозначно, а вот если она равна 9, то придётся предложить два варианта: третьей цифрой может быть и 0, и 9.

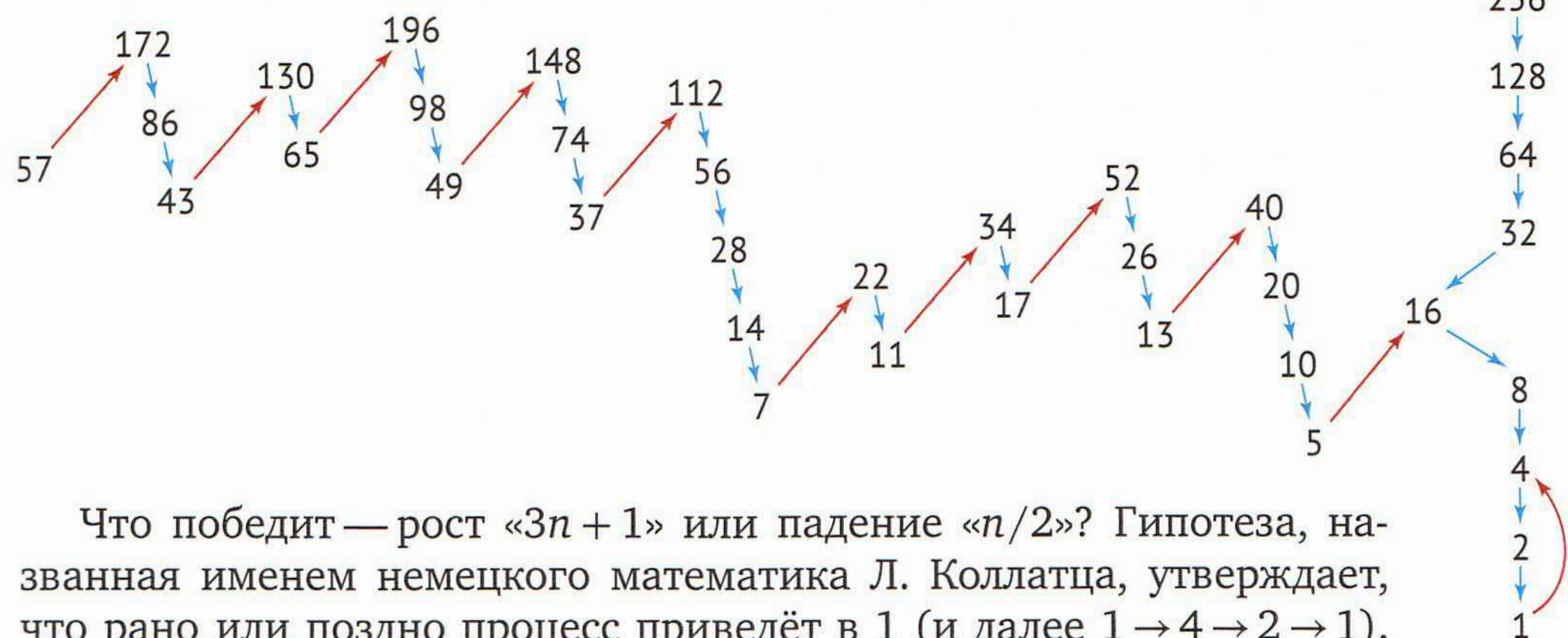
Другой тип фокусов — угадывание задуманного числа. В качестве примера научимся «определять» день рождения незнакомого человека: день x и месяц y . Попросите знакомого умножить x (день рождения) на 2; прибавить 5; умножить полученную сумму на 50; прибавить y (месяц рождения) и вслух назвать полученное число. После этого вы сможете назвать дату рождения: день и месяц.

Объяснение фокуса опять дают формулы, в которых записаны действия: $(x \cdot 2 + 5) \cdot 50 + y = 100x + y + 250$. Здесь y — однозначное или двузначное число, от 1 до 12, поэтому его добавление к $100x$ не «портит» цифровую запись x . Например, 29 марта в виде $100x + y$ предстанет как 2903, а 22 декабря — как 2212.

Теперь можно сформулировать правило для фокусника: из числа, названного знакомым, надо мысленно вычесть 250, в полученном числе последние две цифры представляют y , а остальные — x .

Понятно, что можно придумать множество подобных «волшебных» инструкций. Но иногда простые с виду инструкции отправляют начальное число в путешествие, длительность и результат которого невозможно даже оценить. Вот одна из нерешённых математических проблем, сформулированная в далёком 1937 году.

Пусть n — натуральное число. Если число нечётное, то оно увеличивается, превращаясь в $3n + 1$; а если чётное — то уменьшается, переходит в $n/2$. С новым значением проводят те же операции.



Что победит — рост « $3n + 1$ » или падение « $n/2$ »? Гипотеза, названная именем немецкого математика Л. Коллатца, утверждает, что рано или поздно процесс приведёт в 1 (и далее $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$).

Например, очевидно, что гипотеза верна для начальных чисел вида 2^k . Предположим, удалось проверить, что для чисел из какого-то множества гипотеза верна. Тогда рассмотрение траектории выбранного начального числа достаточно проводить до попадания в «проверенную область»: дальнейший результат предreshён.

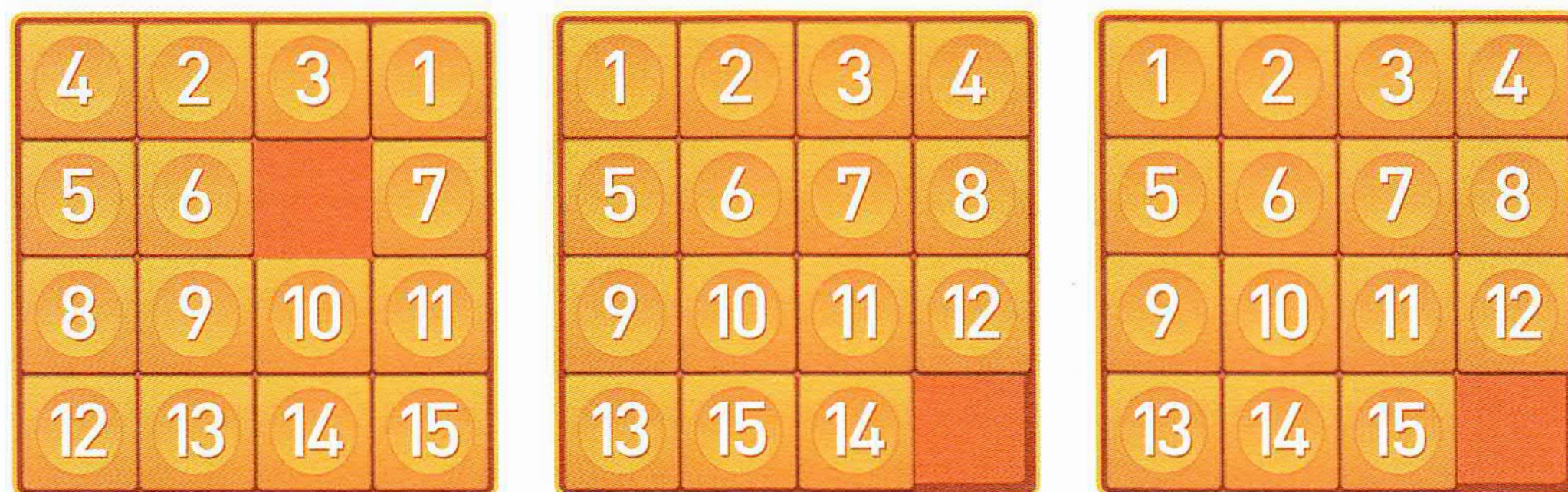
Строгого доказательства гипотезы Коллатца до сих пор нет, хотя с помощью компьютера она проверена для всех чисел до 10^{18} .

Игра в «15»

Вы высыпали на стол плитки игры в «15», затем уложили их в коробку случайным образом и приготовились играть (будем считать, что «случай» привёл нас к позиции на первом рисунке). По правилам игры плитки вынимать нельзя, а можно лишь передвигать по коробке, пользуясь свободным квадратным полем.

Можно ли упорядочить данную позицию, т. е. добиться положения, в котором числа на плитках расположены в порядке возрастания, а правый нижний квадрат в коробке свободен?

Допустим, что, пытаясь собрать позицию, вы получили почти то, что требуется, — на «правильных» местах расположились все плитки, кроме двух: только плитки с номерами 14 и 15 оказались переставленными («почти упорядоченная» позиция).



Оказывается, добавку «почти» нельзя убрать, барьер непреодолим: невозможно перейти из этой «почти упорядоченной» позиции к полностью упорядоченной.

Но как доказывать подобные утверждения? Одно дело — доказать, что задачу можно решить, для этого достаточно привести хотя бы одно конкретное решение. А вот доказать неразрешимость задачи означает: как-то убедиться, что к решению не приводит ни один способ действий.

Одна из идей, позволяющих доказать неразрешимость задачи, — выявление и использование свойств (характеристик) фигурирующих в ней объектов.

Инвариантом называется свойство объекта, которое не меняется при выполнении определённых преобразований. Если найден инвариант, значения которого для двух объектов не совпадают, то превратить один объект в другой рассматриваемыми преобразованиями не удастся. Иными словами, нахождение инварианта,

«различающего» два данных объекта, доказывает неразрешимость задачи превращения одного объекта в другой.

Применительно к нашей задаче про игру в «15» подобный подход подсказывает: надо придумать такую инвариантную (относительно разрешённых движений плиток) характеристику позиции, которая отличалась бы у полностью упорядоченной позиции и у «почти упорядоченной» позиции.

В случае игры в «15» таким инвариантом оказывается чётность суммы двух следующих чисел, A и B . Число A — это число пар плиток, в которых плитка с большим номером идёт перед плиткой с меньшим номером. Число B — это номер строки, в которой находится пустое поле. Например, в позиции на первом рисунке пять «неправильных» пар — $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$ — поэтому $A = 5$. Число B в этом примере равно 2. Убедимся, что чётность суммы $A + B$ является инвариантом.

Действительно, если игрок передвигает плитку горизонтально, то относительное расположение номеров не меняется, числа A и B тоже не меняются.

Если игрок перемещает плитку вертикально (в соседнюю строку), то оба числа, A и B , поменяют чётность. Число B — по определению, так как номер строки изменится на единицу. Чётность A изменится из-за того, что при вертикальном сдвиге плитки её номер «перепрыгивает» через три числа (сдвиг вниз — через последующих, вверх — через предыдущих), а «перепрыгивание» через каждое число изменяет A на $+1$ или на -1 . Например, в позиции на первом рисунке при сдвиге плитки «3» вниз номер 3 «перепрыгнет» через номера 1, 5 и 6. Из одновременного изменения чётности чисел A и B следует, что чётность суммы $A + B$ не изменится.

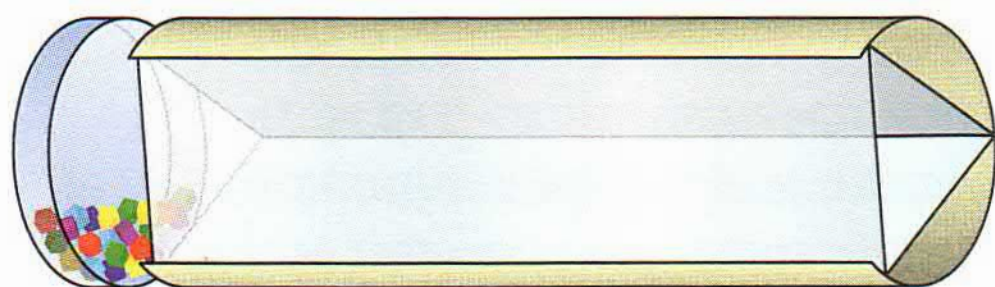
Итак, чётность суммы $A + B$ — инвариант. Этот инвариант делит все позиции игры в «15» на два непересекающихся семейства — «чётные» и «нечётные». Теперь у нас появился инструмент «предвидения»: если у позиции данный инвариант — нечётный, то эту позицию упорядочить нельзя, даже пытаться не стоит...

В наших примерах первые две позиции — «нечётные», а третья, полностью упорядоченная — «чётная». Поэтому упорядочить ни первую, ни вторую не удастся.

А вот свести первую позицию ко второй по правилам игры действительно было можно: оказывается, все «нечётные» позиции эквивалентны, сводимы одна к другой. Также эквивалентны между собой и все «чётные» позиции, в частности, любую из них можно упорядочить. Это можно доказать с помощью раздела математики, называемого теорией групп.

Калейдоскоп

Калейдоскоп был придуман в начале XIX века. Его название происходит от древнегреческих слов *καλός* — красивый, *εἶδος* —



вид, *σκοπέω* — наблюдаю. Это оптическое устройство, состоящее из трёх зеркал прямоугольной формы, сложенных в виде призмы («трубки») с треугольным сечением.

В одном из оснований призмы — двойное стеклянное дно, между стёклами насыпаны мелкие разноцветные предметы. В противоположном основании призмы — окуляр. При фиксированном положении калейдоскопа из предметов складывается картинка в «основном» треугольнике. Она многократно отражается в стенках-зеркала, и наблюдатель через окуляр видит симметричный разноцветный узор.

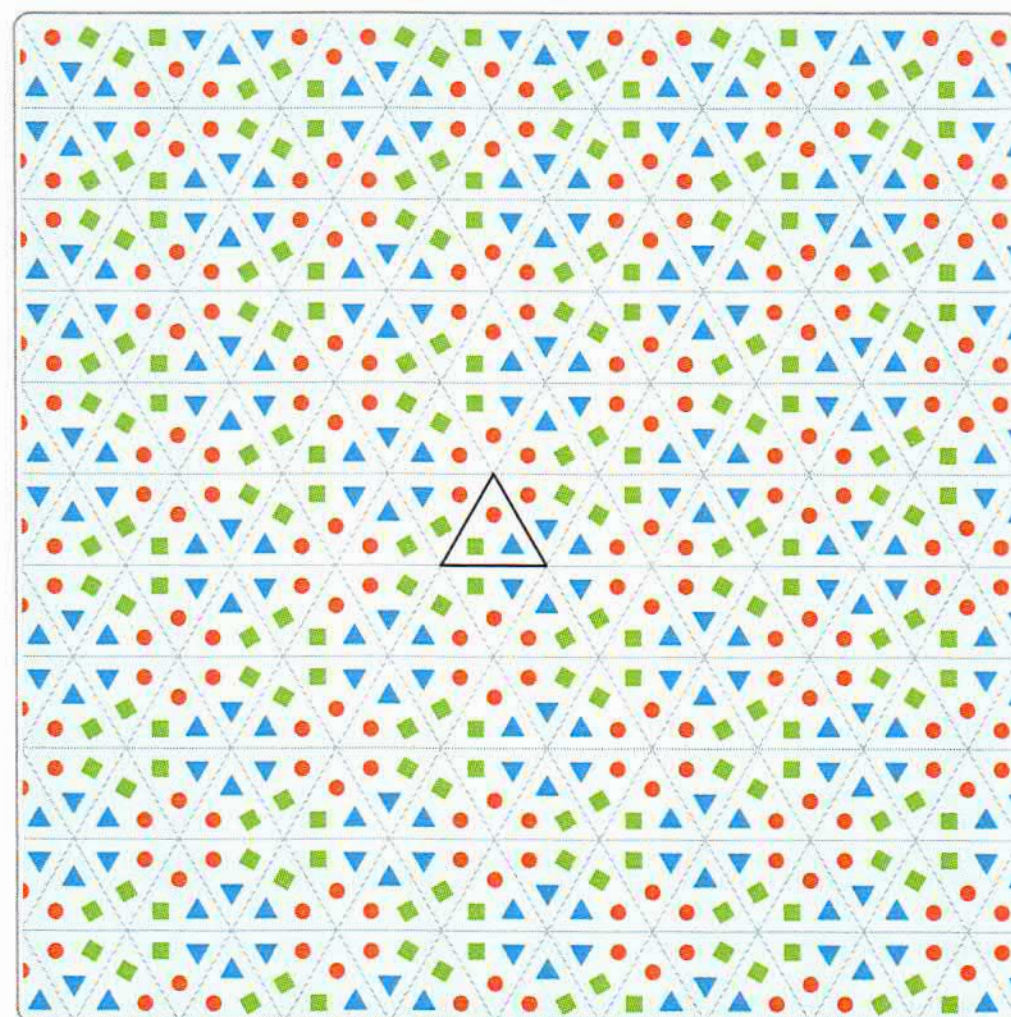
При повороте калейдоскопа предметы пересыпаются, возникает новый, но тоже симметричный узор. Чтобы обеспечить симметрию узора и его «устойчивость» — лишь в этом случае устройство называют калейдоскопом, — для построения призмы подходят только три вида треугольников.

В самом распространённом типе калейдоскопов треугольник в сечении призмы равносторонний, у которого углы равны 60° . Этот вариант удобен и с производственной точки зрения — все зеркала одинаковые.

Два других варианта — прямоугольные треугольники с углами $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$ и $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$.

Если рассматривать призмы не только с треугольным основанием, то калейдоскоп можно построить и на основе прямоугольника.

Чтобы понять, почему для изготовления калейдоскопа «на треугольниках» подходят только перечисленные варианты, вспомним, как формируется отражение в зеркале.



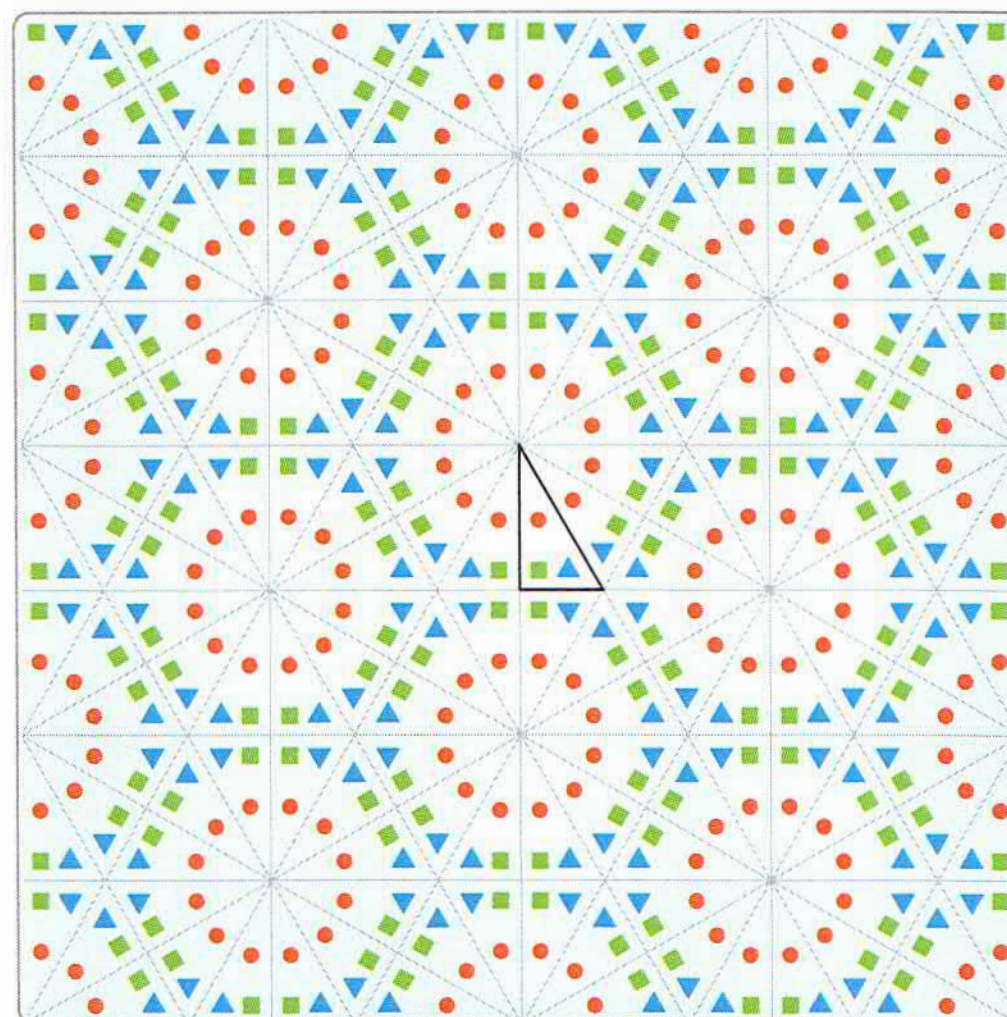
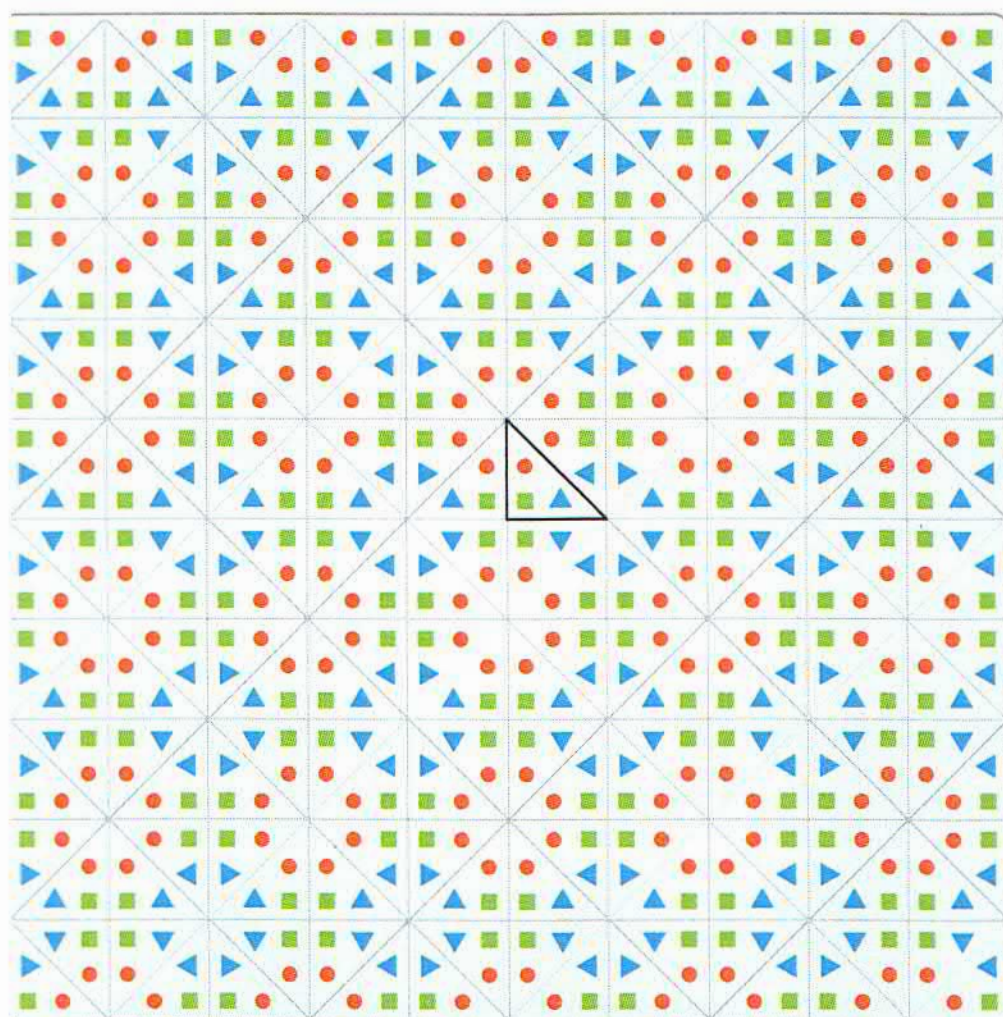
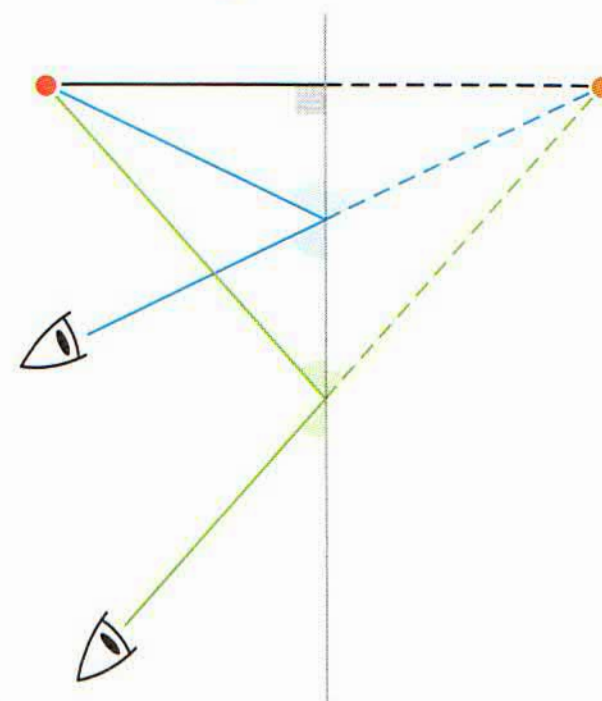
Отражение (образ) в зеркале какого-либо объекта при любом положении наблюдателя будет казаться ему реальным, неподвижным объектом, находящимся в пространстве за зеркалом и расположенным симметрично оригиналу относительно плоскости зеркала.

Реальный мир, отражаясь в зеркале, в свою копию переносит и все правила игры. В частности, отражение зеркала в зеркале будет служить зеркалом в зазеркалье, образы предметов будут отражаться в нём по обычным законам оптики.

Если имеется несколько зеркал, то их отражения друг в друге порождают цепочку виртуальных зеркал, многократные отражения в которых предмета и есть набор его видимых образов.

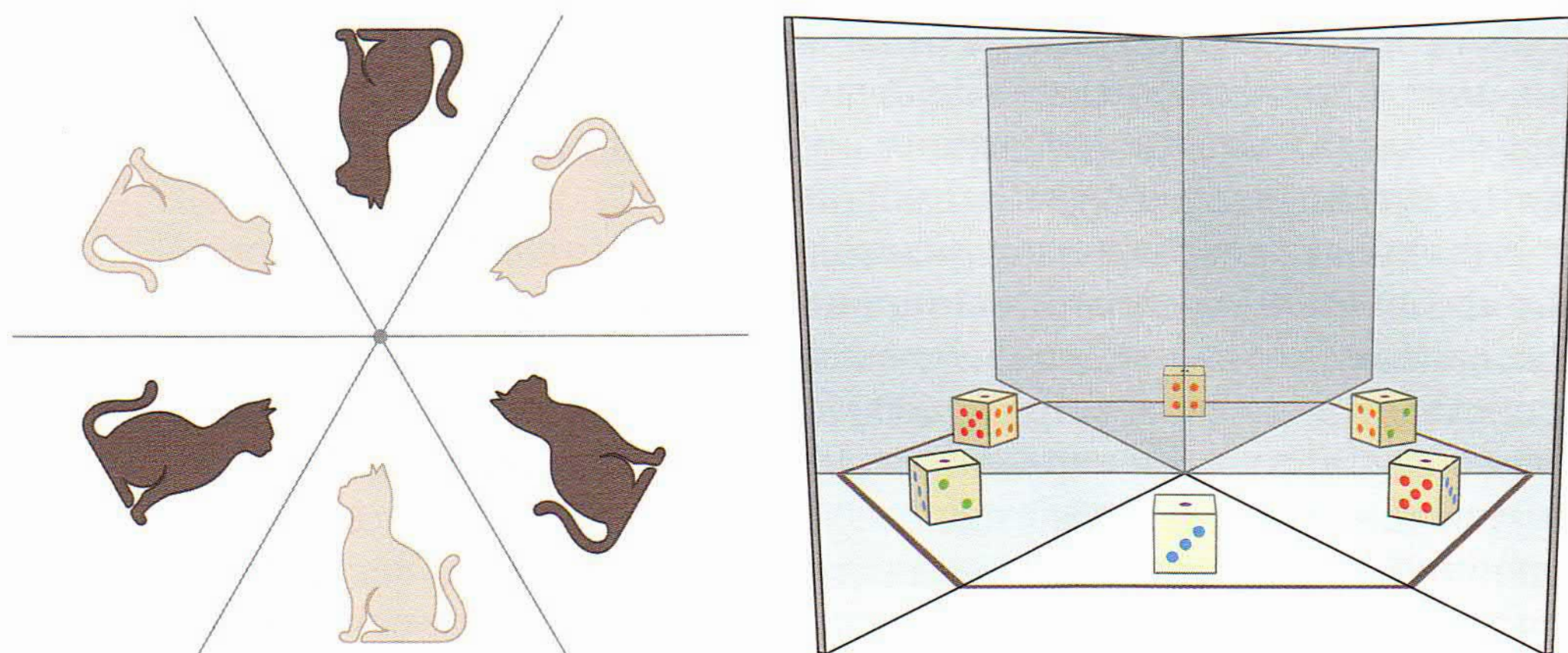
У калейдоскопа разноцветные предметы лежат в основании призмы, следовательно, их отражения не выходят за пределы плоскости основания. Поэтому в дальнейшем будем считать, что отражения происходят в плоском мире относительно прямых (зеркал). Самое главное — то, что два зеркальных луча, образующих угол α , и их взаимные отражения порождают веер зеркал с общей вершиной и угловым шагом α .

При отражении в зеркале фигуры (картинки) меняется её ориентация, но два последовательных отражения в соседних зеркалах веера — просто поворот на угол 2α . Чтобы картинка после выполнения n таких поворотов перешла в себя, должно выполняться соотношение $2\alpha \cdot n = 2\pi$, т. е. $\alpha = \pi/n$, где n — натуральное число ($n \geq 2$).



В этом случае настоящие и виртуальные зеркала разбивают плоскость на $2n$ равных углов, в каждом из которых возникает образ картинки.

Чтобы эти факты и формулы ожили, можно провести серию опытов. Поставьте на стол два прямоугольных зеркала, сложив их как распахнутую книжку, и загляните в неё. Вы увидите ряд виртуальных зеркал, число которых можно менять, увеличивая или уменьшая угол между зеркальными «страницами» книжки. А если между ними положить небольшой предмет, то и он будет «клонирован».



Причём трёхмерный объект «клоны» представят с разных сторон. Например, у игрального кубика вы можете увидеть сразу пять граней из шести.

Отсутствие перекрытий при отражениях фигур в случае двух зеркал, образующих «правильный» угол вида $\frac{\pi}{n}$, является основой калейдоскопа.

Если основанием зеркальной призмы служит многоугольник, то условие «правильности» всех его углов необходимо для того, чтобы не перекрывались изображения, получаемые многократными отражениями его внутренности относительно сторон. Можно показать, что это условие является и достаточным.

Итак, задача описания всех возможных конструкций калейдоскопов сводится к описанию многоугольников-оснований, у которых все углы «правильные».

Многоугольники с числом сторон пять и более не подходят, поскольку углы вида $\frac{\pi}{n}$ не больше, чем $\frac{\pi}{2}$, при $n \geq 2$. Из четырёхугольников подходят только прямоугольники.

В случае треугольников основой решения задачи служит то, что сумма углов любого треугольника равна π . Если все углы «правильные», то, обозначив их $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$, получаем уравнение

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1.$$

Трёх его решениям (3, 3, 3), (2, 4, 4) и (2, 3, 6) соответствуют три возможных треугольных основания калейдоскопа: равносторонний треугольник с углами $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, прямоугольные треугольники с углами $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$.

Это уже упоминавшийся «модельный» набор $60^\circ—60^\circ—60^\circ$, $90^\circ—45^\circ—45^\circ$ и $90^\circ—60^\circ—30^\circ$.

Разноцветная «начинка» таких треугольников (прямоугольника) в основании калейдоскопа может быть превращена в узор, видимый в калейдоскопе, с помощью рисования или компьютерной графики — нужно последовательно отражать треугольник (с картинкой внутри) относительно сторон, изначальных и возникающих. При этом последовательность отражений может быть любой — узор будет получаться один и тот же! А счастливый обладатель калейдоскопа увидит через окуляр этот узор как реальный и устойчивый, не меняющийся при лёгком наклоне головы наблюдателя.

Описанный калейдоскоп — по существу двумерный, поскольку видимый в нём узор — плоский. Чисто математически, не заботясь о практической реализации, можно говорить о калейдоскопах и в многомерных мирах, и в «искривлённых» пространствах, например на сфере или на плоскости Лобачевского. Эти задачи не являются искусственными, они тесно связаны с различными разделами математики (от теории групп и теории функций комплексного переменного до теории чисел и алгебраической геометрии).

Калейдоскопы в евклидовых пространствах или на сфере любой размерности уже детально изучены. А полное описание калейдоскопов в пространствах Лобачевского ещё не завершено, хотя калейдоскопические узоры на плоскости Лобачевского можно увидеть даже в музеях, на гравюрах знаменитого голландского художника Маурица Эшера.

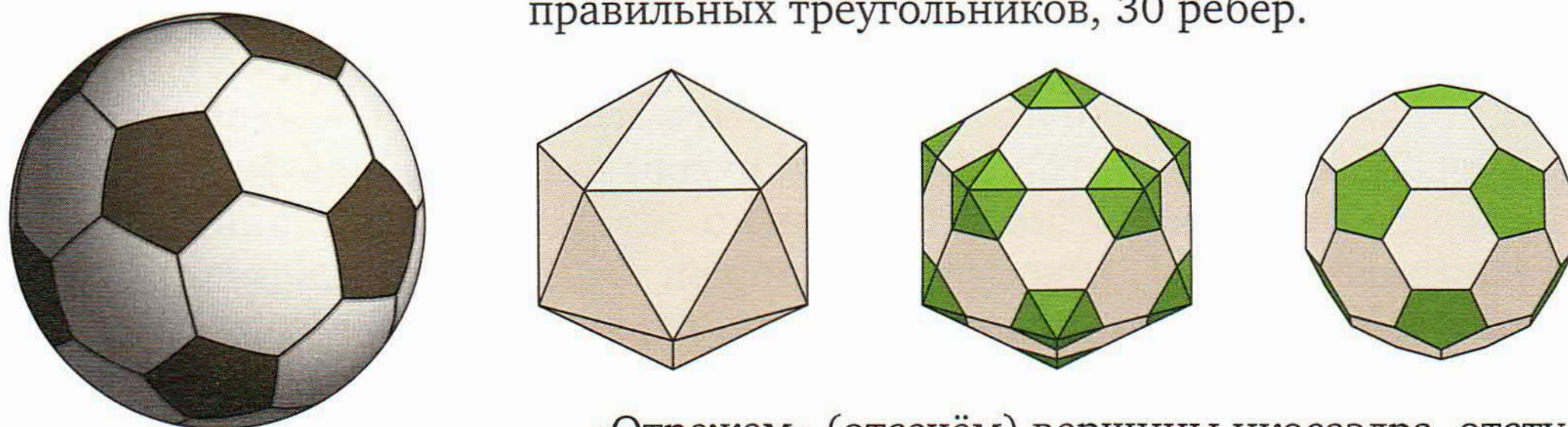
Результатом изучения радующей глаз игрушки стало появление целого математического раздела — теории дискретных групп, порождённых отражениями.

Футбольный мяч

Поверхность классического футбольного мяча состоит из слегка искривлённых 12 правильных пятиугольников чёрного цвета и 20 правильных белых шестиугольников. Модель мяча можно представить следующим образом.

Из 12 правильных пятиугольников и 20 правильных шестиугольников с равными сторонами можно сложить многогранник, называемый усечённым икосаэдром.

Икосаэдр — один из пяти правильных многогранников. Его название происходит от древнегреческих слов *είκοσι* — двадцать, *έδρα* — основание. У икосаэдра 12 вершин, 20 граней — правильных треугольников, 30 рёбер.



«Отрежем» (отсечём) вершины икосаэдра, отступив от вершин вдоль прямых, направленных в центр, на столько, чтобы оставшиеся части граней были правильными шестиугольниками. Срезы будут правильными пятиугольниками. Получившаяся фигура и есть усечённый икосаэдр.

Усечённый икосаэдр — один из полуправильных многогранников. Так называются многогранники, у которых все грани — правильные многоугольники нескольких разных типов (в отличие от правильных многогранников, все грани которых — одинаковые правильные многоугольники), а все вершины устроены «одинаково», т. е. многогранные углы при вершинах равны (совместимы).

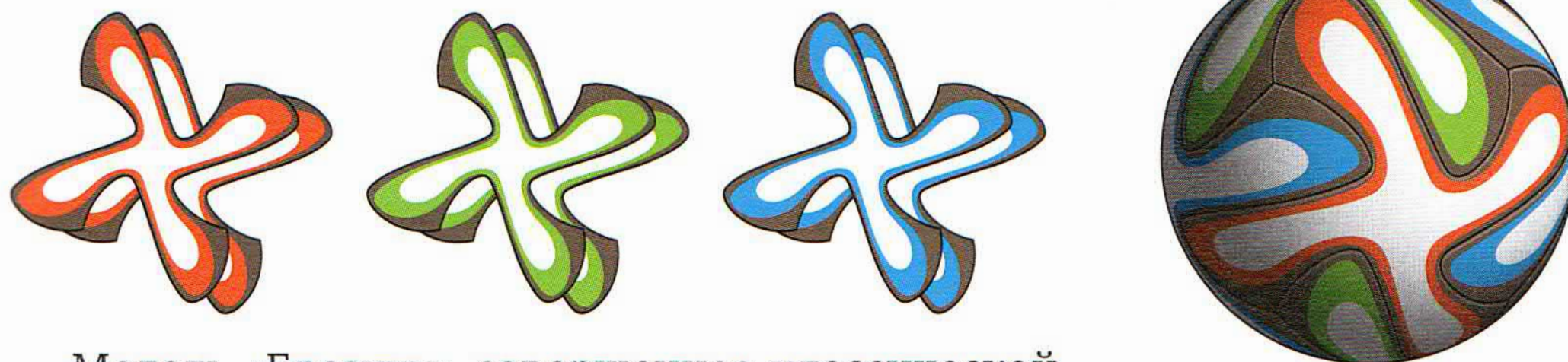
При «наполнении воздухом» модели (усечённого икосаэдра) она принимает форму сферы, становится футбольным мячом. При этом вершины усечённого икосаэдра совпадут с «вершинами» мяча, рёбра перейдут в швы, а грани — в слегка искривлённые многоугольники на поверхности мяча. Таким образом получится мяч — центральная проекция усечённого икосаэдра на сферу.

Раздувание усечённого икосаэдра заставляет задуматься о степени близости к шару формы изначальной модели. Например, можно оценивать это сходство отношением радиусов концентрических

сфер — описанной (проходящей через вершины; будущий мяч) и вписанной. Чем ближе это отношение к единице, тем совершеннее модель, тем ближе она к идеально круглому мячу.

А нельзя ли придумать модель мяча, состоящую из плоских кусков (панелей), но более совершенную, чем классическая? Можно было бы взять не усечённый икосаэдр, а многогранник с бóльшим числом вершин, но это не устраняет принципиальный недостаток — выступающие над вписанной сферой «пирамидки» (вершины), мешающие модели стать сферой. К тому же процесс изготовления существенно усложняется.

Классический пятнистый мяч появился только в 1950 году. Он был официальным мячом на чемпионатах мира с 1970 до 2002 года. Затем наступило время экспериментов, а в 2014 году на чемпионате мира в Бразилии состоялась премьера нового официального мяча, получившего название «Бразука».



Модель «Бразуки» совершеннее классической и при этом «является кубом»! Как и куб, она собирается из шести одинаковых плоских панелей, на ней выделяются восемь особых точек (вершин), в каждой из которых сходится по три панели.

На границе каждой панели есть четыре угла по 120° . В вершинах модели встречаются три угла, сумма их величин равна 360° , поэтому поверхность мяча вокруг вершины будет уплощённой, выступающей пирамидки не будет.

Панели можно склеивать по линиям границ между углами, поскольку длины этих линий одинаковы. Выпуклые участки границ склеиваются с вогнутыми, а линии подобраны так, что в каждой точке склейки кривизна выпуклого участка больше кривизны вогнутого. Из-за этого плоские панели при склеивании изгибаются, образуя в результате замкнутую выпуклую поверхность. Возможность такой склейки гарантирует теорема А. Д. Александрова, академика и автора школьного учебника по геометрии.

В модели классического мяча вся кривизна сосредоточена в конечном числе «выступающих» вершин. А в модели «Бразуки» она распределена более равномерно (по длинным рёбрам), и из-за этого модель становится более близкой к сфере.

Разгадывание sudoku

Популярные в XX веке кроссворды в веке XXI сменило новое увлечение — пришедшая из Японии игра sudoku. Существуют различные варианты игры и множество «патентованных» рекомендаций игрокам. Удивительно, но знание математических терминов, даже только по названиям, позволяет создавать эффективные приёмы разгадывания sudoku.

Задание в классическом варианте sudoku — заполнить цифрами от 1 до 9 клетки квадратной таблицы 9×9 , которая разделена на девять квадратов 3×3 . В каждой строке и в каждом столбце таблицы, в каждом квадрате 3×3 цифры должны быть различными.

Ряд вариантов игры получается из классического простым добавлением условий, например: «диагонали» — в каждой из двух диагоналей таблицы цифры также не должны повторяться; «неравенства» — соседние клетки таблицы связаны знаками «больше» и «меньше», которые относятся к «обитателям» этих клеток; «суммы» — вся таблица разделена не только на девять квадратов 3×3 , но и на области, для каждой из которых приведена сумма всех её цифр.

Начальные условия могут отличаться числом заранее «прописанных» цифр. Как правило, уменьшение числа начальных цифр усложняет задачу, но для «сумм» и иногда для «неравенств» их нет вообще.

Игровое поведение начинающего любителя sudoku можно сравнить с методикой начинающего шахматиста, быстро тонущего в океане расчётов по принципу «он — туда, я — сюда...». Умение отбрасывать лишние, ненужные варианты в расчётах — проводить перебор с ограничениями — одно из главных преимуществ «обученного» игрока и в шахматах, и в sudoku.

Перебирать варианты всё равно придётся, без этого не обойтись, но с помощью ряда приёмов можно сократить объём работы во много раз. Разберём несколько таких приёмов на примерах.

Метод крайнего элемента. Это словосочетание известно каждому, кто посещал занятия в математическом кружке. В нашем случае слово «крайний» будет означать «экстремальный» (т. е. наименьший или наибольший).

Например, при разгадывании sudoku «суммы» ограничения в переборе можно получить, отметив в таблице все блоки из двух

клеток, суммы в которых равны 3, 4, 16, 17. Это и есть «крайние» элементы, наименьшие и наибольшие. Каждое из этих чисел единственным образом представляется в виде суммы двух разных цифр (отличных от нуля):

$$3 = 1 + 2, \quad 4 = 1 + 3, \quad 16 = 7 + 9, \quad 17 = 8 + 9.$$

А для других чисел вариантов было бы больше, например,

$$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4.$$

На рисунке, иллюстрирующем подобный пример, две такие «крайние» области; в соответствующих клетках будут находиться (в неизвестном нам пока порядке) цифры 1, 3 и 8, 9. Это сразу даёт «ограничение» для выделенного квадрата — числа 7 и 10 из неиспользованных цифр можно сложить единственным образом: $7 = 2 + 5$, $10 = 4 + 6$.

Теперь в этом квадрате 3×3 осталась неиспользованной только цифра 7, которая и отправляется в правый нижний угол. После этого определяется и сосед цифры 7 по выделенной области — цифра 6.

10	4	
	17	
7		13

10	4	<u>1 3</u>
	17	<u>8 9</u>
7		13

10	4	<u>1 3</u>
<u>4</u>	<u>6</u>	<u>8 9</u>
7	<u>2 5</u>	13

10	4	<u>1 3</u>
<u>4</u>	<u>6</u>	<u>8 9</u>
7	<u>2 5</u>	<u>7</u>
		<u>6</u>

Переход к дополнению. Идея состоит в том, что для изучения части данного множества может быть полезным изучение дополняющей части. Вот поясняющий пример, навеянный знаменитой историей про Архимеда. Даны мерный стаканчик и шарик, объём которого надо быстро определить. Кладём шарик в стакан, заливаем водой с верхом, запоминаем отметку на шкале, вынимаем шарик, смотрим на новую отметку. Разность объёмов, определяемых первой и второй метками, равна объёму шарика.

Вернёмся к разобранному ранее примеру. Цифру 7 в правом нижнем углу квадрата 3×3 можно «поставить на место» и с помощью приёма «переход к дополнению».

Правая нижняя клетка квадрата является частью «языка», уходящего в соседний квадрат, а все остальные области с обозначенными суммами за пределы квадрата 3×3 не выходят. Сумма цифр по всем клеткам любого квадрата разбиения 3×3 равна

$$1 + 2 + \dots + 9 = 45,$$

а сумма цифр во «внутренних» областях с суммами данного квадрата равна $10 + 4 + 17 + 7 = 38$. Эти цифры «дополняют» цифру в правом нижнем углу квадрата, она равна $45 - 38 = 7$.

Блочный метод. В нашем случае блоки — это одинаковые наборы цифр.

В следующем примере из классического варианта sudoku блок (2, 3) встречается в первой строке и в четвёртом столбце. В правом верхнем квадрате 3×3 упомянутые строка и столбец «закрывают» для цифр блока (2, 3) все клетки, кроме двух. Затем в этом квадрате последовательно определяем место цифры 1, место блока (6, 7), место цифры 9.

2	1	3			
			5	8	
				4	
			3		
					7
			2		6

2	1	3	6	7	9
			5	8	2
			1	4	3
			3		
					7
			2		6

Можно считать, что место для 9 было найдено методом перехода к дополнению — другими цифрами были заняты восемь из девяти мест в квадрате 3×3 .

Связность. В математике линейная связность множества — свойство, означающее, что любые две его точки можно связать непрерывной кривой, не выходящей за границы множества.

В sudoku «неравенства» такой линией можно считать цепочку неравенств, связывающую группу подряд идущих цифр. Идею метода иллюстрирует приведённый пример. Такая ситуация в расчётах должна быть исключена, так как между 3 и 4 цифр нет, связность нарушается.

4	>		>	3
---	---	--	---	---

В sudoku «неравенства» важен и метод крайнего элемента, в частности 1 и 9 играют особую роль. Комбинируя эти методы, можно решать задачи, в которых в начальной позиции нет ни одной цифры!

Сначала определим крайние элементы. Единственная клетка, из которой выходят только знаки «больше», — левая нижняя клетка, значит, в ней находится цифра 9. Это своеобразный источник, вершина горы. Аналогично, средняя клетка — единственная, обитатель которой меньше соседей, — в ней находится 1. Теперь становится очевидным то, что клетки с 9 и с 1 связывает «ручей», который заполняют цифры 8, 7, ..., 2.

	<	<	
∨		∨	∧
	>		<
∧		∧	∧
	>		>

	<	<	
∨		∨	∧
	>		<
∧		∧	∧
9	>		>

	<	<	
∨		∨	∧
	>	1	<
∧		∧	∧
9	>		>

3	<	4	<	5
∨		∨		∧
2	>	1	<	6
∧		∧		∧
9	>	8	>	7

Конечно, в реальных задачах вида «неравенства» (как, впрочем, и во всех других видах) учитываются и соображения, связанные с неповторяемостью цифр в строках и столбцах таблицы 9×9 .

Приведённые примеры превращений математических терминов в игровые приёмы sudoku подтверждают справедливость латинского изречения *nomen est omen*: имя — уже значение.

Високосное летосчисление

Сколько дней в году и как появились високосные годы? Что продиктовано природой и что придумано людьми? Попробуем разобраться.

Солнечные сутки — это период обращения Земли вокруг своей оси (полный оборот относительно направления на Солнце). Рассматривают и другие сутки, например звёздные. Но именно солнечные сутки определяют жизненный ритм: день—ночь—день...

Год — тоже многозначное понятие: астрономы различают звёздный, тропический, календарный и другие годы. Тропический год — период обращения Земли вокруг Солнца — определяется как временной интервал между прохождением Солнца через точку весеннего равноденствия. Именно тропический год управляет сменой сезонов: зима—весна—лето—осень.

Вращение Земли вокруг оси (сутки) и вращение вокруг Солнца (год) происходят независимо друг от друга и, более того, длительность их периодов понемногу (очень медленно!) меняется. Астрономы и физики регулярно измеряют продолжительность солнечных суток и тропического года. В нашу эпоху длительность тропического года — с точностью до десятых долей секунды — составляет 365 суток 5 часов 48 минут и 45,2 секунды, или, используя астрономическую запись,

$$365^{\text{d}} 05^{\text{h}} 48^{\text{m}} 45,2^{\text{s}}.$$

В долях средних солнечных суток это составляет $365 \frac{52313}{216000}$, в десятичной записи — примерно 365,2422.

Принять для повседневного использования такую длительность года просто невыносимо. Возникает проблема выбора длины календарного года: она должна быть близка к величине тропического года, но состоять из целого числа суток. Если принять длительность календарного года равной 365^{d} , то за четыре года отставание календаря составит почти сутки. Постепенно 1 января с зимы сместится на осень, а потом и на лето. Периодические мероприятия (например, начало учебного года) нельзя будет связывать с определёнными календарными датами.

Одно из решений проблемы подсказывает «округление» длительности тропического года $365,2422^{\text{d}}$ до $365,25^{\text{d}}$, тогда дробная «добавка» составит ровно $\frac{1}{4}$ суток, т. е. 6 часов. Календарь разбивается на

четырёхлетние циклы, в каждом из которых три года — по 365 дней, а четвёртый, называемый високосным, состоит из 366 дней. Введение раз в четыре года дополнительного дня в календаре делает среднюю длину календарного года равной $365^d 06^h$, что больше истинной длительности тропического года примерно на $11^m 15^s$.

Такую систему придумал александрийский астроном Созиген, а в 45 году до н. э. в Древнем Риме она была введена Юлием Цезарем. Отсюда и название — юлианский календарь.

В 325 году н. э. по решению Никейского собора весь христианский мир принял юлианский календарь. В то время день весеннего равноденствия приходился на 21 марта. Этот день был важной точкой отсчёта в определении дней христианских праздников, которые, в свою очередь, служили главными ориентирами в хозяйственном календаре (сев, жатва и т. п.).

Но в юлианском календаре есть, как мы видели, ежегодная ошибка — примерно 11 минут. За столетия «набегают» целые дни, и к концу XVI века за период со времени Никейского собора день весеннего равноденствия отступил в календаре на 10 суток.

Папа Григорий XIII стал инициатором реформ, которые преследовали две цели: во-первых, вернуть на календарное место день равноденствия, во-вторых, выбрать более совершенный календарь, «чтобы и в будущем равноденствие со своего места никогда не сдвигалось».

Основой нового календаря, введённого в 1582 году и получившего название григорианского, стало дополненное относительно юлианского календаря правило чередования простых и високосных лет. Високосными остались те годы, номера которых делятся на 4, но появилось исключение: если номер года оканчивается двумя нулями, но не делится на 400 (т. е. число сотен не делится на 4), то год считается простым, а не високосным. Например, в григорианском календаре 1800 год становится обычным, а 2000 год остаётся високосным.

Также Григорий XIII распорядился сдвинуть календарь на 10 дней, так что после 4 октября 1582 года наступило сразу 15 октября.

С тех пор расхождение между юлианским и григорианским календарями увеличилось до 13 дней, так как добавились 3 дня в 1700, 1800 и 1900 годах. В России до 1918 года пользовались юлианским календарём, а декретом Совета народных комиссаров от 26 января 1918 года был введён григорианский календарь. Поэтому даты российской истории при переводе со «старого стиля» в современный календарь сдвигаются на 12 дней для событий XIX века, а для событий XX века до 1918 года — на 13 дней.

В григорианском календаре за 400 лет три раза встречаются простые годы, которые являются високосными в юлианском календаре. Всего високосных лет за этот период: 100 — в юлианском, 97 — в григорианском календаре. Поэтому средняя длина григорианского года равна $\left(365\frac{97}{400}\right)^d = 365^d 05^h 49^m 12^s$, что больше истинной примерно на 27^s . Хорошая точность достигнута весьма простыми средствами.

И юлианский, и григорианский календари устроены циклично. В юлианском календаре — цикл 4-летний, в григорианском — уже 400-летний. Средняя длительность календарного года за цикл близка к длительности года тропического — $\left(365\frac{1}{4}\right)^d$ и $\left(365\frac{97}{400}\right)^d$ соответственно.

Отсюда можно усмотреть, что любое хорошее рациональное приближение величины тропического года, имеющее вид $\left(365\frac{p}{q}\right)^d$ (p и q — натуральные числа, $p < q$), может стать основой календаря, в котором длина цикла равна q . Конечно, число q не должно быть чрезмерно большим.

А существует ли календарь такого вида, но более простой, чем григорианский, и не менее точный? Ответ на этот вопрос можно получить, применив математический аппарат под названием «цепные дроби».

Любое положительное число A единственным образом раскладывается в цепную дробь:

$$A = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}},$$

где a_0 — целая часть числа A , числа a_1, a_2, a_3, \dots — натуральные. Рациональные выражения

$$a_0, \quad a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}, \quad \dots$$

называются подходящими дробями данной цепной дроби. При есте-

ственном порядке вычисления («снизу вверх») подходящие дроби получают однозначное представление

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}} = \frac{p_n}{q_n},$$

где дробь $\frac{p_n}{q_n}$ оказывается несократимой. Главным свойством подходящих дробей является то, что дробь $\frac{p_n}{q_n}$ отстоит от числа A не дальше, чем любая дробь $\frac{p}{q}$, у которой знаменатель q не превосходит q_n . Иными словами, для данного числа A наилучшим приближением среди всех рациональных чисел $\frac{p}{q}$, где $q \leq q_n$, является подходящая дробь $\frac{p_n}{q_n}$.

Именно это свойство позволяет найти с помощью цепных дробей серию оптимальных календарей, упорядоченных по точности приближения длины тропического года средней длиной календарного года.

Разложим в цепную дробь длительность тропического года в солнечных сутках:

$$365 \frac{52313}{216000} = 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{26 + \frac{1}{9 + \frac{1}{7}}}}}}}$$

Каждая из первых подходящих дробей

$$365, \quad 365 + \frac{1}{4} = 365 \frac{1}{4}, \quad 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7}} = 365 \frac{7}{29},$$

$$365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1}}} = 365 \frac{8}{33}, \quad 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} = 365 \frac{31}{128}$$

«предлагает» свой календарь.

Последующие подходящие дроби равны $365\frac{814}{3361}$, $365\frac{7357}{30377}$, $365\frac{52313}{216000}$ и для создания календаря подходят не лучше, чем приближаемая дробь $365\frac{52313}{216000}$.

Представим результаты в виде таблицы.

Подходящая дробь	Средняя длина календарного года	Средняя годовая погрешность
$365\frac{1}{4}$	$365^d\ 06^h\ 0^m\ 0^s$	$-11^m\ 15^s$
$365\frac{7}{29}$	$365^d\ 05^h\ 47^m\ 35^s$	$1^m\ 10^s$
$365\frac{8}{33}$	$365^d\ 05^h\ 49^m\ 05^s$	-20^s
$365\frac{31}{128}$	$365^d\ 05^h\ 48^m\ 45^s$	менее 1^s

Правильные дроби в левом столбце сообщают главные свойства «предлагаемого» календаря. Знаменатель дроби — число лет в цикле. Если структуру календаря внутри цикла определять разделением на простые и високосные годы, то числитель дроби — это «рекомендуемое» число високосных лет в цикле.

Например, дробь $365\frac{1}{4}$ определяет юлианский календарь. Пользоваться приближением $365\frac{7}{29}$ никто не предлагал. Следующее приближение $365\frac{8}{33}$ даёт календарь почти той же сложности, но намного более точный. Использовать такой календарь (восемь високосных лет из каждые тридцати трёх) предлагал Омар Хайям (1048—1131) — знаменитый поэт, математик и астроном.

Четвёртый вариант в 1864 году предложил немецкий астроном И. Г. фон Медлер. Этот календарь получается из юлианского по той же схеме, что и григорианский, но он даже проще: его цикл — 128 лет (а не 400), изменение количества високосных лет — минимальное, с 32 в юлианском до 31. Тем удивительнее, что этот календарь гораздо точнее — ошибка составляет менее 1 секунды!

У читателя могут появиться вопросы. Во-первых, почему в приведённой таблице отсутствует григорианский календарь? Во-вторых, почему через полтысячелетия после календаря Омара Хайяма

Григорием XIII был предложен календарь более сложный, но менее точный?

Ответы на оба вопроса связаны с одним и тем же обстоятельством. Дело в том, что комиссия Григория XIII пользовалась астрономическими таблицами, составленными для короля Кастилии Альфонса X в 1251 году. В них длина тропического года ошибочно считалась равной $365^d 05^h 49^m 16^s$, что примерно на 30^s больше истинной. На основании этих таблиц комиссия полагала, что предложенная ею средняя длина года лишь на 4^s отличается от реальной. Календарь Омара Хайяма относительно «кастильского» значения тропического года даёт ошибку бóльшую, в 11^s .

Комиссия Григория XIII, видимо, не использовала аппарат цепных дробей. Но подобранное ею значение средней длины календарного года $365 \frac{97}{400} = 365,2425$ весьма близко к одной из подходящих дробей разложения в цепную дробь длины «кастильского» года — $365 \frac{122}{503} = 365,2424\dots$

Вернёмся к математическому анализу проблемы создания точного и удобного календаря.

Приведённые в таблице календари (от юлианского до календаря Медлера) были найдены нами с помощью разложения в цепную дробь текущего значения длины тропического года. Эти календари в обозримом будущем не изменятся. Объясняется это тем, что малые изменения числа (в частности, длины тропического года) не влияют на значения первых подходящих дробей.

Календари таблицы наследуют и другое важное свойство подходящих дробей. В разложении данного числа в цепную дробь подходящие дроби дают наилучшие приближения. Для циклических календарей это означает, например, что среди всех календарей с циклом не более 33 лет самый точный — календарь Омара Хайяма, а если в цикле не более 128 лет, то лучший — календарь Медлера.

Решения проблемы календаря, найденные в прежние времена кропотливым подбором, удивляют и восхищают. Сейчас, с помощью цепных дробей, всё свелось бы к серии простых вычислений. И полностью решая задачу «точности хода календаря», цепные дроби оставляют людям только проблему выбора календаря удобного, желательно привычного...

Быстрая арифметика

Одной из вершин «арифметической премудрости» является таблица умножения. Мы учим её в начальной школе и должны помнить всю жизнь — или уже больше не должны, доверившись калькуляторам и компьютерам?

Даже простейший калькулятор легко перемножает шестизначные числа. Этого вполне достаточно не только для бытовых нужд, но и для большинства инженерных расчётов. В научных исследованиях приходится иметь дело и с более «длинными» числами — с десятками и сотнями десятичных знаков. Однако и в нашей повседневной жизни есть области, в которых совершаются арифметические действия с такими числами, хотя большинство людей об этом и не подозревает.

Пример — криптография. Когда мы делаем покупку в интернете, то, естественно, не хотим, чтобы передаваемые нами данные банковской карты стали известны ещё кому-либо, и поэтому весь обмен информацией с банком шифруется. Многие другие сетевые сервисы также используют защищённый протокол `https`, вместо обычного `http`. Шифры же часто основаны на больших простых числах.

Степень защиты информации напрямую зависит от величины используемых простых чисел. Ещё лет десять назад 128-битные (т. е. имеющие 128 цифр в двоичной записи) простые числа обеспечивали достаточную надёжность. Сейчас, с прогрессом как вычислительной техники, так и математических методов, такие коды успешно «взламываются» и для надёжного шифрования приходится использовать 512- и даже 1024-битные простые числа.

Ясно, что работа с большими числами — дело компьютеров. Кажется, что нетрудно «обучить» компьютер арифметическим действиям, однако нам важно, чтобы он выполнял их не только правильно, но и быстро.

Из четырёх действий сложение и вычитание представляются более простыми, чем умножение и деление, но как сравнить их сложность (трудоемкость) математически? Для этого можно посмотреть, как увеличивается количество выполняемых элементарных шагов с ростом длины чисел, над которыми производится действие. Шаг можно считать элементарным, если его трудность не зависит от длины чисел. Мерой трудоемкости операции будем считать количество выполняемых элементарных шагов.

Для операции сложения элементарным шагом можно считать сложение двух цифр в одном разряде вместе с учётом переноса из предыдущего разряда и переноса в следующий разряд (представьте зрительно сложение «в столбик»). Количество таких элементарных шагов пропорционально длине складываемых чисел и, скажем, при удвоении этой длины трудоёмкость тоже удваивается.

Для операции умножения мерой трудоёмкости можно считать количество обращений к таблице умножения для цифр. При «школьном» методе перемножения двух чисел «в столбик» количество обращений к таблице умножения будет равно произведению длин чисел (каждую цифру первого числа необходимо умножить на каждую цифру второго). При удвоении длин сомножителей количество обращений к таблице увеличивается в 4 раза. Именно это отличие — возрастание трудоёмкости в 4, а не в 2 раза — делает этот алгоритм умножения намного более сложным при работе с «длинными» числами, чем алгоритм сложения.

Долгое время всем было «очевидно», что ничего лучше школьного способа для перемножения многозначных чисел быть не может. Основным аргумент был таков: если бы существовал более быстрый способ, его давно бы нашли. Полной неожиданностью стала публикация в 1961 году нового метода, найденного Анатолием Алексеевичем Карацубой, который в то время был аспирантом. Этот метод настолько прост, что о нём можно рассказывать даже школьникам.

Поясним основную идею метода Карацубы на примере перемножения двух восьмизначных чисел a и b . Представим их в виде

$$a = 10^4 a_1 + a_2, \quad b = 10^4 b_1 + b_2,$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — четырёхзначные числа. Тогда

$$a \times b = (10^4 a_1 + a_2)(10^4 b_1 + b_2) = 10^8 a_1 b_1 + 10^4 (a_1 b_2 + a_2 b_1) + a_2 b_2.$$

Заметим, что произведения $a_1 b_2$ и $a_2 b_1$ нам нужны не сами по себе, а только в сумме. Эту сумму можно вычислить, если мы уже знаем произведения $a_1 b_1$ и $a_2 b_2$, ценой только одного дополнительного перемножения двух четырёхзначных чисел и нескольких «лёгких» операций сложения-вычитания, ибо

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 - a_2)(b_1 - b_2).$$

Вот пример вычисления по описанной выше схеме. Пусть

$$a = 63511377 \quad \text{и} \quad b = 81026989,$$

тогда

$$a_1 = 6351, \quad a_2 = 1377, \quad b_1 = 8102, \quad b_2 = 6989.$$

Последовательно вычисляем:

$$\begin{aligned}a_1 - a_2 &= 6351 - 1377 = 4974, \\b_1 - b_2 &= 8102 - 6989 = 1113, \\a_1 b_1 &= 6351 \times 8102 = 51455802, \\a_2 b_2 &= 1377 \times 6989 = 9623853, \\(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) &= 4974 \times 1113 = 5536062, \\a_1 b_2 + a_2 b_1 &= 51455802 + 9623853 - 5536062 = 55543593.\end{aligned}$$

По приведённой выше формуле произведение $a \times b$ равно

$$\begin{array}{r}5145580200000000 \\+ \quad 555435930000 \\ \quad 9623853 \\ \hline 5146135645553853\end{array}$$

Сравним на примере перемножения восьмизначных чисел трудоёмкость нового метода с трудоёмкостью традиционного.

При использовании школьного метода к таблице умножения требуется обратиться $8 \times 8 = 64$ раза.

В вычислениях по новому методу придётся найти три произведения четырёхзначных чисел. Если это делать школьным методом, то к таблице умножения придётся обратиться $3 \times 4 \times 4 = 48$ раз (умножение на степени числа 10 — это просто дописывание нулей, не требующее обращения к таблице).

Но ведь «по-новому» можно перемножать и четырёхзначные числа, разбив каждое из них на два двузначных. По аналогии с разобранным выше примером, для перемножения четырёхзначных чисел достаточно найти три произведения двузначных чисел. Если эти произведения вычислять «по-школьному», то потребуются $3 \times (3 \times 2 \times 2) = 36$ обращений к таблице умножения. Ещё одно применение той же идеи уменьшит количество обращений к таблице умножения до $3^3 = 27$. Итог: путь вычислений будет пройден за 27 элементарных шагов вместо 64!

В общем случае при перемножении методом Карацубы двух 2^m -значных чисел требуется провести 3^m обращений к таблице умножения. Следовательно, при удвоении длин сомножителей трудоёмкость увеличивается лишь в 3 раза, а не в 4, как при «школьном» способе. Общий выигрыш тем больше, чем длиннее перемножаемые числа.

Выше длина числа измерялась по его представлению в десятичной системе счисления. При переходе к двоичному представлению

длина записи чисел возрастает примерно в 3,3 раза. По этой причине в двоичной системе счисления, в которой работают современные компьютеры, преимущества метода Карацубы проявляются начиная с меньших по значению чисел, чем в десятичной системе. Этот метод реализован во многих программах компьютерной алгебры и даёт большúю экономию времени вычислений.

В 1961 году метод Карацубы был революционным прорывом. После того, как стало ясно, что школьный метод не оптимален, многие математики задумались — а нельзя ли перемножать большие числа ещё быстрее, чем методом Карацубы? Оказалось, что можно. Например, разбивая каждый сомножитель на три части вместо двух, можно обойтись пятью перемножениями втрое более коротких чисел (найдите этот способ и оцените требуемое при этом количество элементарных шагов). Ещё эффективнее использовать меняющееся количество частей, а именно, разбивать n -значное число на примерно \sqrt{n} чисел такой же длины.

Удивительно, но исследование такого древнего арифметического действия, как умножение, продолжается и в наши дни. Когда же математики получат «моральное право» остановиться в поиске всё более и более быстрых способов умножения?

Давно считается правдоподобной гипотеза, что любой метод M перемножения n -значных чисел требует выполнения не менее, чем $C_M n \log n$ шагов, где C_M — постоянная, зависящая от метода, но не от значения n .

Эту гипотезу пока никому доказать не удалось. Подобные результаты, называемые *нижними оценками* (сложности вычисления), обычно гораздо труднее *верхних оценок*. Для получения последних достаточно предъявить один конкретный алгоритм и оценить его трудоёмкость, в то время как для получения нижней оценки нужно суметь обзреть все мыслимые способы вычислить искомую величину.

Когда будет найден метод умножения за $C_M n \log n$ шагов (а математики к этому сейчас очень близки), а также будет доказана указанная выше гипотеза, то останется только борьба за уменьшение множителя C_M . С теоретической точки зрения эта задача считается малоинтересной, хотя для практического применения алгоритма значение этого множителя может оказаться критическим.

Читатель вправе спросить — а что с делением? Можно ли делить быстрее, чем учат в школе? Оказалось, что деление ненамного сложнее умножения. А именно, всякий метод перемножения n -значных чисел, требующий $M(n)$ элементарных операций, можно преобразовать в метод для деления чисел такой же длины за $5M(n)$ операций.

Случайные блуждания

Яркий пример полезного взаимодействия, взаимного обогащения математики и других наук — теория случайных блужданий. Эта теоретическая модель не только нашла применения в разных областях от биологии и физики до экономики, но и «помогла» получить несколько Нобелевских премий.

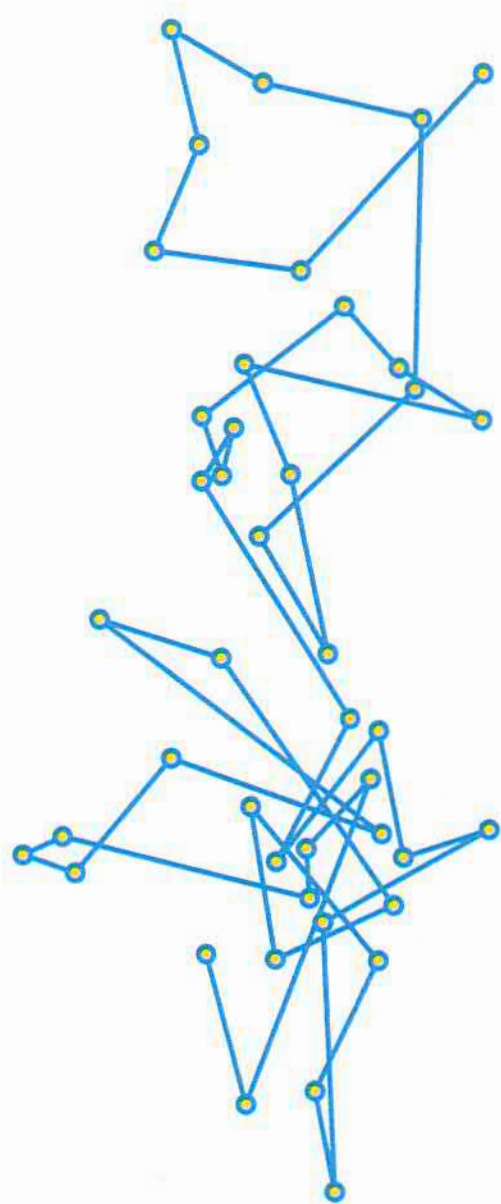
Одно из первых достижений этой теории — объяснение броуновского движения. В 1827 году шотландский биолог Роберт Браун, новаторски использовавший микроскоп, обнаружил явление бес-

порядочного движения микроскопических частиц в полостях зёрен пыльцы. Изначально надеявшийся, что он открыл «источник жизни», в результате продолжительных исследований Браун пришёл к иному выводу: природа такого движения (называемого сейчас броуновским) — физическая, а не биологическая.

В последующих экспериментах удалось исключить из списка возможных причин хаотического движения и многие физические явления, например испарение, течение жидкости, свет, внешние вибрации...

К концу XIX века получила распространение гипотеза о том, что наблюдаемое поведение частицы в жидкости вызвано столкновениями с движущимися молекулами и атомами (невидимыми в микроскопы того времени). И это несмотря на то, что многие физики (даже великие) ещё не верили в атомное строение вещества. Интересно, что именно изучение математической модели броуновского движения позволило в начале XX века получить одно из первых подтверждений атомной теории.

В физических экспериментах каждая «встреча» частицы с молекулой приводит к сдвигу частицы в каком-то направлении на какое-то расстояние. В математической модели рассматриваются случайные блуждания точки (сохраним для неё название «частица») на плоскости, а чтобы изучение модели стало более простым, предполагается, что поведение частицы менее хаотично и более предсказуемо: для всех столкновений величина сдвига принимается постоянной; направления сдвига — только по сторонам света: север, юг, восток, запад; за определённый интервал времени происходит фиксированное число соударений.



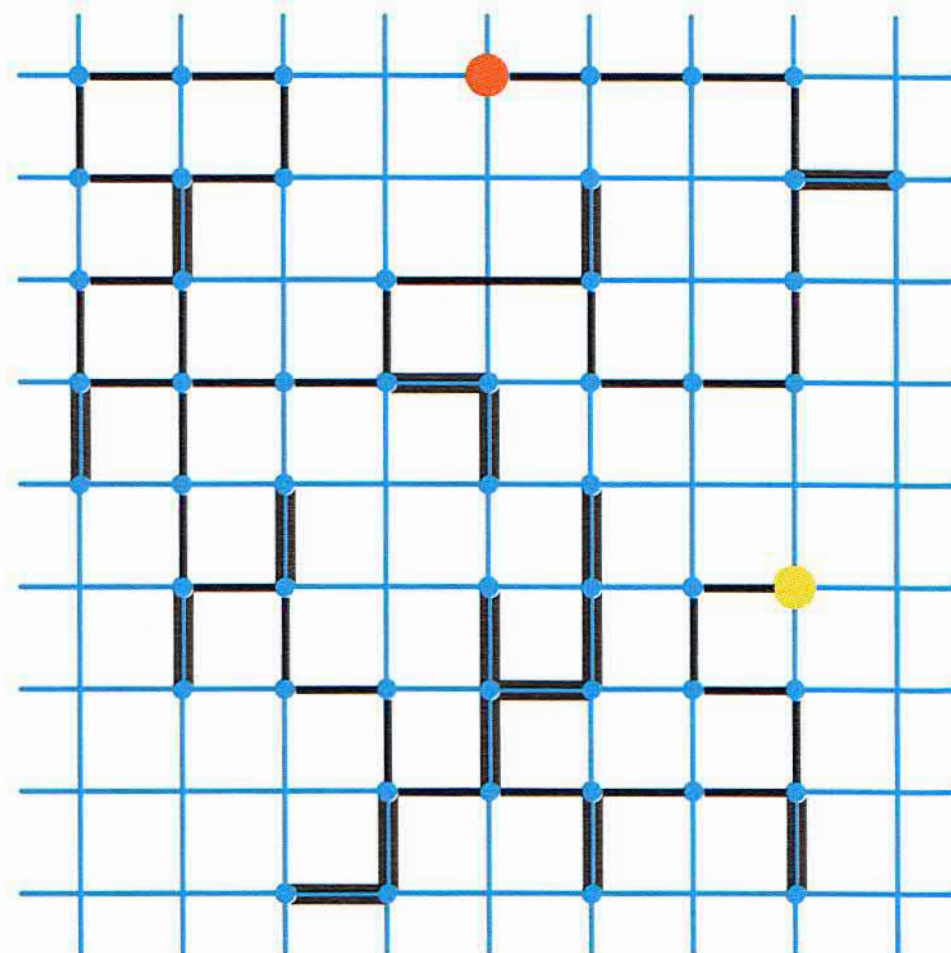
Таким образом, частица может двигаться только по узлам квадратной решётки, а по времени — достаточно равномерно. Можно показать, однако, что эти упрощения не меняют суть, характер изначального случайного блуждания, т. е. модель достаточно точна.

В фольклорном описании этой модели частица представлена матросом, «отдохнувшим» в баре портового города с квадратной сеткой улиц и возвращающимся на корабль. На каждом перекрёстке матрос присаживается, забывает о направлении движения и продолжает путь по одному из четырёх направлений с равной вероятностью ($1/4$).

Можно рассматривать разнообразные житейские вопросы, касающиеся путешествия моряка, но имеющие математический смысл и в задаче про частицу: попадёт ли когда-нибудь матрос на свой корабль? вернётся ли он в бар, из которого вышел? сколько в среднем времени займёт путь до корабля? как далеко в среднем матрос уйдёт, сделав t шагов (длина шага — расстояние между соседними перекрёстками)?

Почему возникает необходимость использовать понятие «в среднем»? Дело в том, что при увеличении числа сделанных шагов количество возможных траекторий движения растёт очень быстро: одношаговых — 4, образующихся при двух шагах — 4^2 и т. д. В случае миллиона шагов число траекторий равно $4^{1000000}$ — это больше, чем число атомов во Вселенной, но в задачах естествознания такие величины встречаются и с ними надо уметь работать. Среди множества траекторий есть сильно отличающиеся: например, матрос может двигаться только вправо (и за t шагов удалиться на расстояние t), а может перемещаться и по сложной траектории, когда направление движения меняется почти на каждом шаге.

Но несмотря на такое различие в поведении траекторий можно изучать, как выглядит траектория «в среднем», так сказать, типичная. Например, удивительным и важным фактом (причём по доказательству несложным) является то, что в среднем через время t частица оказывается от начальной точки на расстоянии порядка \sqrt{t} . (После некоторого раздумия такой результат уже не кажется удивительным, ведь матрос часто возвращается назад и в среднем должен уйти на расстояние меньше чем t .)



Постановка задачи о движении частицы по узлам квадратной решётки содержательная, она находит приложения и при большем числе измерений. Но ответы на сформулированные выше вопросы качественно различаются в зависимости от размерности: например, в одномерном и двумерном случаях «матрос» возвращается в бар, а начиная с размерности три это уже не так.

Вернёмся в начало XX века, к истории о том, как броуновское движение подтвердило атомную теорию. В 1905 году, который часто называют «годом чудес» (на латыни *annus mirabilis*), у Альберта Эйнштейна вышли и работа по специальной теории относительности, и развивающая теорию броуновского движения статья «О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты». Это одна из первых работ по статистической физике — физике, в которой работают со случайностью (см. «Как случается закономерность», стр. 178). В этой теоретической статье, приняв гипотезу о молекулярных причинах броуновского движения, Эйнштейн установил пропорциональность величины среднего смещения частицы и \sqrt{t} . В полученной им формуле коэффициент пропорциональности зависит от характеристик жидкости (температура, вязкость), размеров частицы и от числа Авогадро (универсальной физической константы, равной числу молекул в определённом количестве вещества). Эйнштейн пишет, что найденное им соотношение можно применить для определения числа Авогадро, если знать среднее смещение.

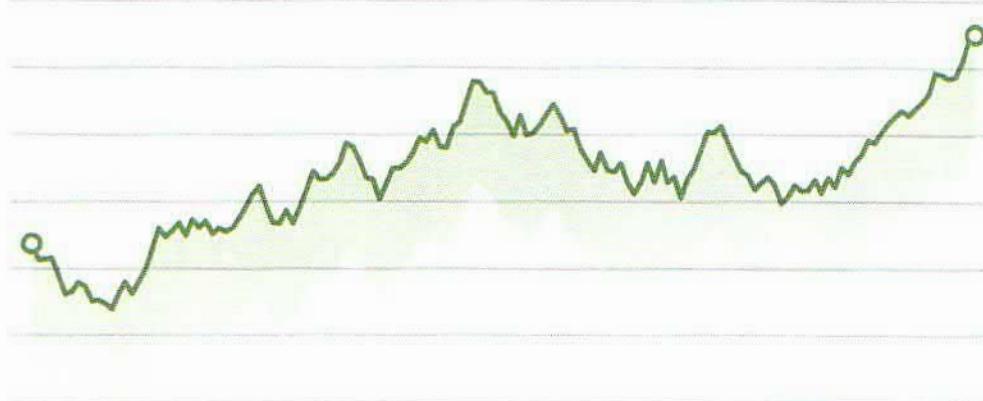
Если бы удалось экспериментально оценить среднее смещение, то формула Эйнштейна стала бы источником нового способа определения числа Авогадро, ранее найденного в кинетической теории газов. Совпадение старого и нового значений стало бы подтверждением и молекулярной модели броуновского движения, и всей теории атомного строения вещества.

Эту задачу решил французский физик Жан Батист Перрен, которому в 1908 году удалось в серии экспериментов оценить среднее смещение. Число Авогадро было подтверждено, причём с большой точностью, о чём Перрен написал Эйнштейну восторженное письмо. В 1926 году Перрен получил Нобелевскую премию по физике.

До сих пор в математической модели случайных блужданий действовал ряд предположений: постоянство величины сдвига и частоты соударений. А что будет со случайным блужданием, если столкновения происходят всё чаще, а вызванные ими сдвиги становятся всё меньше? Как говорят в математике, «в пределе» случайных ломаных (траекторий) получится случайная функция. Так как характер природных процессов — дискретный, а изменения на каж-

дом шаге очень малы, то подобные функции встречаются часто. Впервые теорию таких функций построил Норберт Винер, известный во всём мире как «отец кибернетики».

У подобных моделей множество полезных применений. Например, ещё в начале XX века Луи Башелье для изучения рынка акций применял случайные блуждания с малым шагом, предвосхитив подход Винера. То, что случайное блуждание является хорошей моделью изменений цены актива на бирже, — довольно естественно. По каждому активу производится множество независимых операций многочисленными игроками, у каждого из которых и для продажи, и для приобретения свои мотивы и обстоятельства — кто-то покупает, думая о вложении на будущее в образование детей, кто-то продаёт... Как результат — цена становится случайным блужданием.



Конечно, есть какие-то общие факторы, систематически влияющие на цену; например, для некоторых позиций это может быть политическая обстановка или цена на нефть. Этот так называемый снос можно представить наглядно на примере блужданий матроса по «наклонной» плоскости: матрос с равными вероятностями идёт на восток и запад, а на север и юг — с вероятностями $1/4 + \delta$ и $1/4 - \delta$. Вычитание сноса приводит к изначальной постановке задачи случайного блуждания.

Об эффективности случайных блужданий как модели ценообразования говорит присуждение в 1997 году Нобелевской премии по экономике за разработку модели ценообразования опционов (модель Блэка—Шоулза). До появления этого математического результата предсказание изменения цен обычно осуществлялось на основе сравнительного анализа данной траектории с какими-то похожими, имеющимися в биржевой истории. А в этой модели «предсказания» основаны на случайно-непредсказуемом блуждании цен, в частности — на известном нам результате о среднем смещении в броуновском движении на \sqrt{t} за время t .

Стоит оговориться, что любая математическая модель — упрощение действительности, а потому имеет свою область применимости. Модель случайных блужданий не работает в кризисные периоды, когда оценка сдвига на величину \sqrt{t} перестаёт работать. Хорошая модель для кризисов математиками пока ещё не придумана...

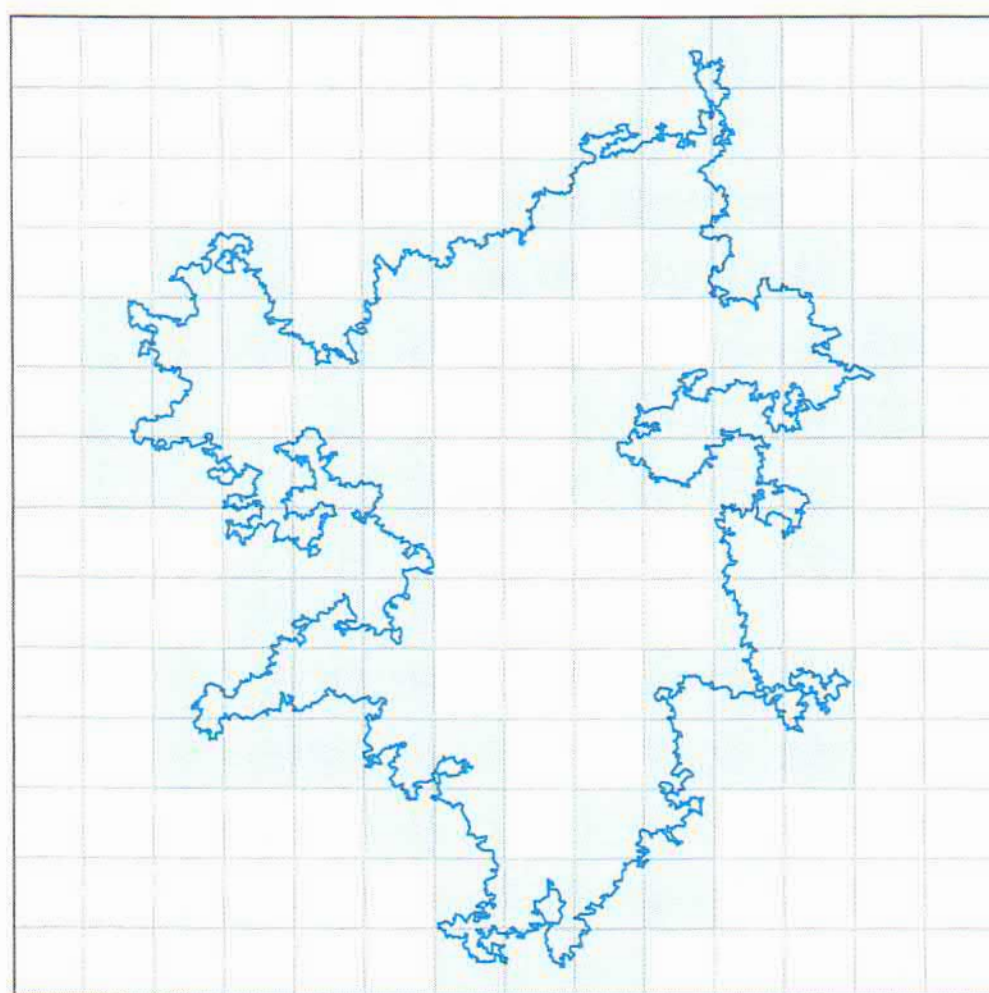
Модель случайных блужданий описывается просто, с её помощью уже исследованы многие важные задачи, но связанных с ней

интересных вопросов хватит и на XXI век. Для представления новых задач нам понадобится понятие фрактала — самоподобного и сложно устроенного, изломанного объекта дробной размерности.

Самоподобие — это похожесть целого объекта и любого его куска. Сложность, изломанность в дополнение к самоподобию обнаруживаются и в природе, и в модели случайных блужданий. Например, у береговой линии суши малые участки столь же прихотливо изогнуты, что и большие. Аналогично с броуновским движением: детализированное изображение траектории превращает отрезки на «грубом» рисунке в «лохматые ломаные», похожие на общий первоначальный вид.

Для измерения плоских объектов есть два привычных способа: длина — одномерная мера и площадь — двумерная. Площадь кривой нулевая, а вот длина даже у ограниченной, но изломанной кривой может неограниченно возрастать с ростом точности измерений. Получается, что двумерная площадь не различает кривые, в частности, «не видит» сложность, а одномерная длина со сложностью просто не справляется. Желание определить характеристику линии, учитывающую её изломанность, сложность, можно реализовать, введя дробную размерность.

Делается это так. На плоскую ограниченную кривую накладывается «измерительная» сетка из $L \times L$ квадратов. В процессе измерения



размеры квадратов последовательно уменьшают (соответственно растут значения L) и на каждом шаге вычисляют число квадратов, пересекающихся с кривой. Дробной размерностью кривой называется такое число a , что при больших значениях L число пересечений хорошо приближается значением L^a .

У гладкой кривой такая размерность равна 1, у области — 2, т. е. это соответственно одномерный и двумерный объекты в привычном смысле. Для кривых увеличение дробной размерности от 1 до 2 означает увеличение сложности. Значение размерности,

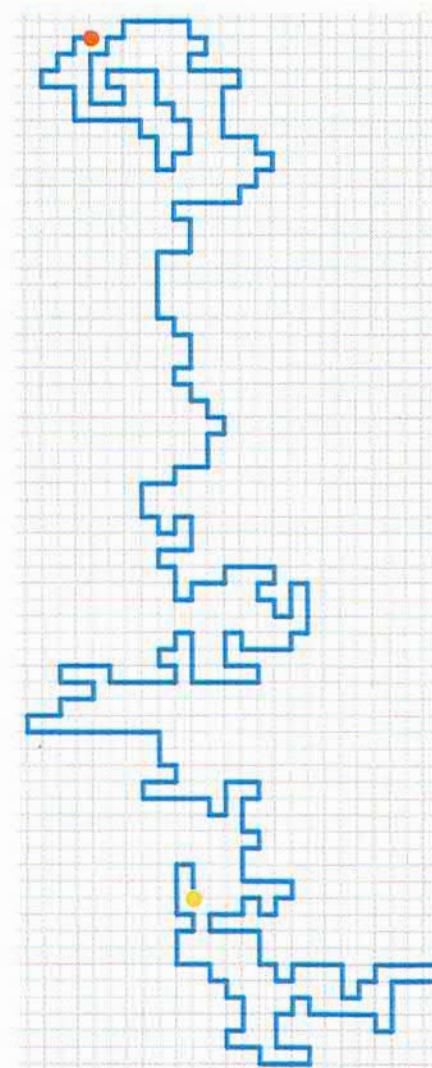
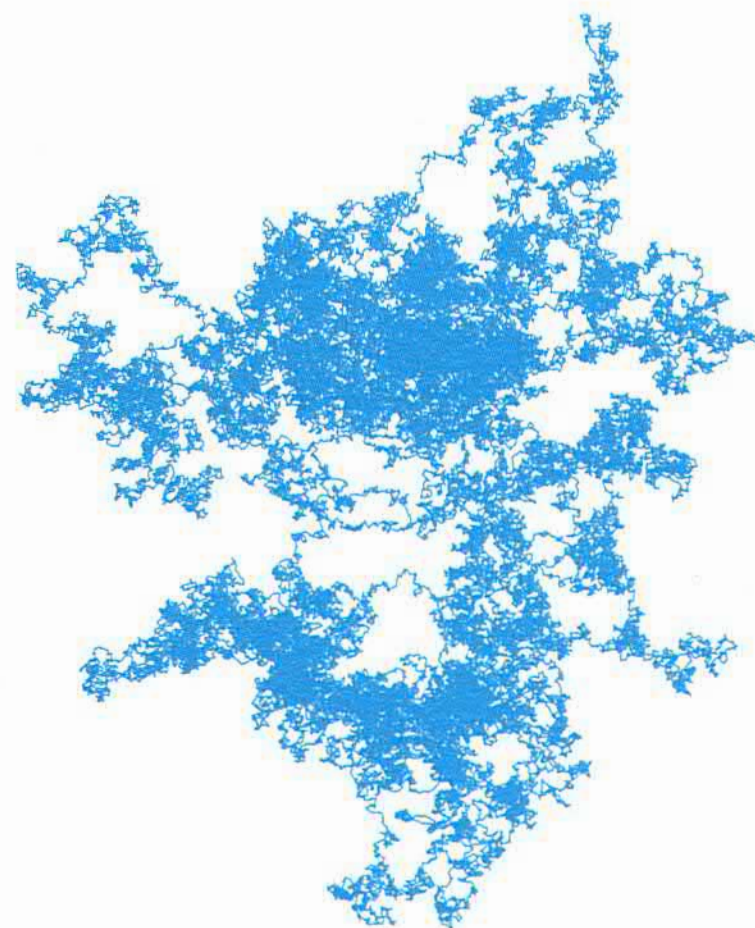
близкое к 2, означает, что некоторые участки плоскости кажутся сплошь закрашенными данной кривой. В природе встречаются и гладкие объекты, и фракталы, у которых значение размерности действительно дробное. Сам термин «фрактал» отражает разные

оттенки: в нём есть и изломанность (латинское *fractus*), и дробность (английское *fraction*).

Основатель теории фракталов Бенуа Мандельброт заинтересовался размерностями, связанными с броуновским движением. Отображающая его кривая на детализированных «портретах» имеет так много самопересечений, что некоторые участки выглядят как области положительной площади, а броуновское движение кажется двумерным и действительно является таковым, в силу результата, оценивающего среднее смещение как \sqrt{t} . Правда, если удалить такие участки и оставить только границу броуновского движения, то она будет очень похожа на некоторые береговые линии — это заметил и сам Мандельброт (вспомним, что его первая работа по теории фракталов называлась «Какова длина побережья Великобритании»). Присмотревшись внимательнее, Мандельброт заметил, что граница броуновского движения очень напоминает другой фрактал, размерность которого считалась равной $4/3$, и высказал гипотезу, что и у броуновской границы размерность $4/3$.

Этот другой «природный» фрактал — длинная линейная полимерная молекула, типа ДНК. Она уместится в крохотной клетке, поскольку плотно «упакована». Нобелевский лауреат Пол Флори, изучая реальное расположение макромолекул в растворах (такая информация важна, например, для понимания происходящих химических процессов), предложил использовать модель случайного полимера. С математической точки зрения это случайное блуждание без самопересечений, термин — самоизбегающее блуждание.

На языке путешествия матроса это ограничение означает, что теперь ему запрещается возвращаться к тем перекрёсткам, на которых он уже побывал. Такую задачу сложнее изучать, чем броуновское движение, в частности потому, что её нельзя представить динамически. При случайном блуждании без ограничений матросу не нужно помнить своё прошлое. А в самоизбегающем блуждании матросу надо наносить на карту все пройденные перекрёстки и больше туда не возвращаться. Но даже при наличии такой карты матрос в какой-то момент может обнаружить себя взаперти, например,



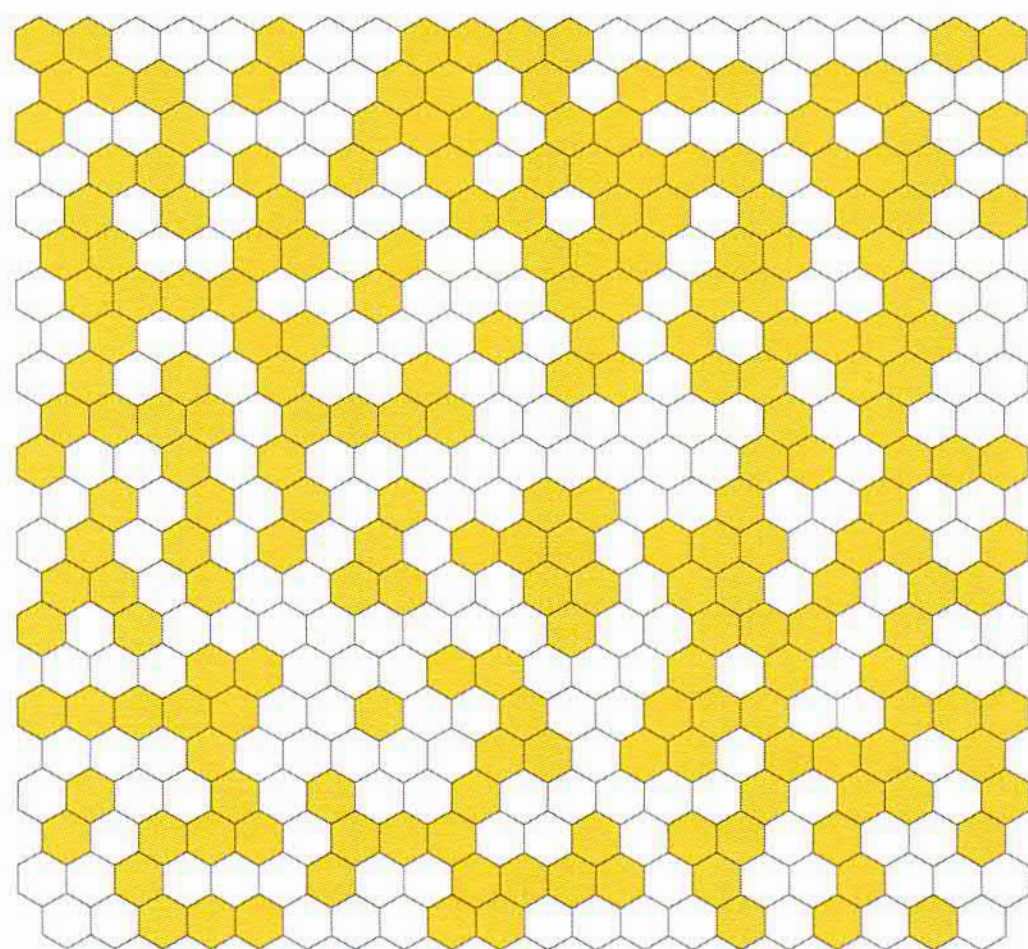
обойдя по кругу группу кварталов и войдя в её внутреннюю часть. Поэтому чтобы изучать траектории без самопересечений фиксированной длины (рассматривая, например, расположения полимерной молекулы), придётся предварительно все их найти.

Понятно, что среднее удаление от начальной точки в самоизбегающих блужданиях будет больше, чем в случайных блужданиях без ограничений, — сказывается запрет на возвращение. Ожидается, что в траекториях без самопересечений среднее удаление за t шагов будет равно $t^{3/4}$ (для сравнения: $\sqrt{t} = t^{1/2}$ у броуновского движения). Пол Флори предположил нестрогий вывод этой гипотезы, из которой вытекает, что возникающие в модели случайного полимера кривые — фракталы размерности $4/3$.

Аргументы Флори основывались на изначально нестрогой теории среднего поля Ландау, и довольно быстро коллеги Флори пришли к выводу, что она вносит две ошибки в вычисления. Строгого доказательства всё ещё нет, но недавние работы Лоулера, Шрамма и Вернера дают надежду, что $4/3$ — верный показатель степени, т. е. две ошибки непонятным образом взаимно сокращаются.

Все рассмотренные выше примеры фракталов мотивированы природными явлениями. Следующий пример иллюстрирует необходимость изучения фракталов, связанных и с природой, и с технологической деятельностью человека.

Перколяция (от латинского слова *percolatio* — фильтрация, процеживание) — явление часто встречающееся: от просачивания воды через породу или газов через фильтр противогаза до распространения пожаров, эпидемий и даже информации. Математическое моделирование перколяции — создание модели пористого (дырчатого) вещества.

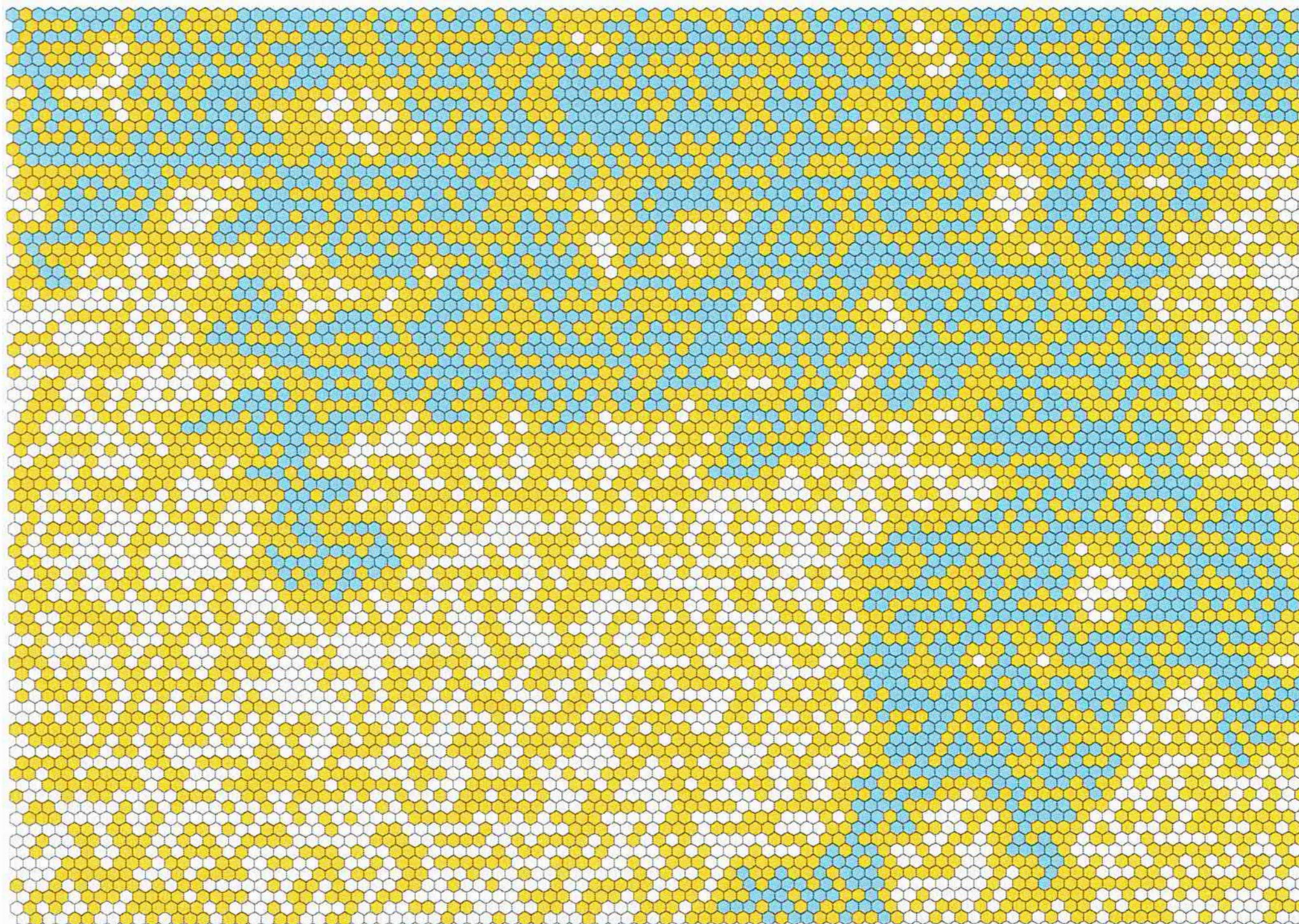


В середине XX века была предложена следующая общая модель перколяции. В плоской сотовой структуре каждая ячейка может быть заполненной (веществом) или пустой — в последнем случае в неё может попасть вода. Выбор характеристики ячейки определяется случайным образом — бросанием монетки.

Может ли через получившуюся пористую структуру сверху вниз просочиться вода? Если плотность пустот очень мала, то вода не проходит вниз, при возрастании

плотности — начинает просачиваться, дальнейший рост плотности приводит к увеличению протечек. Конечно, математики изучают не конкретный пример, а вероятность такого события.

Более правильный вопрос: а каковы пути просачивания в модели перколяции? Оказывается, эти пути — фракталы, в случае шестиугольной решётки размерность фрактала равна $4/3$. Например, это означает, что при просачивании через решётку, состоящую из 1000 слоёв, длина среднего пути составит $(10^3)^{4/3} = 10\,000$ — т. е. путь окажется весьма изломанным и длинным.



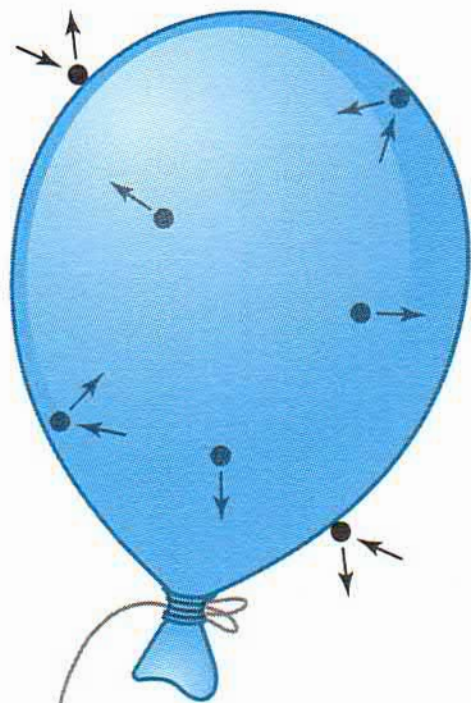
Показатель $4/3$ как размерность фрактала для пути перколяции и границы броуновского движения — результаты совсем недавние, они получены уже в XXI веке. А вот гипотеза Пола Флори, что размерность фрактала в модели случайного полимера тоже равна $4/3$, — до сих пор не доказана, хотя мы стали лучше понимать структуру фракталов этого типа. Хочется надеяться, что доказать гипотезу Флори удастся одному из читателей этой книги!

Как случается закономерность

Девочка плачет: шарик улетел.
Её утешают, а шарик летит...

Булат Окуджава

Наполненные гелием воздушные шары в моём детстве были редкостью и завораживали нас своим стремлением ввысь. Теперь, конечно, ими никого не удивишь, но всё равно грустно смотреть вслед упущенному и стремительно взмывающему вверх шару. Самое время поразмыслить о случайности и закономерности.



Закономерность, о которой мы будем говорить, не в том, что вечно приключается что-нибудь нежелательное: шарик улетает, автобус опаздывает, мяч пролетает мимо ворот и т. д. Удивительная закономерность в том, что такая сложная система, как воздушный шар, в целом хорошо описывается простым законом Архимеда из III века до нашей эры: чтобы удержать шар в равновесии, к нитке должна быть приложена сила, равная разности веса воздуха и гелия в объёме шара. Не будет этой силы, и шар начнёт ускоряться вверх.

Ну и что же в этом удивительного? А то, что перед нами взаимодействие бесчисленного числа молекул газа (гелия — внутри шара, азота и кислорода — снаружи) с огромным числом молекул полимеров, из которых сделаны сам шар и то, чем он завязан (нитка). Хотя газы и гораздо проще полимеров, всё равно хоть сколько-нибудь детальное понимание их физики возникло только в XIX веке, а многие вопросы и до сих пор занимают физиков, особенно математических. Вспомнив число Авогадро и найдя в интернете значение молярной массы воздуха, заключаем, что в 29 граммах воздуха содержится около $6 \cdot 10^{23}$ молекул. И ведь каждая из них куда-то летит, вращается, вибрирует, сталкивается с другими молекулами — состояние, полагаю, в чём-то хорошо знакомое каждому из нас. Но глядя на такую огромную систему в целом, мы видим действия законов физики для газов, функционирование экономики в обществе и бесчисленное множество других проявлений законов больших чисел, когда макроскопическая закономерность возникает из микроскопической случайности. Взять, к примеру, форму воздушного шара: без чувствительных приборов она будет казаться нам гладкой поверхностью, не меняющейся во времени, словно это чистая математическая идея, а не что-то, состоящее из сложных полимерных молекул.

Глядя на газ, математический физик, т. е. человек, изучающий математические модели физических явлений, не следит за каждой отдельной молекулой, а описывает происходящее в терминах средних значений всевозможных наблюдаемых величин по какой-то области в пространстве и/или времени. Например, классическая тройка

$$(\rho, p, T) = (\text{плотность, давление, температура})$$

отражает соответственно среднее число частиц на единицу объёма, средний импульс, который частицы передают действительным или воображаемым стенкам, и среднюю кинетическую энергию их движения. (Конечно, речь идёт об абсолютной температуре, т. е. температуре, отсчитываемой от абсолютного нуля, а не о шкалах Цельсия или Фаренгейта, которые отличаются от неё на преобразование вида $x \mapsto ax + b$.)

В принципе, можно было бы рассмотреть какой-то более длинный набор средних

$$\vec{\sigma} = (\rho, p, T, \dots),$$

но для такой системы, как газ, уже две величины p и T (именно их передаёт прогноз погоды) определяют все остальные средние. Иными словами, некоторые уравнения (их называют уравнениями состояния) сводят все мыслимые средние $\vec{\sigma}(x)$ по маленькой окрестности какой-то точки x к конечному набору величин, таких как p и T .

Это совершенно замечательный факт, но мы сейчас не будем на нём задерживаться. Вместо этого спросим себя: как эти средние $\vec{\sigma}(x)$ могут меняться от точки к точке внутри какой-то системы Ω , например внутри воздушного шара? Закономерность, о которой пойдёт речь, состоит в том, что распределение $\vec{\sigma}(x)$ в Ω также подчинено очень жёстким уравнениям. Любое состояние, не удовлетворяющее этим уравнениям, будет невероятно в том смысле, что вероятность его реализации будет совершенно ничтожна по всем разумным меркам.

Вероятность — это очень важное и сложное понятие, но при первом ознакомлении (да и в конечном итоге) его можно представлять себе так. Если у нас есть 1000 равновероятных возможных исходов и только в трёх из них происходит какое-то событие, то вероятность этого события есть 0,003. Легко поверить, что у такого рода дискретного подсчёта есть непрерывный аналог, при котором вероятность того, что случайное вещественное число x между 0 и 10 окажется меньше π , есть 0,314159...

Всё непрерывное можно сколь угодно хорошо приблизить дискретным, и если отрезок от 0 до 10 разделить на миллион равных частей, то непрерывное событие $\{x < \pi\}$ можно приблизить событием $\left\{x \leq \frac{314159}{100000}\right\}$. Для понимания сути обсуждаемых нами явлений разница между дискретным и непрерывным не существенна. Будем считать, что координаты и все другие параметры, описывающие движение молекул, округляются с точностью до какого-то очень маленького числа ε и поэтому принимают какое-то гигантское, но конечное число возможных значений. В частности, на некоторой очень малой шкале, сравнимой с ε , мы можем наблюдать только конечное число состояний. Кстати, совсем необязательно предполагать, что все эти элементарные состояния равновероятны, просто надо считать их вклад в вероятность с соответствующими весами. Ни одно из последующих рассуждений от этого не изменится.

Как нам оценить вероятность увидеть состояние газа в области Ω с заданными $\vec{\sigma}(x)$? Мысленно разобьём нашу область Ω на большое число подобластей Ω_i . Пусть, с одной стороны, Ω_i так малы, что координаты x и функции $\vec{\sigma}(x)$ в них можно считать постоянными, а с другой стороны, в молекулярном масштабе так велики, что происходящее внутри одной из них мало влияет на остальные. В воздухе, например, молекулы сталкиваются, пролетев порядка 10^{-8} метра, а на много бóльших расстояниях ведут себя практически независимо. Что значит независимо? Это значит, что число возможных микроскопических состояний системы есть, в главном приближении, *произведение* числа всех возможных состояний подсистем в каждой Ω_i . Тут удобно взять от всего логарифмы, ибо логарифмы переводят произведения в суммы. Получим

$$\ln P(\text{увидеть } \vec{\sigma}(x) \text{ в } \Omega) \approx \sum_{i=1}^N S(\Omega_i, \vec{\sigma}(x_i)) - C,$$

где $S(\Omega_i, \vec{\sigma}(x_i))$ есть логарифм числа состояний внутри Ω_i с заданным значением $\vec{\sigma}$ в какой-то точке $x_i \in \Omega_i$, а постоянная C не зависит от $\vec{\sigma}(x)$ и есть логарифм числа всех вообще возможных состояний системы. В статистической физике логарифм числа возможных микроскопических состояний при заданном макроскопическом называется *энтропией*, это очень важное понятие.

Каждую из подобластей Ω_i можно ровно так же измельчать дальше. Поскольку функция $\vec{\sigma}$ уже практически постоянна в Ω_i ,

это не даст ничего принципиально нового, и, значит, $S(\Omega_i, \vec{\sigma}(x_i))$ прямо пропорциональна объёму $|\Omega_i|$ области Ω_i . Чтобы найти коэффициент пропорциональности, вспомним, что по нашему предположению логарифм числа состояний в кубике \square с центром x_i и стороной ε конечен и равен какому-то числу $S(x_i, \vec{\sigma}(x_i)) := S(\square, \vec{\sigma}(x_i))$. Поэтому

$$S(\Omega_i, \vec{\sigma}(x_i)) = \frac{|\Omega_i|}{\varepsilon^3} S(x_i, \vec{\sigma}(x_i)).$$

Математики давно поняли важность операции суммирования какой-нибудь функции по всё более мелким разбиениям какой-нибудь области Ω и придумали ей специальное название — интеграл. По определению интеграла

$$\int_{\Omega} S(x, \vec{\sigma}(x)) dx = \lim \sum_i S(x_i, \vec{\sigma}(x_i)) |\Omega_i|,$$

где предел берётся по измельчениям разбиений и $x_i \in \Omega_i$. Для краткости будем иногда сокращать это обозначение до $\int_{\Omega} S dx$.

Собирая всё вместе, мы получаем, что

$$P(\text{увидеть } \vec{\sigma}(x) \text{ в } \Omega) \propto \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^3} \int_{\Omega} S dx\right) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right)^{\int_{\Omega} S dx},$$

где знак \propto читается «пропорциональна», а коэффициент этой пропорциональности подбирается так, чтобы сумма всех вероятностей равнялась единице. Вдумаемся в эту формулу. Она говорит, что вероятности различных состояний системы различаются на некоторую степень числа $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right)$, где ε — это размер слабо взаимодействующих подсистем, на которые наша система может быть разбита. Прикиньте, о какого размера числе мы говорим для кубометра воздуха, это совершенно гигантское число! Поэтому вероятность увидеть любое состояние, для которого интеграл $\int_{\Omega} S dx$ не максимален, абсолютно ничтожна, этого не случится никогда. И всегда случится то состояние $\vec{\sigma}(x)$, при котором этот интеграл достигает максимума. Условие максимума $\int_{\Omega} S(x, \vec{\sigma}(x)) dx$ есть обещанное уравнение на распределение $\vec{\sigma}(x)$ внутри Ω .

Раздел математики, занятый поиском максимумов интегралов, называется *вариационным исчислением*. Он возник давно

и оказался очень полезен, например, в решении задач классической механики и классической теории поля. Вслед за Лагранжем, уравнения движения ньютоновой механики и всех аналогичных ей наук можно переписать как уравнения на максимум некоторого интеграла. Мы только что видели, что подобное описание может быть получено не аксиоматически, а исходя из микроскопических принципов. (По очень похожей схеме можно вывести классическую механику из квантовой механики, роль величины ϵ^3 будет играть постоянная Планка.) То, что классическая механика считает условием равновесия, статистическая механика интерпретирует как условие оптимальности, условие *максимизации вероятности случиться*.

Принципиальную важность этого принципа для статистической механики можно сравнить с ролью эволюционного подхода к задачам биологии. Эволюция сама чётко отбирает самые жизнестойкие из всего великого множества биологических форм; совершенно аналогично, статистическая физика отбрасывает все варианты, кроме самого вероятного. Разумеется, законы физики и химии лежат в основе функционирования живой природы, и это сравнение не более чем попытка приблизить законы микромира к нашей жизненной интуиции. Однако подобного рода организующие принципы чрезвычайно важны для работы учёных, и, я надеюсь, читатель задумается о том, как много вокруг нас объясняется тем, что наш мир есть самый случайный из всех возможных миров.

На самом деле в наших выводах мы слегка забежали вперёд. Не может быть, чтобы разные подобласти Ω_i были совершенно независимы, ибо если масса и энергия заперты в нашей системе, то для них должны выполняться законы сохранения. Это означает, что максимум мы ищем не среди всех возможных $\vec{\sigma}(x)$, а только среди тех, для которых фиксирована

$$\text{суммарная энергия} = \int_{\Omega} E(x) dx,$$

где $E(x)$ есть плотность энергии, одно из средних в наборе $\vec{\sigma}(x)$. Аналогично могут быть введены другие ограничения на $\vec{\sigma}(x)$: например, если на стенках контейнера поддерживается заданная температура, то возникают граничные условия. Вариационное исчисление умеет справляться с поиском такого рода *условных максимумов*. Если читатель умеет решать задачи на максимум, то очень рекомендую ему сесть и проверить, что распределение

энергии по системе оптимально, если

$$\frac{\partial S(x, \vec{\sigma}(x))}{\partial E} = \text{одна и та же постоянная для всех } x \in \Omega.$$

А тем, кого подобные задачи пока ещё смущают, объясню этот ответ. Давайте мысленно переместим очень малое количество энергии δE из точки $x_1 \in \Omega$ в точку $x_2 \in \Omega$. Как изменится при этом $\int_{\Omega} S(x, \vec{\sigma}(x)) dx$? Понятно, что на величину порядка

$$\delta E \left(\left. \frac{\partial S(x, \vec{\sigma}(x))}{\partial E(x)} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial S(x, \vec{\sigma}(x))}{\partial E(x)} \right|_{x=x_1} \right),$$

которая не может быть ни положительной, ни отрицательной, если распределение энергии оптимально. Значит, эта величина равна нулю, что и есть условие постоянства $\frac{\partial S(x, \vec{\sigma}(x))}{\partial E}$. Кстати, та же самая математическая

задача об оптимальном распределении ресурса, суммарное количество которого фиксировано, встречается в массе других контекстов, включая например математическую экономику. Продумав эту задачу единожды, читатель сэкономит себе много времени в будущем.



На самом деле постоянная $\frac{\partial S(x, \vec{\sigma}(x))}{\partial E}$ есть величина, обратная температуре. С микроскопической точки зрения равенство

$$\frac{1}{\text{температура}} = \frac{\partial S(x, \vec{\sigma}(x))}{\partial E}$$

есть просто определение температуры. В самом деле, величина $\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)^{-1}$, во-первых, постоянна по любой равновесной системе, во-вторых, измеряется в единицах энергии и, в-третьих, совпадает с классическим определением температуры для идеального газа с точностью до системы единиц.

Энергия универсальна, и все её формы могут превращаться друг в друга. Реальное или, по крайней мере, воображаемое взаимодействие любых двух физических систем, при котором происходит обмен энергией, позволяет, выбрав шкалу температур, скажем, для воздуха, перенести её на другие системы.

А вот ещё одно простое следствие наших формул и нового определения температуры через производную энтропии по энергии. Рассмотрим маленькую подсистему Ω_i внутри всей большой системы Ω . Она может быть настолько мала, что

мы можем считать её одним из наших кубиков . Подсистема Ω_i может обмениваться энергией с остальной системой $\Omega \setminus \Omega_i$, поэтому её энергия E_i не фиксирована. То, что подсистема приобретает, остаток системы теряет, и, в частности, если в наш кубик  добавится какая-то энергия δE , то, по формулам, которыми мы только что пользовались, состояние в $\Omega \setminus \Omega_i$ потеряет

$$\exp\left(-\delta E \frac{\partial S}{\partial E}\right) = \exp\left(-\frac{\delta E}{T}\right)$$

общим множителем в своей вероятности. Вывод: если энергия E_i внутри Ω_i не фиксирована, а определяется равновесием с огромной внешней системой температуры T , то это даёт множитель $\exp\left(-\frac{E_i}{T}\right)$ в распределение вероятностей внутри Ω_i . Это называется *распределением Гиббса*. Совершенно замечательна универсальность множителя $\exp\left(-\frac{E}{T}\right)$. Действительно, для любой системы мы всегда можем предположить существование значительно большей объемлющей системы, и любые две системы, в принципе, можно привести в независимый контакт с таким гигантским общим резервуаром энергии.

Кстати, очень часто функция $S(x, \vec{\sigma}(x))$ не зависит явно от координаты x , и максимум интеграла часто достигается на постоянной функции $\vec{\sigma}(x) = \vec{\sigma}_{\text{макс}}$. И действительно, если к системе не приложено внешних сил, естественно ожидать, что температура и давление в ней выравниваются. Причём выравнивание это произойдёт исключительно быстро, что можно увидеть, оценив вероятность наблюдать заданные значения $\vec{\sigma}(x, t)$ как функцию и координаты x , и времени t .

Что же касается нашего воздушного шара, то тут внешние силы как раз приложены, а именно тяготение Земли. Неравномерностями процессов нагрева атмосферы в этих масштабах можно пренебречь, так что температуру мы будем считать постоянной, а вот давлению придётся зависеть от x . Легко поверить и легко проверить, что равновесие статистическое воспроизведёт условие равновесия механического — давление на разных высотах h_1 и h_2 должно отличаться ровно настолько, чтобы поддерживать вес газа между h_1 и h_2 . Кстати, заинтересованный читатель легко выведет из этого факта и уравнение состояния

$$p = \text{const } \rho T$$

для идеального газа, и что с увеличением высоты на интервалах,

где температура почти не меняется, давление и плотность газов в атмосфере падают экспоненциально.

Мы не будем в это углубляться, а просто заметим, что гелий легче воздуха. Поэтому давление в нём убывает с высотой медленнее, чем в воздухе. Значит, никак невозможно уравновесить давление внутри и вне гелиевого шара в поле тяжести Земли. Следовательно, молекулы газа будут сообщать ненулевой суммарный импульс молекулам полимера в шаре, а те, в свою очередь, через свою сложную статистическую механику, передадут эту силу полимерам в нитке и, в конце концов, нашему телу и нервным окончаниям в нём. Захватывающая картина! Столько всего интересного в математической физике, уже и не так жалко улетевшего шара...

Развитие компьютеров привело к созданию больших собраний оцифрованных текстов на разных языках — так называемых лингвистических корпусов. Эти корпуса можно обрабатывать методами математической статистики. Математические модели, порой неожиданно простые, но эффективные, позволяют компьютерным лингвистам предложить человечеству и конкретному пользователю решение задач, связанных с автоматической обработкой естественного языка: распознавание речи, определение языка текста и машинный перевод, классификация текстов по темам, извлечение знаний из текста, выделение ключевых слов, анализ тональности текста (т. е. выяснение, содержится ли в нём положительная или отрицательная оценка), обнаружение спама, создание чат-ботов и т. д.

Рассмотрим две задачи — автоматическое определение языка текста и исправление опечаток, хорошие решения которых основаны на анализе частотности отдельных букв и слов, а также их сочетаний в реальных текстах. Удивительно, но такой подход позволяет решать эти задачи, не обладая знаниями ни о грамматических правилах языков, ни о смыслах анализируемых текстов.

Определение языка текста. Предположим, что компьютер получил задание определить, на каком языке написан такой текст:

*При все че математиката е строга наука,
тя има и естетическа страна.*

Эта болгарская фраза означает «При том, что математика — строгая наука, она имеет и эстетическую сторону». Компьютер не владеет языками, но у него есть список языков, к одному из которых надо отнести этот текст. Будем считать, что круг кандидатов не слишком широк: английский, белорусский, болгарский, немецкий, русский, украинский, французский языки.

Самая простая идея, которая приходит в голову, — определять язык по алфавиту. В нашем случае это кириллица, поэтому сразу можно отбросить английский, немецкий и французский языки. Но этот метод не решит задачу полностью, например, он плохо справляется с русским и болгарским языками: болгарский алфавит — часть русского (в болгарском нет букв Ё, Ы, Э), так что любой болгарский текст можно принять за русский. Соотношение русского и украинского алфавитов сложнее, ни один не является частью другого: в украинском нет буквы Ъ, зато есть буквы для обозначения глас-

ных звуков Ё, І, Ъ и согласного Г. Но все буквы данной фразы в нём присутствуют. В белорусском нет И (вместо неё используется буква І), поэтому он не подходит. Итак, алфавитный подход с задачей не справляется: осталось три языка-кандидата.

Наличие лингвистических корпусов позволяет анализировать языки, находить характеристики, которые их различают. В частности, «паспортом» языка может служить набор частот, с которыми в среднем встречаются буквы в этом языке.

На частотность букв обратили внимание ещё в докомпьютерную эпоху. Например, в телеграфной азбуке Морзе, возникшей в первой половине XIX века, наиболее часто используемым буквам ставили в соответствие более короткие сочетания точек и тире. Так, самые частые в английском языке буквы Е и Т кодируются односимвольно — точкой и тире соответственно. Эти буквы можно встретить и в начале верхнего ряда стандартной английской раскладки клавиатуры, унаследованной от пишущих машинок, — QWERTY. А в немецкой раскладке привычный глазу ряд заменён на QWERTZ — буква У в немецком языке встречается существенно реже, чем Z, и сослана на периферию. Ещё один пример: в криптографии простые шифры на основе замены букв утратили значение после того, как были изучены частотные характеристики языков. Естественно, в XIX веке подсчёты частотности выполнялись вручную. Теперь же, с появлением лингвистических корпусов, частоты букв или слов можно посчитать на компьютере, причём эти данные будут более точными, объективными.

Если условиться, что русский алфавит состоит из 33 букв и пробела, то окажется, что самый частый символ — это пробел (14,46%), дальше следуют гласные О (9,42%), Е (7,33%), И (6,72%), А (6,52%) и согласные Н (5,83%), Т (5,56%). А реже всего встречаются буквы Ф (0,27%), Ъ (0,03%) и Ё (0,01%). Конечно, в каждом конкретном тексте частоты могут отличаться от приведённых, но эти отклонения будут несущественными.



А вот в болгарском языке частоты букв будут другими. Первыми после пробела идут те же четыре гласные, что и в русском,

но в обратном порядке: А, И, Е, О. Буква Ъ в русском языке — редкость, а в болгарском употребляется в разы чаще: она обозначает особый гласный звук типа краткого «а» и встречается даже в самом слове *български*. Последней по частотности буквой является Ь. Всё это показывает, что частотность букв действительно является индивидуальной характеристикой языка.

В компьютерном анализе (например, при определении языка) текст — это последовательность букв. В простейшей модели принимается, что каждая буква в этой последовательности появляется независимо от предыдущих, т. е. текст рассматривается как цепь независимых случайных событий: «прочитав» несколько букв, читатель не знает, что ждёт его дальше. Вследствие независимости вероятность встретить данную последовательность букв в выбранном языке равна произведению вероятностей (частот) появления букв в этом языке.

Зная частотности букв для каждого из трёх языков-претендентов, можно найти вероятность появления всей фразы:

	П	Р	И	_	В	С	...	
Болгарский	0,025	· 0,044	· 0,076	· 0,163	· 0,038	· 0,043	· ...	$\approx 4,0 \cdot 10^{-80}$
Русский	0,024	· 0,043	· 0,067	· 0,145	· 0,039	· 0,048	· ...	$\approx 1,4 \cdot 10^{-82}$
Украинский	0,024	· 0,039	· 0,055	· 0,157	· 0,045	· 0,034	· ...	$\approx 1,2 \cdot 10^{-85}$

Получается, что вероятность случайного появления этой фразы в болгарском языке в 300 раз больше, чем в русском, и в 300 000 раз больше, чем в украинском. Если о происхождении фразы нет априорной информации, то языки-кандидаты считаются равноправными. Это позволяет сравнивать вероятности появления фразы в разных языках, представив их более привычно, в процентах:

болгарский — 99,65%, русский — 0,3497%, украинский — 0,0003%.

Следовательно, выбрав вариант с максимальной вероятностью, в данном примере получим правильный ответ: фраза написана по-болгарски. Любопытно, что такой простой алгоритм неплохо сработал даже на тексте небольшой длины.

Но так бывает не всегда. Например, для названия этой книги *Математическая составляющая* получается неожиданный результат: болгарский — 51,55%, русский — 40,75%, украинский — 7,7%.

Симпатия этого алгоритма к болгарскому языку объяснима и носит общий характер: в нём меньше букв, чем в русском или украинском языках, а значит, частотность отдельной буквы будет в среднем чуть больше. Поэтому большинство нестандартных текстов алгоритм сочтёт болгарскими.

Точность определения языка текста можно повысить, если рассматривать не частоты букв по отдельности, а частоты комбинаций символов некоторой длины. Дело в том, что, в отличие от применённой выше простейшей модели, буквы в реальном тексте не независимы: на самом деле каждая буква зависит от предшествующих, по крайней мере — от предыдущей. Так, по правилам русского языка после Ъ могут идти только буквы Е, Ё, Ю или Я. В болгарском после Ъ можно встретить и букву Л, причём это в 10 раз вероятнее, чем встреча с Е, Ю и Я, вместе взятыми. А в украинском И почти не используется после пробела — значит, наша первая фраза со словами *има и* едва ли может быть украинской.

Эту идею академик Андрей Андреевич Марков (1856—1922) воплотил в математической модели, которая в его честь получила название «цепь Маркова». Он изучил распределение гласных и согласных в последовательности из 20 000 букв в романе «Евгений Онегин» (первая глава и начало второй). Основным вывод гласил: «Мы видим, что вероятность букве быть гласной значительно изменяется, в зависимости от того, предшествует ей гласная или согласная». Подсчёты А. А. Маркова показали, что общая доля гласных — 43,2%, но вероятность встретить гласную после гласной уменьшается до 12,8%, а после согласной — возрастает до 66,3%.

Получается, что в реальном тексте имеем дело не с вероятностями независимых случайных событий, а с условными вероятностями последовательно происходящих событий. В марковской модели будущее зависит от настоящего, а вот прошлое можно не анализировать: его влияние заложено в настоящем. Житейский пример: предсказывая погоду на завтра, можно ориентироваться на сегодняшнюю. Зимняя гроза — редкое явление, так что если сегодня гроза,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	м	о	й	д	я	д	я	с	а	м	5
2	б	х	г	е	с	т	н	н	х	н	3
3	р	а	в	и	а	к	о	г	д	а	4
4	н	е	в	ш	у	т	к	у	з	а	4
5	н	е	м	о	г	о	н	у	в	а	5
6	ж	а	т	с	е	б	з	з	а	с	4
7	т	а	в	и	а	и	а	у	г	ш	4
8	е	в	н	д	у	м	а	т	н	е	5
9	м	о	г	е	г	о	н	р	и	м	4
10	п	р	д	р	у	г	и	м	н	а	4
	3	х	2	5	5	3	5	4	3	5	42
	0	3	0	0	0	1	0	2	4		18
											24

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	у	к	а	н	а	б	о	ж	е	м	5
2	о	й	к	а	к	а	з	с	к	у	6
3	к	а	с	б	о	л	н	о	м	с	3
4	и	д	ь	т	а	д	е	н	и	н	5
5	о	г	н	е	о	т	х	о	д	я	5
6	н	и	щ	а	г	у	н	р	о	г	4
7	к	а	к	о	е	н	и	з	к	о	5
8	е	к	о	в	а	р	с	т	в	о	4
9	н	о	л	у	ж	и	в	а	г	о	5
10	з	а	б	а	в	л	з	т	е	м	4
	5	6	3	6	6	3	5	3	4	5	46
	0	3	1	3	1	1	0	1	0	0	23
											23

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	у	н	о	д	у	ш	к	и	п	о	5
2	р	а	в	л	я	т	н	е	г	з	3
3	а	л	н	о	п	о	д	н	о	с	4
4	и	т	л	е	к	а	р	с	т	в	3
5	о	в	з	д	ы	х	а	т	ч	д	4
6	у	м	а	т	п	р	о	с	е	б	4
7	ж	к	о	г	д	а	ж	е	г	о	5
8	р	т	в	о	з	м	е	т	е	з	3
9	б	ж	а	к	д	у	м	а	л	4	
10	м	о	л	о	д	о	и	п	о	в	5
	6	2	4	5	2	5	5	2	6	3	40
	1	0	2	1	0	2	1	0	1	0	23
											17

то завтрашний день может оказаться и солнечным, и дождливым, но вряд ли выпадет снег. С другой стороны, если сегодня идёт снег, то увидеть завтра грозу — маловероятно.

Марковские цепи как математический инструмент можно использовать для анализа распределения не только гласных и согласных в данном языке, но и для всех пар букв алфавита. Зависимость буквы от предшествующей заметить несложно. Например, в русском языке среди пар, начинающихся с буквы З, наиболее вероятны сочетания ЗА (29,67%), ЗН (10,18%), З_ (пробел после З; 8,36%), а после буквы А те же символы А, Н, _ дают совсем другие результаты: АА (0,03%), АН (9,56%), А_ (20,36%).

Для решения задачи определения языка текста можно сравнивать частотные характеристики пар из одинаковых символов в разных языках. Например, тройки лидеров среди пар, начинающихся с буквы З: в русских текстах — ЗА, ЗН, З_; в украинских — ЗА, З_, ЗН; в болгарских — ЗА, ЗИ, ЗВ.

Зная частоты всевозможных пар, можно в каждом из языков-кандидатов найти вероятность в марковской модели словосочетания *Математическая составляющая*, которое рассматривается как последовательность пар: _М (буква М является началом слова), МА, АТ, ТЕ, ЕМ и т. д. Вероятность всего словосочетания находится как произведение вероятностей этих пар. Результаты (округлённые) дают ответ на вопрос, где могла появиться такая книга:

болгарский — 0,06%, русский — 99,94%, украинский — 0,00003%.

А для фразы, с которой начался разговор (*При все че математиката...*), степень уверенности у марковской модели почти абсолютная: вероятность, что фраза написана по-болгарски, равна 99,99991%!

Частотность последовательностей из двух (а лучше даже трёх) букв — очень точная характеристика языка. Приведённый метод — основа всех применяемых определителей языка, самый известный — модуль в Google Translate. Получается, что для решения этой лингвистической задачи не требуется знание языков, работает чистая статистика.

Исправление опечаток. Текстовые редакторы и смартфоны решают эту задачу методами, сходными с использовавшимися в задаче определения языка. Только теперь сравниваются частоты не букв, а слов и их последовательностей в выбранном языке.

Предположим, что пользователь ввёл фразу:

Его руква немного болит,

а задача компьютера — найти и исправить в ней опечатки. Человеку сразу понятно, что опечатка допущена в слове *руква*, а должно

быть написано слово *рука*. Попробуем научить этому и компьютер, используя гигантский лингвистический корпус русскоязычных текстов общей длиной 16 миллиардов слов.

На первом этапе отыщем подозрительные слова: такие слова, которые либо отсутствуют в корпусе, либо встречаются там очень редко, скажем, для определённости — не более 100 раз (причиной возникновения в корпусе таких слов могут быть опечатки). А слова, которые встречаются более 100 раз, составляют словарь.

Вот сведения о частотах наших четырёх слов в корпусе: *его* — 46 643 493, *руква* — 50, *немного* — 3 475 296, *болит* — 203 993. По принятой договорённости алгоритм решает, что в слове *руква* допущена опечатка.

На втором этапе определим набор слов, одно из которых, возможно, хотел ввести пользователь. Очевидно, что эти слова должны быть похожими, близкими в каком-то смысле к слову *руква*: вряд ли человек хотел напечатать *локоть*, а получилась *руква*.

Для измерения близости слов в лингвистике обычно используется расстояние Дамерау—Левенштейна (названное в честь американского лингвиста и российского математика). Это расстояние равно минимальному числу «шагов», необходимых для превращения одного слова в другое. Такими шагами являются типовые, стандартные ошибки при наборе текста: замена одной буквы на другую, добавление или удаление буквы, перестановка соседних букв.

Например, расстояние между словами *собака* и *кошка* равно 3: замена *с* на *к* (получится *кобака*); замена *б* на *ш* (*кошака*); удаление первой *а* (*кошка*). Есть и другой путь длины 3: *собака* → *соака* → *сошка* → *кошка*. Но осуществить превращение меньше чем за 3 шага не удастся.

Такое расстояние между словами обладает всеми привычными свойствами расстояния между точками на плоскости: неотрицательность, симметричность (расстояние от *собака* до *кошка* равно расстоянию от *кошка* до *собака*), справедливо неравенство треугольника (см. «Далёкое близкое», стр. 68). Теперь можно формализовать ощущение, что слово *руква* легко получается из слова *рука*, но не из слова *локоть*: расстояние Дамерау—Левенштейна от *рука* до *руква* равно 1, а от *локоть* до *руква* — 5.

Опечаток в одном слове обычно немного, чаще всего одна. Найдём в словаре все слова, которые отстоят от подозрительного слова *руква* на расстояние 1. Слов-кандидатов не так много: *рука* (удаление *в*), *рукав* (перестановка *а* и *в*), *буква* (замена *р* на *б*) и *рукава* (добавление *а*). На этом можно остановиться и предложить пользователю список кандидатов — пусть выбирает сам. Именно так работает, например, проверка орфографии в Microsoft Word.

Но компьютер может пойти дальше и попробовать исправить опечатку, т. е. выбрать самого вероятного кандидата и предложить его пользователю (так поступает Google Docs), а может и сам подставить его в предложение (так обычно работают модули в смартфонах, «помогающие» набирать текст). Этот выбор единственного кандидата — следующий этап алгоритма, который можно реализовывать по-разному.

Простейшее, но неплохо работающее решение — выбрать самое частотное слово. Частоты слов-кандидатов в корпусе таковы: *рука* — 350 883, *рукава* — 126 817, *буква* — 107 262, *рукав* — 66 094. Как видно, в примере *Его рукава немного болит* такой автоматический выбор совпадает с человеческим.

А вот во фразах

Здесь написана неправильная рукава и У меня рукава порвался

простейшее решение — заменить *рукава* на *рука* — будет ошибочным. Чтобы алгоритм работал более «разумно», надо каким-то образом учитывать слова в контексте фразы. И здесь на помощь снова приходят марковские цепи.

Воспользуемся идеей, которая применялась в анализе по буквам, и попробуем предсказать следующее слово по последнему из виденных. Например, слово *неправильная* встречается в корпусе 50 267 раз; пары *неправильная рукава* и *неправильная рукав* в корпусе отсутствуют, *неправильная рука* встречается 4 раза, *неправильная буква* — 53 раза. На примере фразы *Здесь написана неправильная рукава* видно, что метод выбора самой частотной пары соседних слов более эффективный, чем простейший алгоритм.

Дальнейшее улучшение алгоритма состоит в том, что учитываются и слово, идущее перед подозрительным словом, и слово, идущее после него. Определяются частоты обеих пар, найденные вероятности перемножаются. На примере фразы *У меня рукава порвался* даже без статистических данных видно, что после сравнения произведений вероятностей пар выбор наибольшего выглядит достоверным решением:

(меня рука) · (рука порвался); (меня рукава) · (рукава порвался);
(меня буква) · (буква порвался); (меня рукав) · (рукав порвался).

Получается хорошо работающее исправление опечаток.

Разумеется, и этот алгоритм можно и нужно совершенствовать. Во-первых, вероятности одношаговых опечаток отличаются: например, перестановка соседних букв в слове значительно вероятнее, чем замена буквы на удалённую от неё на клавиатуре (скажем, заменить *б* на *р* не так-то просто). Во-вторых, можно встретиться

с правильным, имеющим смысл словосочетанием, которое отсутствует в корпусе, и тогда произведение вероятностей будет равно нулю (пример: словосочетание *работающее исправление*, которое мы использовали в конце предыдущего абзаца, в корпусе пока отсутствует). В-третьих, рассмотренный вариант марковской цепи связывает слово только с ближайшими соседями, хотя в языке встречаются зависимости и на далёких расстояниях. Например, во фразе *Руква у рубашки, которую Вася купил в аэропорту, оказались слишком короткими*, выбирая на замену *рукав* или *рукава*, придётся опираться не на соседние, а на далёкие слова *оказались* и *короткими*. В-четвёртых, сделав опечатки, можно получить фразу со словами из словаря, но ошибочную: например, *У меня лукав порвался*. Алгоритм такую фразу ни в чём не заподозрит. Впрочем, усложнение алгоритма позволяет справиться с подобными затруднениями.

Компьютерная лингвистика. Лингвистические корпуса — фундамент компьютерной лингвистики, неисчерпаемый источник сведений о языке. Их анализируют и профессионалы — лингвисты и компьютерные специалисты, и начинающие исследователи. Даже школьник может самостоятельно написать программу для поиска и проверки закономерностей в языковых массивах.

Самый известный ресурс для русского языка — это Национальный корпус русского языка (НКРЯ, <http://www.ruscorpora.ru>), в основной части которого содержится 283 миллиона слов, а всего — около 600 миллионов слов. Корпус *Araneum Russicum Maximum* (<http://unesco.uniba.sk>), объёмом 16 миллиардов слов, мы использовали для определения частоты слов при исправлении опечаток. Он состоит из текстов, собранных из интернета, а это очень важный способ создания современных лингвистических ресурсов: ведь в сети лежит множество доступных текстов. К сожалению, эти корпуса нельзя сохранить на своём компьютере, и возможности пользователя ограничены веб-интерфейсом. На помощь приходят другие источники: так, определение языка проводилось на основе свободно распространяемых корпусов из проекта *Universal Dependencies* (<http://universaldependencies.org>), где в едином формате представлены данные 70 языков.

Понятно, что частота отдельных слов и их сочетаний существенно зависит от набора текстов, включённых в корпус. У корпуса художественных текстов и корпуса текстов новостных — разный «словарный запас». Универсального, правильного корпуса для языка не существует, но надо научиться даже из отдельных, так или иначе «окрашенных» корпусов извлекать общие свойства, черты, особенности

данного языка. Это желание вызывает в памяти восклицание основателя палеонтологии Жоржа Кювье: «Дайте мне одну кость, и я восстановлю животное!». По сути — это те задачи, из которых и родилась математическая статистика: как получить представление о ненаблюдаемом целом по некоторой выборке. И для их решения были созданы методы, более продвинутые, чем простой подсчёт частот.

Один из приёмов — усреднение, согласование значений частот по разным фрагментам корпуса, чтобы уменьшить влияние отдельных текстов. Например, частотность слова *якорь* в текстах НКРЯ, распределённых по десятилетиям, с 1970 года до наших дней, выглядит странно: 1970-е — встречается 160 раз на миллион; 1980-е — 6,8; 1990-е — 8,4; 2000-е — 6,6; 2010-е — 6,7. Причина аномалии — включённая в НКРЯ «Книга о якорях», изданная в 1973 году. В ней одной слово *якорь* встречается 1769 раз, а во всём корпусе — только 2896. Полученная простым подсчётом частотность слова *якорь* по всему массиву — 21,9 на миллион — явно завышенная. Но если упорядочить значения частот по десятилетиям и взять число из середины списка (медиану), то получится более реальный результат: 6,8 на миллион. Можно учитывать и дисперсию, т. е. оценивать разбросанность значений: как часто и на сколько они отклоняются от среднего значения. Такой метод применял ещё А. А. Марков, работая с текстом «Евгения Онегина»: он проверял устойчивость, независимость своих результатов от способов подсчёта. Более сложные методы используются для предсказания «настоящих», истинных частот сочетаний слов: надо уметь отличать те, что в корпусе не встретились, но в принципе вполне возможны, от тех, что не встретились, потому что практически невозможны.

В заключение отметим, что автоматическая обработка языка начала активно развиваться в 1950-е годы. В частности, первое время машинный перевод основывался на созданных вручную правилах, предписывавших, как именно переводить то или иное словосочетание при определённых условиях. Постепенно выяснилось, что сочинение правил требует огромных затрат человеческого труда, а работают они всё равно плохо.

Поэтому в конце 1980-х годов на первый план в автоматической обработке естественного языка вышел статистический подход: посмотрим, как похожие задачи решались до нас человеком, и найдём решение, комбинируя его из готовых частей. Это стало возможным после появления лингвистических корпусов. Методы, рассмотренные нами на примерах, прежде всего частотность букв, слов и сочетаний, стали основой решения задач компьютерной лингвистики,

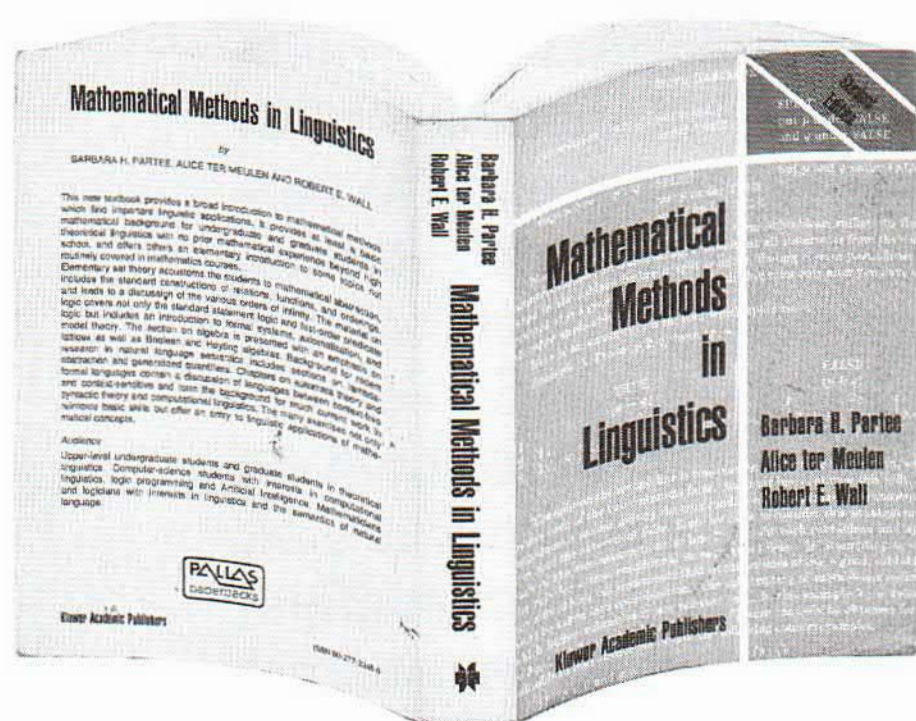
перечисленных в начале статьи. Интересно, но временами создаётся впечатление, что алгоритмы и программы, основанные на статистическом подходе, в какой-то мере освоили язык.

Например, эффективность применения марковских цепей неявно связана с грамматикой и структурой языка. В примере со словосочетанием *Математическая составляющая* при выборе одного из трёх языков помогла, в частности, высокая частотность сочетания *ая* в русском языке. Дело в том, что в русском языке в женском роде встречается окончание *-ая*, причём часто, а в болгарском и украинском в такой форме было бы просто *-а*.

В XXI веке математика предложила новые подходы к автоматической обработке языка. Бурное развитие искусственных нейронных сетей, обучаемых на огромных массивах входных данных, дало возможность решать самые разные задачи компьютерной лингвистики. А принципы работы нейронных сетей ещё больше приближают компьютер к тому, что можно назвать пониманием естественных языков. На данном этапе компьютерная лингвистика всё больше превращается в одну из разновидностей машинного обучения. Но если мы хотим разобраться с тем, что же происходит при обработке текстов искусственными нейронными сетями, нужен именно лингвистический взгляд. Лингвистика как наука необходима и для более полного использования возможностей уже существующих инструментов, и для построения новых математических моделей.

Математика языка

Правильно говорить на каком-либо языке, в частности, на русском можно, конечно, и не зная математики. Но вот для того, чтобы дать языку научное описание, математика оказывается полезной, а в XXI веке пожалуй что и необходимой. Посмотрите на эту книгу. Она называется «Математические методы в лингвистике».



Даже вкратце обозреть её содержание, конечно, невозможно. Но можно обратить внимание на её толщину. Издана она известным издательством Kluwer и является наглядным свидетельством того, сколь серьёзно сейчас в мире понимается связь математики с лингвистикой.

Попробуем уловить эту связь на конкретных примерах.

Все знают, что в русском языке шесть падежей: именительный, родительный, дательный, винительный, творительный,

предложный. Такова традиция. Этому учат в школе. Поэтому эти шесть падежей будем именовать **школьными** или **традиционными**.

Когда слово меняет свой падеж, происходит изменение его формы; изменение, в частности, может состоять и в том, что форма слова остаётся прежней: у слова *кровать*, например, совпадают формы именительного и винительного, а у слова *кофе* — вообще все формы. Изменение форм данного слова по всем падежам называется его **склонением**; обычно термином «склонение» обозначают изменение слова не только по падежам, но и по числам, но мы для простоты «забудем» на некоторое время о существовании множественного числа и будем рассматривать слова лишь в единственном числе. Вот, например, склонение слова *сахар*: им. п. *сахар*, род. п. *сахара*, вин. п. *сахар*, дат. п. *сахару*, тв. п. *сахаром*, предл. п. *о сахаре*. Все эти формы: *сахар*, *сахара*, *сахару*, *сахаром*, *сахаре* — называются **словоформами** слова *сахар*; словоформы часто называют просто **словами**.

Спросим себя, какой падеж у словоформы *сахару*. В только что приведённом списке словоформ указано, что это дательный падеж. Теперь посмотрим на фразу

(1) Положить тебе ещё сахару?

Согласится ли любезный читатель, что у слова *сахару* здесь дательный

падеж? Ведь дательный падеж, как известно, отвечает на вопрос *Кому?/Чему?*. Здесь же слово *сахару* отвечает на вопрос *Чего?*. Но на вопрос *Чего?* отвечает родительный падеж. Но формой родительного падежа для слова *сахар* служит слово (форма) *сахара*. Как же быть?

Отложим ответ на заданный вопрос и рассмотрим похожую ситуацию. Самая знаменитая детская песенка начинается со слов

(2) *В лесу родилась ёлочка....*

В каком падеже здесь слово *лесу*? Судя по окончанию — в дательном. Однако сразу возникают две трудности, препятствующие тому, чтобы радостно принять этот ответ. Первая трудность аналогична той, которую мы видели в примере (1) со словом *сахару*. Дательный падеж у слова *лес* должен отвечать на вопрос *Кому?/Чему?*, как, например, во фразе

(3) *Вернём долги лесу.*

Однако во фразе (2) слово *лесу* отвечает на другой вопрос, а именно на вопрос *Где?*. Вторая трудность для нас новая и связана с **акцентуацией**, т. е. с местом ударения в слове. Во фразе (3), служащей для нас эталоном дательного падежа для слова *лес*, ударение в слове *лесу* стоит на первом слоге, тогда как во фразе (2) слово *лесу* имеет ударение на втором слоге. Выходит, что во фразе (2) мы встречаемся с какой-то новой словоформой слова *лес* — новой в том смысле, что она отсутствует в традиционном шестичленном списке падежных форм этого слова. Значит, список неполон. И действительно, логика вещей подсказывает, что должен быть специальный падеж, отвечающий на вопрос *Где?*. Этот падеж называется **местным падежом**, или **локативом** (от латинского слова *locus* 'место'). Именно в локативе и стоит слово *лесу* в предложении (2). Вот пример, где местный и предложный падежи противопоставляются друг другу в пределах одной фразы:

(4) *Вороны искали в снегу (местн. п.) пищу, а художники в снеге (предл. п.) — вдохновения для своих картин.*

Здесь перефразирован известный пример, предложенный великим филологом Романом Осиповичем Якобсоном:

(4') *Вороны чего-то искали в снегу, но корму в снегу не было. — Художники чего-то ищут в снеге, но живописности в снеге нет.*

Местный падеж называют также **2-м предложным**.

Теперь нас не должно удивить решение, предлагаемое лингвистами для проблемы, возникающей в связи с фразой (1). Здесь мы также имеем дело с новым падежом, выражающим неопределённое количество, неопределённую часть того предмета, о котором идёт речь во фразе — в данном случае неопределённое количество сахара. Этот падеж называется **отделительным падежом** или **партитивом** (от латинского слова *pars* 'часть'). Поскольку слова в партитиве отвечают на вопрос *Чего?*, этот падеж называют также **2-м родительным**.

В обоих случаях, и с обнаружением в падежной системе русского языка локатива, и с обнаружением партитива, логика рассуждений лингвиста такая же, как у биолога, сталкивающегося с новым видом. На первых порах он пытается отнести встретившееся ему растение или животное к тому или иному из известных видов, и только потом, потерпев неудачу, констатирует, что обнаружен новый вид.

В оправдание школьных учебников следует сказать, что найденные два дополнительных падежа встречаются в русском языке значительно реже шести традиционных падежей; к тому же очень часто форма локатива совпадает с формой предложного падежа, а форма партитива — с формой падежа родительного, как, например, во фразах

- (5) *Киты живут в океане;*
- (6) *Положить тебе ещё каши?.*

Тем не менее, на наш взгляд, оба нетрадиционных падежа следует прописать в школьных учебниках. Сейчас они присутствуют только в вузовских учебниках для филологов. Падежи этого октета — шесть традиционных и два добавленных — условимся называть **стандартными**. Надеемся, что в близком будущем на них распространится термин «школьные», а в будущем более отдалённом — даже и термин «традиционные».

А нет ли в русском языке ещё каких-нибудь падежей?

Отменим на короткое время наш запрет на рассмотрение множественного числа и вспомним строки Маяковского:

- (7) *...Я бы в лётчики пошёл, / пусть меня научат.*

Какой падеж имеет здесь слово *лётчики*? Ответ зависит от того, какое из трёх решений принимает лингвист. Первое решение: можно считать, что слово *лётчики* пребывает здесь в именительном падеже, имеющем при себе предлог *в*. «Именительный с предлогом» звучит, конечно, достаточно экзотично, но пример из Маяковского отнюдь не уникален. Вниманию читателя предлагается знаменитое восклицание Фамусова:

- (8) *Что за комиссия, Создатель, / быть взрослой дочери отцом!.*

Слово *комиссия* стоит в именительном падеже с предлогом *за*. Второе решение: можно считать, что в данном конкретном контексте слово *лётчики* означает вовсе не множественное число от слова *лётчик*, а некую нерасчленённую массу лётчиков (подобно тому, как слово *листва* не является множественным числом от слова *лист*). При таком понимании слово *лётчики* является неодушевлённым существительным единственного числа, стоящим во фразе (7) в винительном падеже. Третье решение: можно, наконец, считать, что в этом примере слово *лётчики* представляет собой множественное число от слова *лётчик* и стоит в особом **включительном падеже**. Этот падеж отличается от винительного падежа формой управляемого слова после глагола: *иду в лётчики* (включит. п.), *говорю про лётчиков* (вин. п.).

Следует, кроме того, учесть, что понятие падежа (как и едва ли не все другие лингвистические понятия) опирается на представление о грамматически правильной фразе, т. е., говоря попросту, о том, какие сочетания слов считаются допустимыми, а какие — нет. Но само представление о допустимости в языке не является несомненной истиной и зачастую зависит от вкусов говорящего на этом языке. Поэтому в самом понятии падежа скрыта некоторая неопределённость или, лучше сказать, вариативность.

Можно ли согласиться с тем, что глагол *ждать* требует после себя винительного падежа для имён одушевлённых и родительного падежа для имён неодушевлённых? Поясним сказанное на примерах. Можно ли согласиться с тем, что разрешено сказать только *жду сестру*, *жду результата*, а вот *жду сестры* и *жду результат* — это запрещено? Согласие означает появление нестандартного **ждательного падежа**, формы которого совпадают с формами винительного для одушевлённых имён и с формами родительного для неодушевлённых. Но язык меняется, и то, что было невозможно позавчера, становится возможным сегодня.

Ввиду сказанного целесообразно остановиться на 8 стандартных падежах. Для сравнения — один из языков Дагестана, табасаранский, в своём литературном варианте насчитывает 46 падежей. Остаётся вопрос, что такое падеж. Вот тут на помощь приходит математика.

«Математическая составляющая» в вопросе о падежах заключается в том, что первое научное определение понятия 'падеж' имело в своём основании такие начальные понятия математики, как пара, бинарное отношение, разбиение на классы, а сформулировал его великий математик Андрей Николаевич Колмогоров. Мне это определение стало известно при следующих обстоятельствах.

24 сентября 1956 года на Филологическом факультете Московского университета открылся семинар «Некоторые применения математических методов в языкознании» — первый семинар по математической лингвистике в нашей стране. Я был одним из двух (вместе с лингвистом Вячеславом Всеволодовичем Ив́ановым) учредителей этого семинара и за несколько дней до названной даты обратился к Колмогорову с просьбой посоветовать, с чего начать. Он посоветовал начать с конкретных задач и предложить участникам семинара две задачи на поиски определений двух популярных понятий — понятия ямба и понятия падежа. Что касается ямба, то убеждение, что в ямбической строке ударения стоят на чётных слогах, было почти всеобщим, несмотря на очевидную ложность. (Взять хотя бы вторую строку «Евгения Онегина»: *Когда не в шутку занемог*. Для наглядности мы подчеркнули здесь гласные в чётных слогах.) Что касается падежа, то удовлетворительное определение этого понятия, хотя бы и неверное, отсутствовало вовсе (хотя на интуитивном уровне лингвисты понимали, что это такое). Тогда же Колмогоров сообщил мне основные идеи определений названных понятий. Когда он сам пришёл к этим определениям, мне неизвестно, однако ясно, что к моменту разговора он ими уже располагал.

Достойна быть отмеченной следующая характерная черта Колмогорова: он щедро делился своими идеями, нередко по поводу довольно случайному. Некоторые из этих идей были им выношены, как определения ямба и падежа, некоторые же возникали внезапно, как это произошло на моих глазах 9 сентября 1954 года на семинаре «Рекурсивная арифметика», которым он пригласил меня руководить вместе с ним; тогда, при обсуждении темы конструктивных ординалов, Колмогоров предложил систему понятий, лёгших в основу тогда ещё не существовавшей **теории нумераций** (названная дата и есть день рождения этой теории). Боюсь, что большинство идей, высказанных Колмогоровым таким ненавязчивым способом, остались невоспринятыми, непонятыми, неоценёнными и, тем самым, навеки пропали. Что до определения падежа, то то́, что я сумел понять и запомнить, было опубликовано мною в 1957 году в вышедшем на стеклографе и с грифом «На правах рукописи» 5-м номере «Бюллетеня Объединения по машинному переводу»; статья называлась «К определению падежа по А. Н. Колмогорову».

Великий лингвист Андрей Анатольевич Зализняк в §§ 2.3—2.4 своего классического труда «Русское именное словоизменение» уточнил конструкцию Колмогорова и переложил её на более наглядный и более понятный его коллегам язык. А в § 6.20 названного труда читателя встречают три теоремы. Формулировки и доказа-

тельства их совершенно математические. Теоремы эти нужны их автору для обоснования того, что предложенный им способ описания устройства ударения в парадигмах русских существительных оптимален. Понятия предыдущей фразы нуждаются в разъяснении. **Парадигмой** данного слова называется совокупность всех его словоформ. Каждому слову соответствует определённое распределение ударений по его парадигме; это распределение называется **схемой ударения** рассматриваемого слова. Схем ударения (особенно с учётом форм множественного числа) несколько десятков и они довольно разнообразны. Желательно найти способ их описать наиболее экономно. Вот Зализняк с помощью своих теорем и устанавливает, что способ, который он предлагает, является наиболее экономным. Предложенный Зализняком способ основан на введённом им новом понятии — понятии **условного ударения**. Поясним на примере. Во всех косвенных падежах слова *стол* ударение стоит на окончании; в именительном падеже окончания вроде бы нет, а слово односложно, поэтому спрашивать, где здесь ударение, бессмысленно. Но можно считать, что и в именительном падеже слова *стол* имеется окончание, только мы его не видим, и именно на нём стоит условное ударение. В других же падежах условное ударение совпадает с действительным. А тогда можно сказать, что ударение (условное!) во всех падежах слова *стол* стоит на окончании. Это явно короче, чем говорить, что в одних падежах — одно правило, а в других — другое.

Математика нужна в лингвистике всюду, скажем, в фонетике, где звуки описываются некими графиками и математическими формулами, и в синтаксисе, где синтаксическая структура описывается некоторой геометрической картинкой, я уж не говорю о всевозможных современных поисковых системах. Когда вы что-то ищете в Яндексе или в Гугле, то там применяются очень тонкие современные методы лингвистики (в частности, разработанный Зализняком способ описания системы словоизменения), лингвистические алгоритмы представления синтаксической структуры предложений, и, что очень важно, лингвистическая статистика. Без неё развитие лингвистики весьма затруднительно, так как совершенно ясно, что нужно понимать, что́ встречается часто, а что́ — редко; а для этого очень важно понимать, что́ именно мы считаем.

Музыкальное исчисление

«Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi» (музыка — это тайное арифметическое упражнение души, которая вычисляет, сама того не зная). Прошло почти 300 лет с тех пор как Г. Лейбниц, один из основоположников математического анализа и старший современник И. С. Баха, написал эти великие слова в письме Х. Гольдбаху, однако они за это время не потеряли очарования и актуальности.

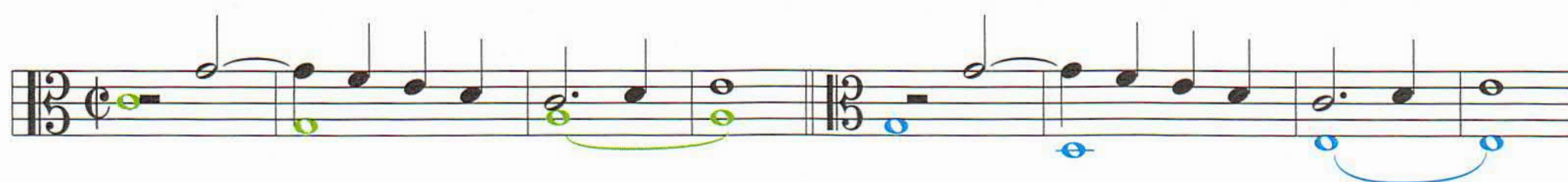
В наши дни математика даёт не только подходы в изучении существующих музыкальных произведений и передачи полученных знаний ученикам, но и новые творческие возможности, новые способы «конструирования» музыки.

Для хранения и передачи музыки используют нотную запись, которая содержит информацию о высоте нот, времени начала воспроизведения, длительности, громкости и музыкальных инструментах, на которых данная мелодия должна исполняться.

Какие преобразования этой последовательности приведут к мелодии, исполнение которой одновременно или последовательно с исходной было бы интересным и привлекательным?

Контрапункт. Простейшие математические операции, которые осваивает человек в первые годы своей жизни — арифметические операции сложения и вычитания. Простейшее преобразование мелодии, которому учат музыкантов — транспозиция: изменение высоты каждой ноты музыкальной последовательности на фиксированное (для данной транспозиции) число музыкальных единиц — полутонов. В случае нескольких голосов транспозиция одного относительно других называется вертикальным контрапунктом.

В труде Сергея Ивановича Танеева «Подвижной контрапункт строгого письма» (1906) впервые предъясняется математическая формула, описывающая контрапункт общего вида. Вот «модельный» пример вертикального контрапункта из этого учебника.



Изначально имеется два мелодических рисунка (голоса). Верхний голос остаётся на месте, а второй смещается на кварту вниз.

А вот пример из произведения И. С. Баха — фуги ми-минор из первой части «Хорошо темперированного клавира» (1744). Она состоит из двух девятнадцатитактных частей и четырёхтактной коды (заключения). Вторая часть является почти точным вертикальным контрапунктом первой части, при этом смещены оба голоса. Сравним, например, два фрагмента из первой (такты 16-17-18) и второй (такты 31-32-33) частей.

Фрагмент первой части:



Фрагмент второй части:



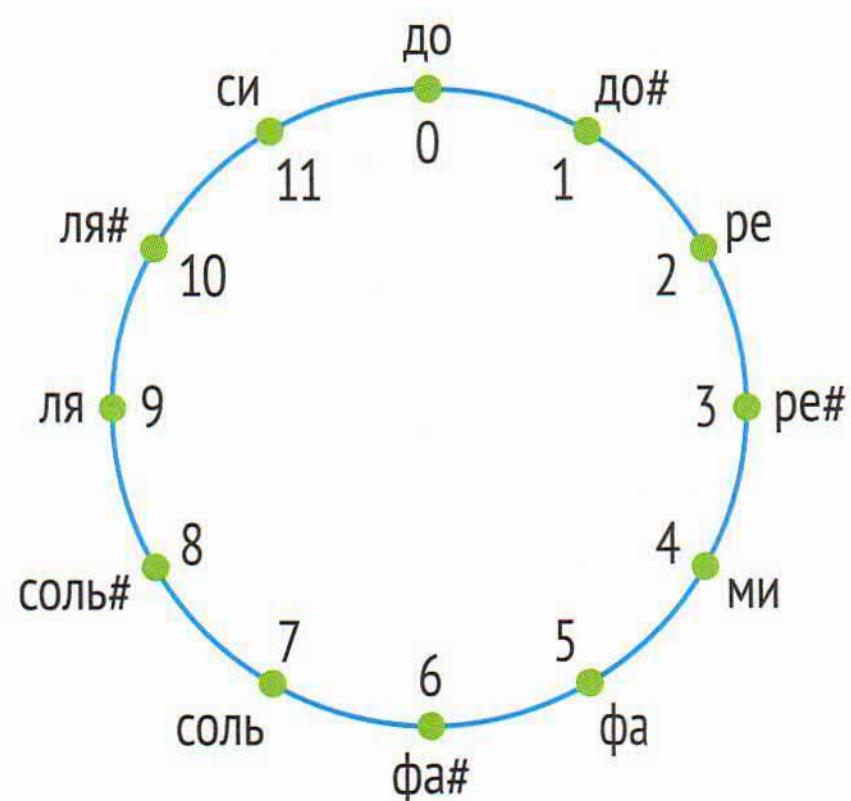
Нетрудно видеть, что первый и второй голоса поменялись местами: высокий сместился вниз, а низкий перемещён вверх — т. е. к каждому голосу применён свой вертикальный контрапункт.

Как писал Альберт Швейцер, творчество Баха было долго недооценено, поскольку ноты его произведений воспринимались просто как формально красивый текст, не имеющий глубокого музыкального содержания. История показала, что формальные построения могут оказаться удивительно красивыми и на слух.

Арифметика по модулю n . Периодичность нот в гамме вызывает аналогии с периодическими множествами в математике, и это сопоставление порождает один из формально-математических методов сочинения музыки.

В мире целых чисел есть специальная, теоретико-числовая возможность расширения понятия равенства: два целых числа a и b называются сравнимыми («как бы равными») по модулю натурального числа n , если их разность $a - b$ делится на n , или, символически, $a \equiv b \pmod{n}$. Понятие сравнения ввёл великий математик К. Ф. Гаусс, он же предложил новую структуру — «арифметику по модулю n » (1801). В такой арифметике числа можно складывать, вычитать, умножать, иногда — даже делить.

Например, если модуль n равен 12, то в этой арифметике будет ровно 12 различных чисел, их представителями удобно считать



остатки при делении на 12 натуральных чисел: $\{0, 1, \dots, 10, 11\}$. Примеры операций в этой арифметике: $8 + 5 \equiv 1$, $8 \cdot 5 \equiv 4$.

Аналогия с хроматической гаммой: есть период, октава, состоящая из 12 нот. Прибавляя к ноте ре первой октавы 12 полутонов, получим ноту ре второй октавы, которая, как известно гармонирует с первой нотой, «сравнима» с ней!

Такой подход возник ещё в 1844 году. Его автор, французский музыковед Камиль Дюрют, обратил внимание на то, что при равномерно темперированном строе рояля множество интервалов разбивается на пе-

риоды из 12 ступеней. А это приводит к определению операций над музыкальными интервалами «по модулю 12».

Применение этих идей в сочинении музыки привело американского композитора Мильтона Бэббита даже к созданию целой музыкальной теории, так называемой «Set Theory» (1992), изложенной им в диссертации по математике!

Гармонический анализ. Простейшими гармониками являются тригонометрические функции 1 , $\cos kx$, $\sin kx$ (для любого натурального числа k). Эти функции играют особую роль и в математике, и в акустике.

Следующие задачи принадлежат к числу основных в гармоническом анализе: представление заданной функции в виде суммы тригонометрического ряда, отыскание в виде суммы такого ряда функции, обладающей заданными свойствами (например, решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего определённым начальным и краевым условиям).

В музыкальной акустике первая из перечисленных задач проявилась в предложенном Г. Л. Ф. Гельмгольцем методе исследования звука с помощью системы куполообразных резонаторов («резонаторы Гельмгольца»), позволяющих определить спектральный состав звука.

Вторая из упомянутых задач стала генератором возникновения аддитивного синтеза — одного из ярких направлений в музыке XX века. Заключается такой стиль в использовании искусственно созданных звуков, полученных суперпозицией большого числа простейших гармоник. Современный уровень компьютерной тех-

ники позволяет обойтись без механических приборов. В частности, французский композитор Жан-Клод Риссе получил солидный набор электронных звуков, напоминающих звук колокола. На этом основывается его сочинение «Mutations» (1969).

Теория вероятностей. Применение вероятностных методов для написания музыки было предложено Янисом Ксенакисом. Ксенакис получил инженерное образование, работал с Ле Корбюзье, стал признанным архитектором. С другой стороны, всю жизнь занимался музыкой, стал не только известным композитором, но и музыковедом-теоретиком. Объединяло его работы, достижения и увлечения то, что всюду он применял или искал возможности применения математических методов.

Например, идея использования движения прямых — общая и для музыкальной пьесы 1954 года «Methastasis», в виде непрерывного глиссандо струнных, и для проекта павильона Phillips на всемирной выставке Ехро-58 в Брюсселе, поверхность крыши которого была получена непрерывным движением прямолинейных образующих.

Идея динамического развития музыкального сочинения согласно выбранной математической модели развивалось им после этого в течение многих лет. Модель определялась случайным процессом, который подбирался так, чтобы в заданные моменты времени получались намеченные автором спектр сигнала, распределение громкости по пространству и т. п.

Музыкальный манифест Ксенакиса — книга «Formalized Music» (1963), русский перевод — «Формализованная музыка» (2008). В частности, в книге разбираются возможности применения в сочинении и изучении музыки таких разделов математики как теория множеств, теория вероятностей, теория информации, теория игр.

Алгоритмика. Как известно, алгоритмом называется набор инструкций, описывающих порядок действий исполнителя для достижения поставленной цели за конечное число шагов. Если к входным данным применяется последовательно один и тот же алгоритм, то такой процесс называется итерационным. В математике самый употребительный вариант итерационного процесса — нахождение решения задачи методом последовательных приближений. Возможен и «исследовательский», поисковый вариант процесса, в котором отсутствует заранее намеченная цель.

В повседневной жизни итерационные процессы тоже не редкость, например, ежегодные начисления процентов на текущий банковский вклад увеличивают сумму для следующего процентного начисления (так называемый сложный процент).

Творческий процесс не может быть представлен в виде алгоритма. Тем не менее, особенно в современной музыке, возникновению у композитора идеи сочинения может предшествовать большая подготовительная работа, связанная с формальными вычислениями. Например, композитор задумал создать последовательность аккордов, обладающую определёнными свойствами. Такая последовательность может быть получена с помощью некоторого итерационного процесса. Конечно, полученная последовательность не будет музыкальным сочинением, но может рассматриваться как набор «кирпичей», из которых композитор будет создавать своё сочинение.

Целью французского композитора Тристана Мюроя в сочинении «*Désintégration*» (1982) было получение последовательности аккордов с постепенно «расстраивающимся» соотношением между нотами. Начальный аккорд представлял из себя набор из 12 гармоник с рациональными соотношениями между частотами. В созданном композитором итерационном процессе, на каждом шаге аккорд изменялся совсем немного, но при этом у нот аккорда ухудшались соотношения частот, а длительность и время начала звучания — искажались.

Заключение. Мы рассмотрели лишь некоторые «музыкально-творческие» способности математики. Новая жизнь подобных подходов к написанию музыки связана с появлением мощной и доступной компьютерной техники. Начиная с середины 1990-х годов появилось множество компьютерных программ для анализа и создания музыкальных произведений.

Например, есть секвенцерные программы, сохраняющие и расширяющие возможности классической нотации. В них сохраняется принцип последовательного считывания мелодии, а расширение состоит в том, что на параллельных дорожках могут быть написаны как ноты для обычных инструментов, так и специально подготовленные искусственные звуки. Подобные звуки создаются заранее с использованием гармонического анализа и других способов синтеза. Например, известной секвенцерной программой является программа LogicPro компании Apple.

Современные компьютерные инструменты, помогающие композитору, меняют и само понятие «музыка». Теперь музыкальное произведение может быть предъявлено не только перечислительно, например, в виде нотной записи или на барабане шарманки, но и в виде кода компьютерной программы, генерирующей это музыкальное произведение. Например, уже упоминавшееся произведение «*Désintégration*» написано с помощью программы, вклю-

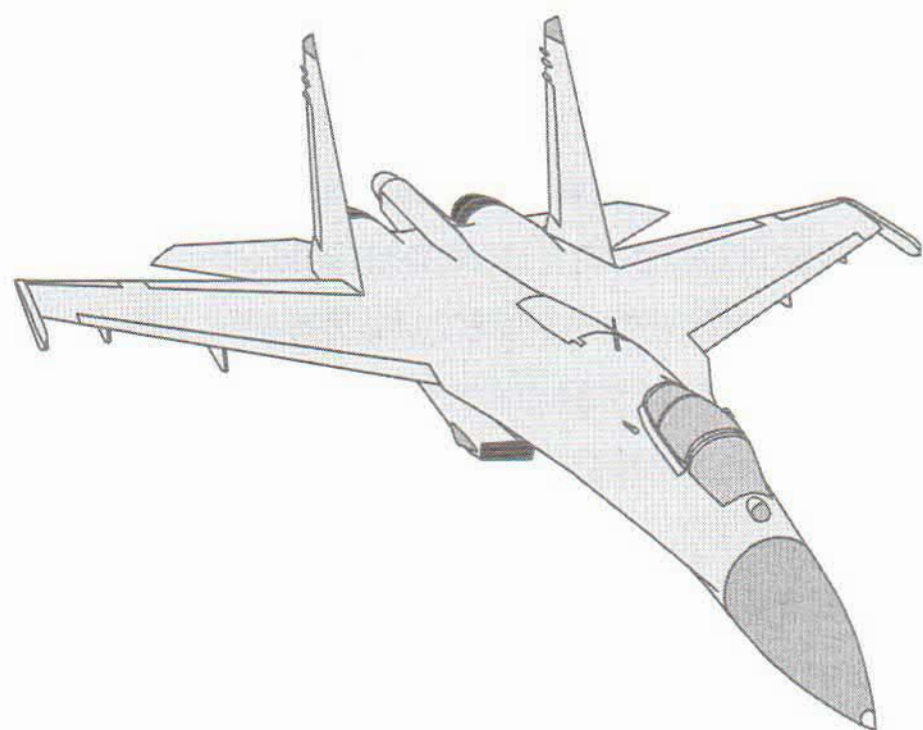
чающей такие привычные для любого программиста объекты как циклы. Для композиторов, использующих математические идеи, разработаны системы программирования с удобным и красивым интерфейсом, являющиеся аналогом обычных языков программирования (LISP, FORTRAN, C). Подобная система может представить результат своей работы по выполнению кода программы в виде нотной записи, а может и выступить в роли исполнителя. Такой, например, является система OpenMusic, разработанная в парижском институте исследования музыкальной акустики.

Особый тип программ — интерактивные, т. е. такие, параметры которых могут меняться во время воспроизведения звука. Например, так работают программы, создающие видеоряд при исполнении музыкального произведения. Датчики, установленные на музыкальных инструментах, передают данные на компьютер, и установки программы меняются. К такому типу относится программа Max.

В заключение приведём слова Леонардо да Винчи, которые С. И. Танеев взял как эпиграф к упоминавшемуся труду «Подвижной контрапункт строгого письма»: «Nissuna humana investigatione si po dimandare vera scientia, s'essa non passa per le mattematiche demonstrationi» (ни одно человеческое исследование не может назваться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства).

Математические крылья авиастроения

Авиастроение — важнейшая ветвь современной индустрии. Между самолётостроительными фирмами (включая связанные с ними научные институты) идёт состязание, цель которого — создание изделий, превосходящих аналоги конкурентов: для пассажирских и



грузовых самолётов — по безопасности, экономичности, экологичности; для военных самолётов — по боевым качествам. Для исследований в современной авиационной науке свойственно использование адекватных математических моделей, основа которых — чёткое понимание физики исследуемых явлений. Разработка и конструирование новых самолётов невозможны без применения «высокоматематизированных» наук, таких как аэродинамика, теория управления, прочность.

Аэродинамика — наука, изучающая взаимодействие воздушного потока и обтекаемого им тела. Скорость самолёта настолько велика, что обтекающий его поток становится турбулентным. Турбулентное течение отличается от «спокойного» ламинарного течения хаотическим изменением его характеристик по времени (скорости, давления и др.), приводящим к интенсивному перемешиванию газа, к возникновению вихрей. Основная математическая проблема турбулентности — создание системы дифференциальных уравнений в частных производных, которая бы описывала произвольные турбулентные течения и которую можно было бы решать на современных компьютерах, — до сих пор не решена. Поэтому в настоящее время на основе уравнений математической физики создаются полуэмпирические модели турбулентности, пригодные для описания лишь узкого класса течений.

Как определяются аэродинамические характеристики самолёта? В основном двумя методами: экспериментальным и расчётным. Для проведения экспериментальных исследований в аэродинамических трубах создают модели самолётов — уменьшенные в несколько раз копии оригиналов. Это связано с тем, что размеры аэродинамических труб не позволяют проводить испытания с реальными самолётами. Но данные, полученные на испытаниях модели в аэро-

динамической трубе, пересчитать в характеристики самолёта простым масштабированием, учётом коэффициента подобия модели и реального самолёта нельзя.

Дело в том, что уравнения, которым подчиняются характеристики течения, достаточно сложные. Если привести их к безразмерному виду, т. е. выразить все размерные величины в характерных для данного течения параметрах, то в уравнения войдут безразмерные величины, которые носят имена выдающихся учёных: число Маха, число Рейнольдса, число Струхала и др. Для строгого подобия необходимо, чтобы все эти величины совпадали при реальном полёте самолёта и при испытаниях модели в трубе. Но конкретные свойства воздушного потока, который используется в трубе, не позволяют выполнить все критерии подобия. Кроме того, и в случае закрытой, и в случае открытой трубы тот факт, что поток не безграничен, сказывается на аэродинамических характеристиках.

Возникает задача пересчёта с модели на натурный самолёт интегральных характеристик (суммарных сил и моментов) и распределённых характеристик (значения в конкретных точках давления, температуры и др.). Эта задача решается проведением численного расчёта уравнений математической физики для двух полуэмпирических моделей: самолёта в безграничном потоке и модели самолёта в аэродинамической трубе. Аэродинамические характеристики самолёта получают, добавляя к данным, полученным на испытаниях уменьшенной копии самолёта в аэродинамической трубе, разность однотипных данных, полученных для двух описанных полуэмпирических моделей.

Казалось бы, почему не произвести расчёт сразу, не прибегая к эксперименту? Дело тут в точности. Точность экспериментальных данных, полученных в хороших аэродинамических трубах, в несколько раз выше точности расчёта.

Основная формула аэродинамики — связь подъёмной силы, действующей на крыло, со скоростью движения и циркуляцией (интенсивностью) вихревой системы, порождаемой самолётом. Эта формула была получена «отцом русской авиации» профессором Н. Е. Жуковским и доложена им на заседании Московского математического общества в 1905 году.

Крыло самолёта должно быть оптимальным. Один из наиболее важных параметров крыла — его качество: так называют отношение подъёмной силы к силе сопротивления. Для создания оптимального («качественного») крыла решаются задачи вариационного исчисления.

Теория управления. Полёт самолёта состоит из нескольких фаз: взлёта, набора высоты, крейсерского движения, разворотов, снижения, посадки. На каждом этапе самолётом необходимо управлять. Закрылок на крыле или руль высоты на хвостовом оперении — примеры органов управления. Система управления должна быть сконструирована так, чтобы простые движения пилота в кабине передавались и доходили до органов управления, вызывая соответствующие реакции. С другой стороны, система должна быть достаточно «умной», элементы её конструкции не должны выходить за границы безопасного режима.

Ещё одна задача — создание автопилота, способного управлять движением самолёта без вмешательства лётчика.

За все эти проблемы отвечает математическая теория автоматического управления самолётом, базирующаяся в основном на теории дифференциальных уравнений. С помощью этой же теории создаётся математическая модель пространственного движения самолёта, исследуются вопросы устойчивости полёта.

Прочность. Мало создать самолёт с хорошими аэродинамическими данными, необходимо, чтобы он не разрушился в полёте, чтобы его ресурс (долголетие) был достаточно высок. За решение этой задачи отвечает наука, которая называется прочностью.

Методами прочности исследуются упругие и пластические деформации элементов конструкции самолёта, рост трещин в обшивке самолёта (в материале обшивки изначально присутствуют микротрещины, которые со временем могут расти), разрушение конструкции.

Математический арсенал для решения задач прочности включает классические и современные методы уравнений математической физики, дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, комплексного анализа, вычислительных разделов линейной алгебры.

Каждый, кто видел в иллюминаторе, как ведёт себя крыло самолёта в полёте, замечал достаточно большую амплитуду его колебаний. Дело в том, что для уменьшения амплитуды колебаний крыла необходимо увеличивать его вес, а у самолёта вес конструкций пытаются минимизировать. Поэтому от колебаний крыла избавиться не удастся. Раздел механики, изучающий задачи математической теории колебаний и резонанса, — аэроупругость.

Методы решения. Обсудим методы решения математических задач, о которых говорилось выше.

Определяющие уравнения в реальных задачах очень сложны и априори невозможно понять, что получится при их решении.

В сильно упрощённых с практической точки зрения задачах иногда удаётся получить точное решение. Большинство таких задач уже решено, хотя до сих пор находят неизвестные ранее точные решения уравнений Навье—Стокса или Эйлера. Но набор таких задач ограничен, и они далеки от практически важных задач.

В то же время исследование этих задач очень важно, поскольку точные решения создают физические образы — вихрь, пограничный слой и т. п., — из которых строится физическая картина изучаемого процесса, как из элементарных кирпичиков строится дом. Полученное представление о физике процесса позволяет среди множества математических моделей выбрать такую, которая в достаточной степени отражает свойства моделируемого процесса и даёт возможность технического поиска решения.

Один из способов решения — численный. Часто численное решение задачи сводится к системе линейных алгебраических уравнений.

Ещё один способ возможен при наличии в задаче малого параметра. Таким параметром может быть отношение хорды (ширины) крыла к его размаху, отношение вязких сил к инерционным (отношение силы трения между слоями газа к силе инерции этих слоёв), отношение ширины трещины к её длине. К настоящему времени развиты методы решения задач с малым параметром, которые изучаются в математической теории возмущений.

Приведём как пример решение задачи о подъёмной силе крыла большого удлинения (отношение квадрата размаха к площади крыла). Здесь два малых параметра — отношение вязких сил к инерционным и отношение хорды крыла к его размаху.

Благодаря первому параметру решение задачи можно определять не из уравнений Навье—Стокса (моделирующих движение газа с учётом трения между слоями), а из уравнений Эйлера (трение между слоями газа отсутствует). Благодаря второму параметру, каждое сечение крыла обтекается так же, как обтекалось бы крыло бесконечного удлинения с профилем, соответствующим профилю крыла в данном сечении. Тем самым задача обтекания трёхмерного крыла трансформируется в ряд более простых задач о двумерном (плоском) течении около профилей крыла.

Итак, благодаря этим двум параметрам задача стала намного проще, чем изначальная.

Требования к самолётам постоянно ужесточаются — экологические и экономические, по безопасности полётов и по комфорту пассажиров. Самолёты совершенствуются, во многом — благодаря математическим достижениям, которые воплощаются в технические решения.

Математика кораблестроения

Постараемся теперь установить в общих чертах тот математический аппарат, которым должен располагать корабельный инженер, чтобы вполне *сознательно рассчитывать* проектируемый им корабль, и притом военный, как наиболее сложный, причём инженер никакими правилами ни Ллойда, ни Регистра не стеснён.

Под словом «сознательно» будем понимать, что инженер хотя и будет применять готовые и давно разработанные методы, но он вполне овладеет теми отделами математики, на которых эти методы основаны, и, значит, может вполне ясно судить об их применимости и условиях её.

Начнём с теории корабля.

Расчёт плавучести и остойчивости требует применения начал интегрального исчисления для вычисления площадей и объёмов, положения центра тяжести и прочего, причём всё это выражается простыми, а не кратными интегралами, исчисляемыми по приближённым формулам квадратур.

Вычисление остойчивости, кроме того, требует отчётливого понятия о кривизне и эволюте и связи между координатами точек эволюты и эвольвенты. Исследование влияния повреждений на посадку и остойчивость корабля требует для полной отчётливости знания свойств моментов инерции плоской фигуры и определения положения её главных осей инерции.

Расчёт качки на волнении требует знания основ гидродинамики и теории «малых» колебаний твёрдого тела как свободных, так и вынужденных, т. е. интегрирования совокупных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Если корабль предположено снабдить успокоителями качки в виде цистерн, то надо иметь ещё некоторые сведения из гидродинамики, а если успокоитель должен быть гироскопическим, то требуется более углублённое знание динамики твёрдого тела.

При этом предполагается, что инженер не будет рассчитывать теоретически «приведённой массы» увлекаемой кораблём воды при качаниях его, а воспользуется имеющимися на этот счёт опытными данными, ибо такой расчёт потребовал бы таких сведений из гидродинамики, на сообщение которых в курсе не хватило бы времени, если не развивать этот отдел в ущерб другим, более простым, но зато более обиходным.

Ходкость или требует ещё более углублённого знания гидродинамики и изучения системы волн, образуемых при движении корабля, или же надо ограничиться применением эмпирических формул и результатов испытания подобных судов и моделей.

Поворотливость плохо поддаётся учёту, и суждение о ней основывают на существующей практике и результатах испытания судов, подходящих по типу к проектируемому.

Итак, положим, что элементы корабля и всё, что относится к мореходным его качествам, установлено и рассчитано; тогда идёт второй вопрос, где на первый план выступает строительная механика корабля, согласно основаниям которой надо произвести расчёты прочности корабля как целого сооружения и расчёты прочности всех деталей и отдельных устройств его.

Здесь требуется гораздо более сложный математический аппарат, нежели для теории корабля, ибо приходится иметь дело с изгибом и сжатием пластин и устойчивостью их, а для этого требуются основательные познания теории упругости, а следовательно, и весь необходимый математический аппарат с бигармоническим уравнением, учение о рядах, подобных рядам Фурье, и притом не только простых, но и двойных.

Затем возникнут вопросы о подкреплениях под орудиями или башнями и о действии на них выстрела, т. е. сил «малой» продолжительности, и рассмотрение вопроса о том, считать ли это действие «статическим» или «динамическим». Это связано с изучением колебательного движения упругих систем, что требует ещё более сложного математического аппарата, нежели вопрос о вибрации всего корабля, и с учением о фундаментальных функциях и характеристических числах. Вместе с тем здесь необходимо столь же отчётливое знание и умение численно интегрировать дифференциальные уравнения, между тем как для учения о плавучести и остойчивости требуется умение приближённо производить квадратуры.

Геометрическая кристаллография

В 2011 году Нобелевская премия по химии была присуждена «за открытие квазикристаллов» — твёрдых тел с атомной структурой, не встречавшейся ранее.

Это открытие начало новую страницу в изучении твёрдых тел. Твёрдые вещества делятся на два типа: кристаллы и тела с аморфной структурой (стёкла, пластики). Различие между кристаллом и аморфным телом, замеченное в древности, состоит в том, что кристаллы имеют природную огранку, которая отчётливо проявляется иногда на микроуровне, например, у маленьких крупиц сахара, соли и т. д. У естествоиспытателей была уверенность в том, что природная огранка в кристалле обусловлена его внутренней структурой.

Знание структуры вещества важно, поскольку его свойства определяются не только химическим составом, но и тем, как расположены атомы (молекулы). Известный пример — графит и алмаз. Химически они одинаковы: оба являются формами углерода. Однако структуры этих углеродных форм совершенно различны и, в частности, имеют разные кристаллографические группы. Как следствие, эти материалы обладают различными физическими свойствами: один из них — исключительно мягкий, другой, наоборот, исключительно твёрдый, один — матово-чёрного цвета, другой — прозрачный и т. д.

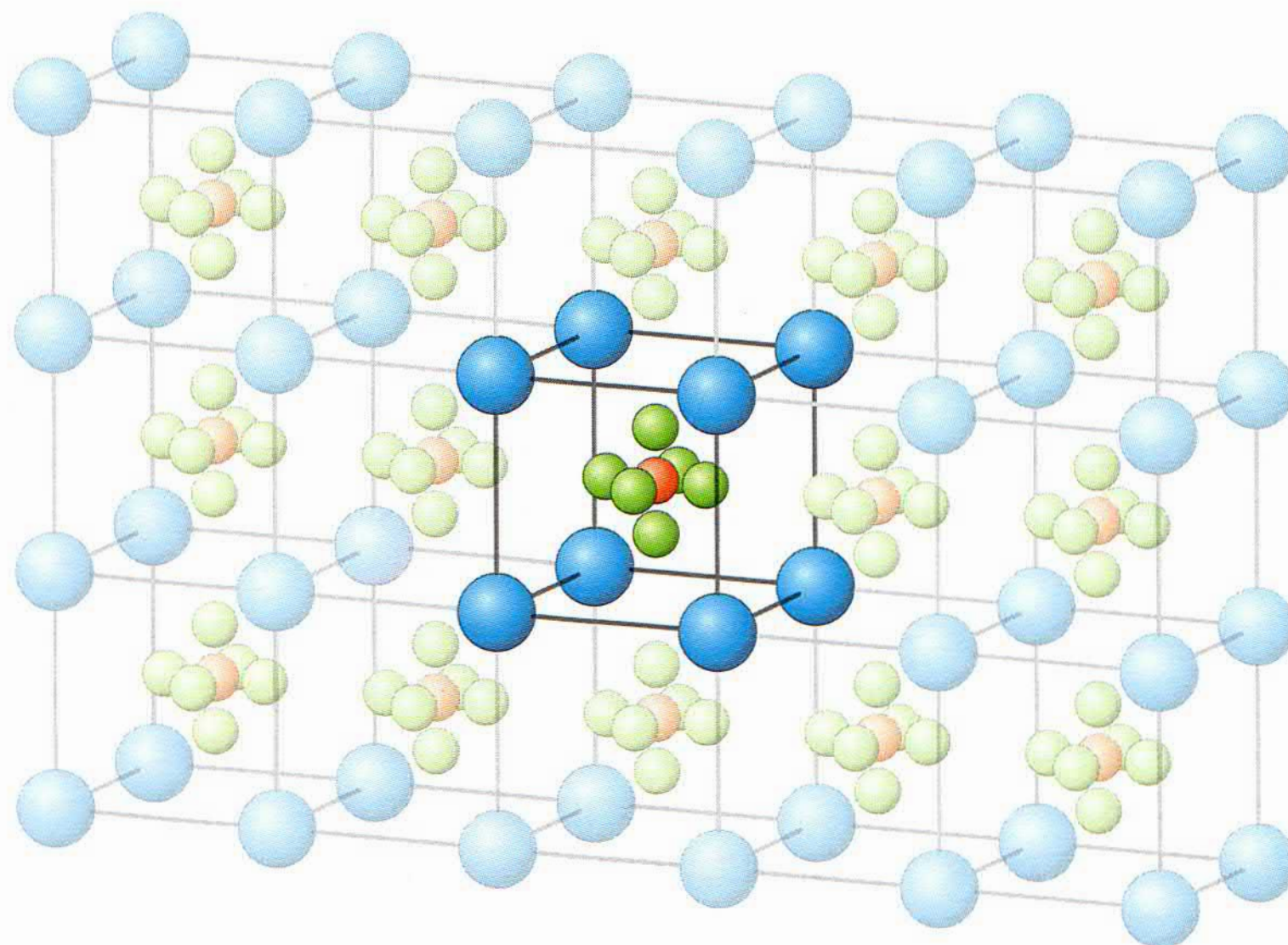
Наука, изучающая строение кристаллов и вопросы кристаллообразования, называется кристаллографией. После открытия квазикристаллов появился раздел, посвящённый изучению этих новых структур.

Слово кристалл происходит от древнегреческого *κρύσταλλος*, которое означает «лёд», «горный лёд» или «горный хрусталь».

Отдельные элементы науки, которые в какой-то степени можно отнести к кристаллографии, усматриваются ещё в работах древних греков (правильные многогранники). Появившийся в самом начале XVII века (1611 год) трактат И. Кеплера «О шестиугольных снежинках» рассматривается как наиболее ранний предшественник литературы по структурной кристаллографии. Только в конце XVIII века было сформулировано важнейшее положение кристаллографии о «плоскостях спайности», высказанное выдающимся французским учёным Р. Ж. Гаюи. История этого открытия подобна легенде о «ньютоновом яблоке». Кристалл кальцита при

нечаянном падении из рук Гаюи разбился на многочисленные ромбоэдрические осколки. Это натолкнуло на мысль, что кристалл может раскалываться лишь вдоль плоскостей, направления которых предопределяются данным кристаллом. Дальнейшее измельчение осколков показало, что кристалл состоит из параллелепипедов и многогранников таких форм, что из них также можно сложить параллелепипеды.

Из представления о параллелепипедальном устройстве кристаллов — как множества параллелепипедов, приставленных друг к другу — выросла теория кристаллических решёток. Создателем этой теории был один из крупнейших кристаллографов О. Браве́.



Построим на трёх некомпланарных (не лежащих в одной плоскости) векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} параллелепипед и разнесём его при помощи трансляций (сдвигов) на векторы $r\mathbf{a} + q\mathbf{b} + r\mathbf{c}$, где коэффициенты r , q , r — целые числа. Решётка — это множество вершин так полученных параллелепипедов. Если в исходный параллелепипед поместить несколько точек, представляющих собой атомы вещества, то при рассмотренном «тиражировании» получим семейство нескольких параллельно ориентированных решёток. Это объединение одинаковых параллельно расположенных решёток и есть математическая модель кристалла, появившаяся в первой половине XIX века и в целом «работающая» до сих пор. Периодичность внутренней структуры кристалла в трёх линейно независимых направлениях является основным положением кристаллографии.

Центральной математической идеей всей кристаллографии является симметрия кристалла. Симметрией той или иной фигуры называется движение пространства, совмещающее фигуру с собой. Множество всех симметрий любой фигуры обладает тремя характерными свойствами:

1) произведение двух симметрий $g_1 \cdot g_2$ как результат их последовательного выполнения также является симметрией фигуры;

2) так называемое тождественное движение, которое оставляет на месте любую точку пространства, а значит, оставляет неподвижной и любую фигуру, также можно рассматривать как симметрию фигуры (собственно говоря, тождественное движение — это не движение, а «стояние» на месте);

3) наряду с симметрией g обратное ей движение g^{-1} , возвращающее каждую точку пространства на прежнее место, также является симметрией фигуры.

Множество движений с этими тремя свойствами называют *группой симметрий*.

Если взять точку x пространства и разнести её всеми движениями из какой-то группы симметрий G , то получится множество точек, которое называется орбитой $x \cdot G$ точки x относительно группы G .

Например, группа симметрий квадрата состоит из восьми элементов: четырёх вращений, включая тождественное, и отражений относительно четырёх прямых. И орбита точки может состоять, в зависимости от выбора этой точки, из восьми, четырёх или одной-единственной точки (последнее — в случае, если эта точка — центр квадрата).

Наряду с группой всех симметрий данной фигуры рассматривают и неполные группы данной фигуры, т. е. такие подмножества симметрий полной группы, для которых выполняются условия 1)–3).

Рассмотрим произвольную решётку, одна точка которой совпадает с началом координат. Группа движений пространства, которая сохраняет начало координат и при этом совмещает решётку с собой, называется кристаллическим классом (точечной кристаллографической группой). Ещё до Браве были найдены все 32 кристаллических класса (И. Ф. Гессель, 1830 год). Очень важно, что в кристаллическом классе среди вращений могут быть оси второго порядка (поворот на 180°), третьего порядка (поворот на 120°), четвёртого (на 90°) и шестого порядка, но невозможна ось пятого порядка.

Кристаллический класс, являющийся для некоторой решётки её полной точечной группой, называется *голоэдрией* решётки. Среди 32 кристаллических классов имеется лишь 7 голоэдрией. Самая «бедная» голоэдрией — триклинная, она состоит из двух элементов: тождественного преобразования и симметрии относительно точки решётки (такой симметрией обладает любая решётка). Более богатые голоэдрией — моноклинная, ортогональная, квадратная, ромбоэдрическая, кубическая, гексагональная — присущи не всем, а лишь специальным решёткам. Браве обнаружил, что за исключением решёток с гексагональной голоэдрией, во всех остальных решётках можно найти параллелепипед решётки (вообще говоря, отличный от основного, по которому строилась решётка), группа симметрий которого есть голоэдрией решётки. Для каждой решётки такого типа параллелепипед минимального объёма называют *параллелепипедом Браве*. Для гексагональной голоэдрией (совпадающей с полной группой правильной шестиугольной призмы) параллелепипед Браве определяется особо. Браве нашёл параллелепипеды для всех решёток. Существенно различных типов оказалось 14. Соответственно, решётки также распределились по 14 *типам Браве*.

Классификация Браве стала основой для описания самых общих групп симметрий кристаллов — так называемых кристаллографических групп.

Группа движений пространства называется кристаллографической, если орбита любой его точки является дискретным множеством, т. е. таким, в котором точки отделены друг от друга. Кроме того, орбита относительно такой группы, по предположению, не должна иметь сколь угодно больших полостей: где бы ни был расположен шар достаточно большого фиксированного радиуса, он должен содержать хотя бы одну точку из данной орбиты.

Пример простейшей кристаллографической группы — это группа G , порождённая тремя сдвигами на некопланарные векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Эта, так называемая первая триклинная, группа состоит из трансляций пространства на векторы решётки $p\mathbf{a} + q\mathbf{b} + r\mathbf{c}$. Очевидно, что орбита $x \cdot G$ любой точки x из решётки есть сама эта решётка. Таким образом, первая триклинная группа является группой симметрий решётки. Если точка x не принадлежит решётке, то орбита $x \cdot G$ есть другая решётка, которая получается из исходной параллельным переносом. Так как орбита относительно первой триклинной группы есть дискретное множество (в нашем случае это решётка) и каждый шар достаточно большого радиуса содержит хотя бы одну точку из решётки, то группа кристаллографическая.

Помимо трансляций любая решётка обладает также и другими симметриями. Так, симметрия пространства относительно произвольной точки решётки, а также относительно произвольной «полуцелой» точки, т. е. точки вида $\frac{p}{2}\mathbf{a} + \frac{q}{2}\mathbf{b} + \frac{r}{2}\mathbf{c}$ являются симметриями решётки. Совокупность трансляций и симметрий относительно целых и полуцелых точек решётки образуют так называемую вторую триклинную группу. Это — следующая по сложности кристаллографическая группа. В самом плохом случае — несимметричной решётки — триклинная группа является максимальной группой симметрий решётки.

Другое дело, когда решётка обладает богатой точечной симметрией (голоэдрией). Например, у кубической решётки голоэдриа совпадает с полной группой симметрий куба, которая состоит из 48 вращений и вращений с отражениями. Поэтому в полной группе кубической решётки для каждой пары её точек x и y имеются 48 движений. Группа кубической решётки — ещё один пример кристаллографической группы.

Венцом развития кристаллографии в XIX веке стали исследования великого русского кристаллографа Е. С. Фёдорова (1857—1919). Он определил кристалл как дискретное множество точек (атомов), группа симметрий которого является кристаллографической группой. Другими словами, кристалл по Фёдорову есть совокупность орбит нескольких атомов относительно некоторой кристаллографической группы G .

Е. С. Фёдоров (одновременно с немецким математиком А. Шёнфлисом) в 1891 году нашёл все кристаллографические группы, которых оказалось 230. Этот сложный математический результат явился основой для последующего углублённого исследования строения кристаллов и их групп симметрий.

Заметим, что 229 из 230 кристаллографических групп содержат не только трансляции, но и более сложные движения с элементами вращения. Эти группы содержат симметрии решёток, и для их вывода была использована классификация, полученная Браве. Кажется, что подход Фёдорова к определению кристалла расширяет класс кристаллов, которые по Браве представляют собой объединение параллельно ориентированных решёток (совокупность орбит относительно группы одних лишь трансляций). Фёдоров был убеждён в том, что любая кристаллографическая группа, действующая в трёхмерном пространстве, содержит подгруппу, порождённую тремя трансляциями в некомпланарных направлениях. Строго это утверждение было доказано Шёнфлисом. Благодаря этому свойству

кристалл по определению Фёдорова, как и раньше по Браве, есть совокупность нескольких одинаковых параллельно ориентированных решёток.

В начале XX века, благодаря выдающимся открытиям в области физики, было подтверждено основное положение кристаллографии о решётчатой структуре кристаллов. В 1912 году немецкий учёный М. Лауэ обнаружил дифракцию при рассеянии рентгеновского излучения на кристаллической решётке (Нобелевская премия, 1914 год). Опираясь на открытие Лауэ, британские физики У. Л. и У. Х. Брэгги, отец и сын, разработали основы рентгеноструктурного анализа кристаллов (Нобелевская премия, 1915 год).

Итак, согласно определению кристалла по Фёдорову, его внутренняя структура обладает богатейшей симметрией. Если красоту внешних форм кристаллов можно наблюдать непосредственно, рассматривая природные кристаллы где-нибудь на природе или в геологическом музее, то красоту их внутренней структуры, можно видеть лишь на моделях где-нибудь в академической лаборатории или на университетской кафедре. Эти столь прекрасные структуры образуются в результате кристаллизации, т. е. при переходе вещества из жидкого неупорядоченного состояния в твёрдое кристаллическое. Такой переход наступает при определённых физических условиях, например при охлаждении. Какая причина лежит в появлении глобального порядка при кристаллизации?

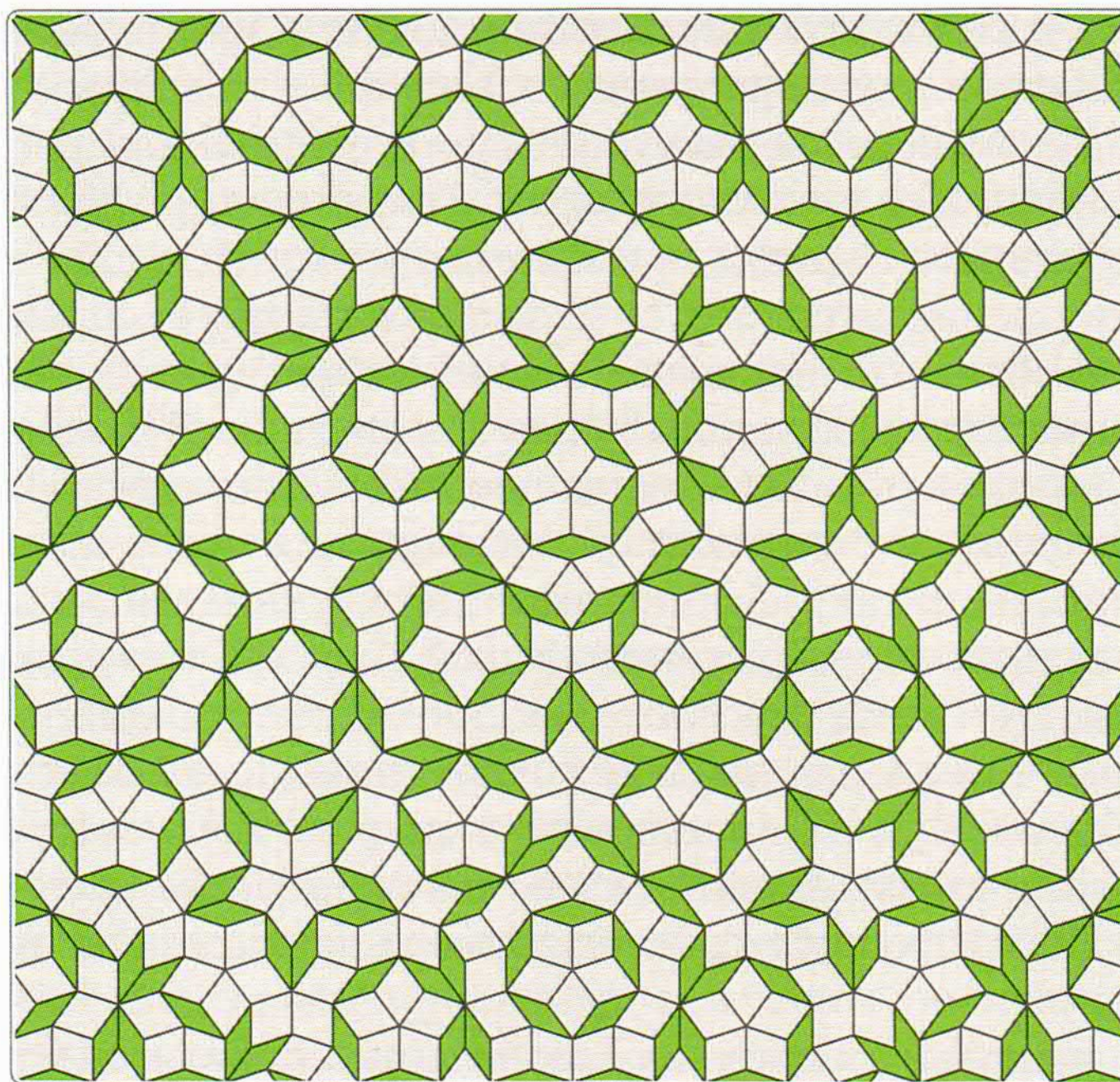
С точки зрения здравого смысла представлялось правдоподобным, что глобальный порядок атомной структуры кристалла есть следствие повторяемости локальных конфигураций в окрестностях атомов одного сорта. Возникновение идентичности фрагментов можно объяснить и с физической точки зрения. Американский физик Р. Фейнман писал: «Если атомы где-то разместились так, что их расположения отвечают самой низкой энергии, то в другом месте атомы создадут такое же расположение. Если вы выберете атом ещё дальше, то ещё раз найдёте точно такие же условия. Порядок повторяется снова и снова, и конечно, во всех трёх измерениях...». Уверенность в происхождении глобального порядка из локального была, но каких-либо точных формулировок и доказательств не существовало.

Вера в «локальную причину» глобального порядка в кристаллах уступила место теоремам и доказательствам, полученным в результате исследований по локальной теории кристаллов, проведённых Б. Н. Делоне и его учениками-геометрами из Математического института имени В. А. Стеклова. В цикле работ, начатом в 70-е годы,

сотрудники МИАН доказали критерий кристаллографичности дискретного множества, нашли оценки на радиус окрестностей, идентичность которых гарантирует правильность структуры. Можно отметить также, что в локальной теории заложен подход к описанию свойств локальных фрагментов правильных систем и правил их «сборки» в глобально упорядоченную структуру.

Цикл работ по локальной теории, инициированный Борисом Николаевичем Делоне, явился достойным продолжением полувековой деятельности Делоне по развитию геометрической кристаллографии, в результате которой появились такие инструменты, как теория множеств Делоне, теория триангуляций Делоне и многое другое.

Роль найденных в локальной теории кристаллов точных условий, которые выделяют из семейства дискретных множеств именно периодические структуры, была по-новому оценена с появлением так называемых узоров Пенроуза. В открытых британским физиком Р. Пенроузом в 1970-е годы плоских структурах в целом периодичности нет, хотя локальные мотивы повторяются вновь и вновь.



Характерно, что в узорах Пенроуза содержится бесконечно много осей симметрии пятого порядка — прямых, вращением вокруг которых на угол $360^\circ/5$ некоторый фрагмент узора переходит в себя.

Более того, в узорах Пенроуза можно найти сколь угодно большие фрагменты, обладающие пятикратной симметрией. С другой стороны, эти фрагменты (за исключением, быть может, одного) должны быть ограниченными. Позже математики показали, что структуры с аналогичными свойствами существуют и в трёхмерном пространстве.

То, что подобные структуры не могут представлять кристалл, следовало из свойства, известного кристаллографам ещё в XIX веке: у периодических структур не может быть оси симметрии пятого порядка.

Возникло новое направление исследований в геометрии — квазикристаллические структуры. Но вопрос о том, есть ли «реальные» квазикристаллы, оставался открытым.

В 1982 году в лаборатории израильского физика Д. Шехтмана был получен сплав алюминия и марганца, структура которого имела отчётливую осевую симметрию пятого порядка... Через три десятилетия это открытие было отмечено Нобелевской премией по химии «за открытие квазикристаллов».

В заключение отметим, что в последнее время ведутся интенсивные исследования по вопросам теоретического конструирования новых материалов, в области предсказания новых структур с предписанными характеристиками. Данное направление обещает создание материалов с новыми удивительными свойствами. И ключевым инструментом этих исследований являются геометрические методы.

Искривлённые миры

В далёкой древности было замечено, что поверхность Земли не является плоской. Об этом говорило, например, такое наблюдение: когда на горизонте появляется корабль, то сначала видны верхушки мачт, и только потом появляется весь парусник. Предположение, что форма Земли — шарообразная, возникло незадолго до Пифагора. Экспериментальное подтверждение гипотезы принадлежит, видимо, Аристотелю, приводившему следующий довод. Во время лунного затмения меняющаяся граница тени Земли в каждый момент времени является дугой окружности, а только у шара граница тени при всех проекциях круговая.

Но планета — только часть трёхмерного пространства, «живущего» в четырёхмерном пространстве-времени. И в XX веке физики пришли к выводу, что фундаментальный вопрос о природе тяготения можно объяснить если связать его с кривизной пространства.

Чтобы читатель смог подойти к понятию кривизны в многомерном пространстве, рассмотрим с разных точек зрения «привычную» кривизну поверхности. На страницах книги это понятие встречалось в сюжетах «Ломтик пиццы» (стр. 91) и «Футбольный мяч» (стр. 154). Во многих случаях, в том числе и в утверждении о невозможности создания плоской карты Земли без искажений («Картографические проекции», стр. 136), основную роль играет теорема Гаусса о кривизне.

Начнём разговор с прямого, полученного Эйлером в середине XVIII века ещё до появления теоремы Гаусса, объяснения того, что даже небольшой участок сферы не картографируется без искажений на плоскую область, т. е. его нельзя отобразить на плоскость так, чтобы сохранялись длины всех линий (а следовательно, и площади областей). Для этого достаточно проследить за «судьбой» окружности небольшого радиуса (её длиной, кругом, который она ограничивает, и его площадью).

На плоскости кратчайший путь, соединяющий пару различных точек, — отрезок прямой. Точки, которые отстоят от заданной на расстояние r , образуют окружность радиуса r с центром в данной точке. Чтобы узнать, как выглядят на сфере кратчайшие пути и множества точек, равноудалённых от данной, проведём геометрический эксперимент.

На плоскости окружность радиуса r можно нарисовать с помощью натянутой нити длины r , один конец которой закреплён. На глобусе,

закрепив один конец достаточно короткой нити в полюсе и натянув её вдоль поверхности, получим отрезок меридиана. Длина этого отрезка — кратчайшее расстояние между точками, в которых оказались концы нити. Всевозможные положения незакреплённого конца натянутой нити составляют одну из параллелей на глобусе, это и есть множество точек, равноудалённых от полюса на расстояние, равное длине нити.

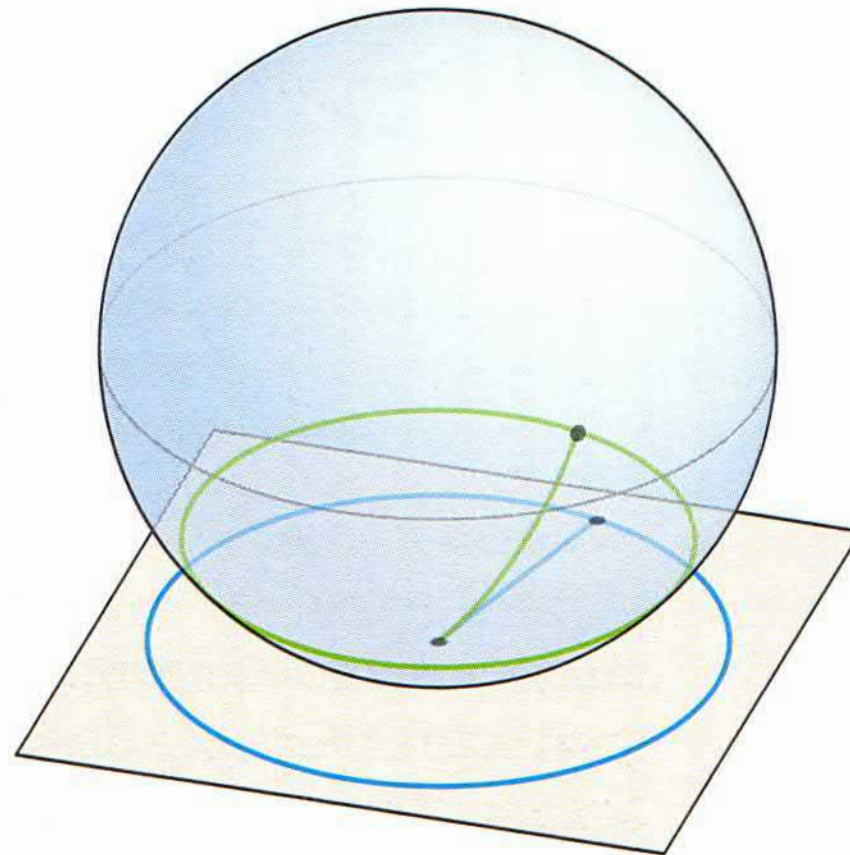
Параллель состоит из точек, удалённых на расстояние r от данной, поэтому должна перейти в окружность радиуса r на плоскости (такая окружность определяется распрямлением нити). Но длины должны сохраняться не только вдоль меридианов, в частности, длина параллели должна равняться длине её образа — окружности радиуса r , а это, очевидно, не так.

Уточним это экспериментальное доказательство с помощью аналитических формул. Из них мы увидим, как искажение длины «окружности» на сфере связано с понятием кривизны.

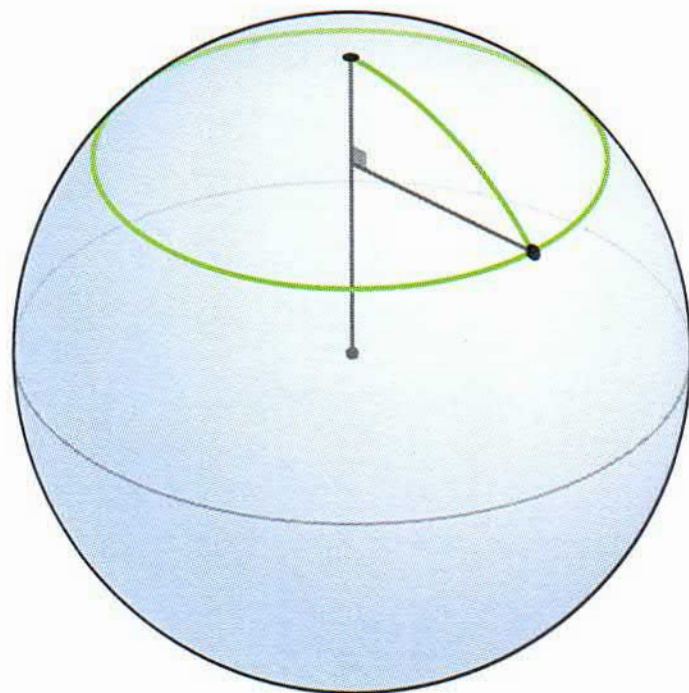
Расстояние между двумя точками на поверхности определяется как наименьшая из длин кривых, соединяющих эти точки и лежащих на этой поверхности. Это определение аналогично определению расстояния между точками на плоскости. На плоскости кратчайшей кривой является отрезок, соединяющий точки. На сфере кратчайшая кривая между двумя точками — это меньшая дуга большой окружности, которая получается в пересечении сферы с плоскостью, проходящей через эти точки и центр сферы.

Большие окружности на сфере и прямые линии на плоскости являются примерами геодезических. Так называются линии, у которых все достаточно короткие отрезки являются кратчайшими путями, соединяющими их концы. Например, на сфере единичного радиуса большие окружности являются геодезическими, но кратчайшими путями между их концами являются дуги длины, не большей, чем π . Заметим, что две противоположные точки на сфере связаны бесконечным числом кратчайших линий — отрезков меридианов.

Множество точек на сфере, равноудалённых от данной точки P на расстояние r , естественно назвать окружностью (с центром в точке P и радиуса r). В геометрии окружающего трёхмерного пространства — это параллель Z_r , которая получается при пересечении сферы с плоскостью, т. е. обычная окружность. Отметим,



что если R — радиус сферы, то с ростом r от 0 до $\pi R/2$ (до «экватора») «физические» размеры параллели Z_r увеличиваются, а с дальнейшим увеличением r начинают уменьшаться и при $r = \pi R$ окружность превращается в точку. Употребление слова «параллель» не на глобусе, а на сфере оправдано «равноправием» её точек. При вращении сферы вокруг её центра сферические расстояния между точками не меняются, а в выделенную точку «полюс» таким преобразованием можно перевести любую точку.



Вернёмся к основной задаче и ответим на вопрос, почему нельзя без искажений картографировать поверхность глобуса на плоскую область. Например, если бы небольшую круглую шапочку, окружающую полюс на глобусе, можно было «точно» картографировать на плоскость, то образом граничной параллели Z_r была бы обычная окружность радиуса r на плоскости. При этом точность картографирования должна была бы обеспечить совпадение длин путей и, как следствие, площадей областей. Сравним длины линий в паре «параллель—окружность» и площади в паре «шапочка—круг».

На плоскости длина окружности радиуса r и площадь ограниченного ею круга равны соответственно

$$\ell(r) = 2\pi r, \quad S(r) = \pi r^2.$$

Окружности радиуса r на плоскости соответствует на сфере параллель Z_r — окружность, радиус которой равен $R \sin \alpha$ (где α — угол между осью и образующими конуса, который получается, если провести радиусы к точкам на параллели Z_r).

Длина параллели и площадь части сферы, которую она ограничивает, равны

$$\tilde{\ell}(r) = 2\pi R \sin \alpha, \quad \tilde{S}(r) = 2(1 - \cos \alpha) \pi R^2.$$

Первая из формул — просто длина окружности радиуса $R \sin \alpha$. Вторую формулу можно получить, если вспомнить, что площадь поверхности шара равна $4\pi R^2$, и если решить задачу о том, какую часть поверхности сферы вырезает конус с вершиной в её центре и углом при вершине конуса, равным 2α .

Углу α можно дать и другое толкование: это центральный угол в окружности радиуса R , опирающийся на дугу длины r . Следовательно, по определению радианной меры $\alpha = \frac{r}{R}$. При малых

значениях α ($r \ll R$)

$$\sin \alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3, \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4.$$

Подставив эти приближённые значения в формулы для $\tilde{\ell}(r)$ и $\tilde{S}(r)$, получим

$$\tilde{\ell}(r) \approx 2\pi R \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} \right) = 2\pi r - \frac{\pi}{3R^2} r^3, \quad \tilde{S}(r) \approx \pi r^2 - \frac{\pi}{12R^2} r^4.$$

Видно, что $\ell(r) \neq \tilde{\ell}(r)$ и $S(r) \neq \tilde{S}(r)$ даже при малых значениях r . Поэтому никакой сколь угодно малый участок сферы нельзя отобразить на плоскость с сохранением длин и площадей.

При малых значениях r в первом приближении длины окружностей и площади кругов совпадают с их аналогами на сфере, а в поправки входит кривизна сферы:

$$\tilde{\ell}(r) \approx \ell(r) - \frac{\pi K}{3} r^3, \quad \tilde{S}(r) \approx S(r) - \frac{\pi K}{12} r^4,$$

где $K = \frac{1}{R^2}$ — гауссова кривизна сферы.

В общем случае гауссова кривизна зависит от точки поверхности. Поверхностями постоянной кривизны, например, являются сферы — для них кривизна в каждой точке равна $\frac{1}{R^2}$, а также плоскости — в этом случае кривизна в каждой точке равна нулю.

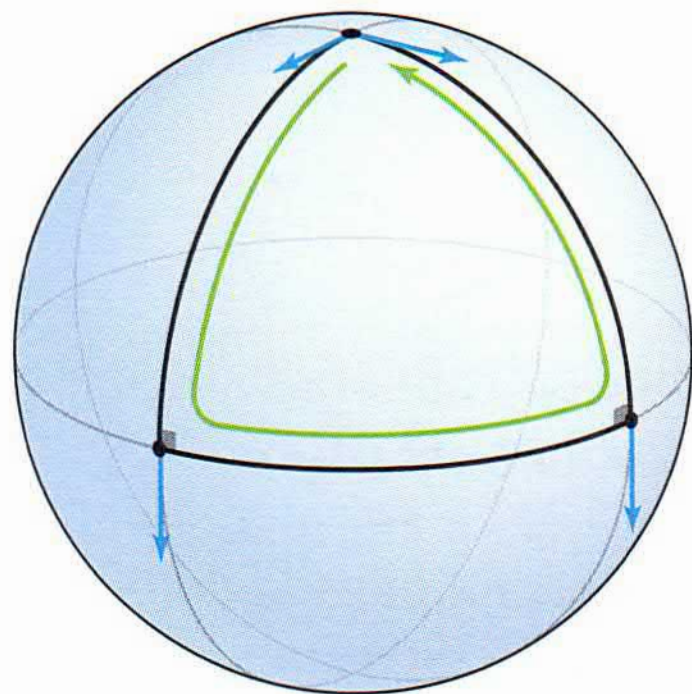
Ещё одну трактовку кривизны даёт сравнение треугольников на плоскости и в сферическом мире. Например, отличие сферы (как и любой другой «кривой поверхности») от плоскости проявится, если сравнить на этих поверхностях результаты параллельного переноса вектора вдоль замкнутого пути.

Параллельный перенос вектора из одной точки в другую вдоль геодезической реализуется семейством векторов, приложенных ко всем точкам отрезка геодезической так, что их длины и угол между векторами и геодезической сохраняются. (В начальной точке вектор семейства совпадает с данным вектором.)

Для плоскости это определение совпадает с обычным «школьным» определением параллельного переноса. При переносе вектора вдоль сторон треугольника он перейдёт сам в себя. Но в искривлённом пространстве, например на сфере, это уже не так.

Сферическим треугольником называется фигура, ограниченная дугами трёх больших окружностей (стороны треугольника — отрезки геодезических, кратчайшие пути, соединяющие вершины). Рассмотрим треугольник, ограниченный двумя меридианами,

выходящими из полюса под углом α , и вырезаемым ими отрезком экватора. Вектор (ненулевой), выходящий из полюса вдоль стороны треугольника, после параллельного переноса вдоль меридиана в вер-



шину на экваторе окажется перпендикулярен плоскости экватора. При переносе вдоль экватора в следующую вершину перпендикулярность вектора экваториальной плоскости сохранится, а после параллельного переноса вдоль меридиана в полюс получим вектор, направленный вдоль этого меридиана. Полученный вектор отличается от исходного (они образуют угол α), в этом несовпадении проявляется кривизна сферы.

В рассмотренном треугольнике сумма углов равна $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha = \pi + \alpha$, т. е. больше, чем π

(это в радианной мере, а в градусной получается, что сумма углов больше 180°). В частности, эта конструкция при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ даёт пример треугольника на сфере с тремя прямыми углами.

Отталкиваясь от того, что площадь поверхности сферы радиуса R равна $4\pi R^2$, можно найти площадь рассмотренного треугольника: $S(\alpha) = \alpha R^2$. Гауссова кривизна сферы постоянна, $K = \frac{1}{R^2}$.

С помощью этих соотношений для суммы углов этого треугольника получается формула $\pi + \alpha = \pi + K S(\alpha)$, т. е. гауссова кривизна и здесь выступает как мера отличия поверхности от плоскости. Это частный случай формулы Гаусса—Бонне, позволяющей даже на поверхности с кривизной, меняющейся от точки к точке, связать отклонение суммы углов треугольника от π с гауссовой кривизной.

В евклидовой геометрии через точку, лежащую вне заданной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну. В этом состоит аксиома о параллельных прямых (она ещё известна как «пятый постулат» Евклида). Отрицать аксиому Евклида можно двумя способами: либо утверждать, что через точку не проходит ни одна параллельная прямая, либо — что проходит несколько параллельных прямых.

Первый вариант реализуется в сферической геометрии: аналоги прямых — большие окружности (геодезические). Любая пара таких линий пересекается в двух точках, т. е. параллельных «прямых» нет. Но надо отметить, что в сферической геометрии нарушается ещё более важный принцип — единственность прямой, проходящей

через две точки. На сфере через диаметрально противоположные точки проходит бесконечно много «прямых» — больших окружностей.

Другая форма отказа от постулата о параллельных прямых стала основой геометрии, теоретически построенной Николаем Ивановичем Лобачевским. (Первые примеры пространств, в которых геометрия Лобачевского реализуется, были найдены только через сорок лет после первых работ Лобачевского о «воображаемой геометрии».)

Лобачевский вывел все аналитические формулы новой теории, оснастил её вычислительными инструментами. Оказалось, что если понимать под треугольниками фигуры, составленные из трёх отрезков геодезических, то возникают нетривиальные соотношения между длинами сторон и углами треугольников, которых нет в евклидовой геометрии. В частности, сумма углов треугольника всегда меньше, чем π (в сферической геометрии — больше, чем π).

Французский математик Лежандр, пытаясь вывести постулат о параллельных из других аксиом Евклида, доказал, что если существует хотя бы один треугольник с суммой углов, равной π , то постулат о параллельных выполняется.

Аналоги рассмотренных на сфере функций $\tilde{\ell}(r)$ и $\tilde{S}(r)$ в геометрии Лобачевского выглядят точно так же, как в сферической геометрии, только вместо тригонометрических функций появляются гиперболические (геометрию Лобачевского часто называют гиперболической). Вид приближённых формул для $\tilde{\ell}(r)$ и $\tilde{S}(r)$ тоже сохраняется, надо только учесть, что гауссова кривизна в этой геометрии отрицательная: $K < 0$.

Правильное обобщение кривизны на многомерные пространства основано на понятии параллельного переноса. Мы уже продемонстрировали, что на круглой (обычной) сфере такой перенос вектора вдоль замкнутого пути, вообще говоря, не переводит его в себя, а различие двух векторов связано с кривизной сферы.

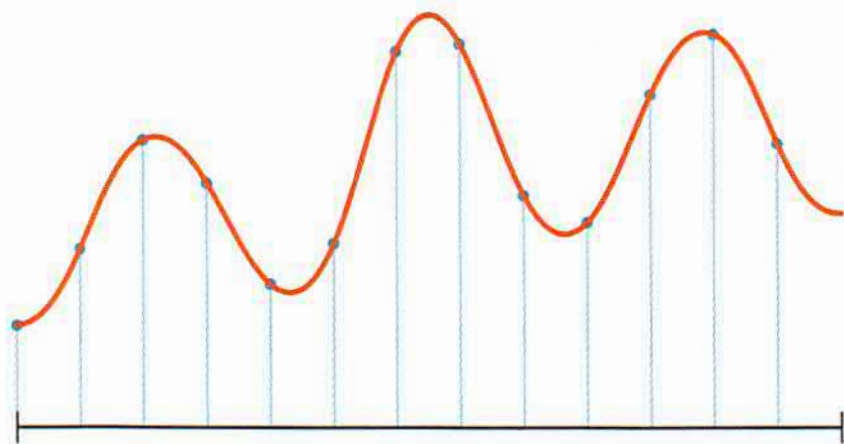
В современной физике одно из основных положений состоит в том, что сила тяготения (притяжения), физическое взаимодействие, по сути есть геометрическая характеристика нашего пространства — его кривизна.

Обработка сигналов: от волн к всплескам

Каждый раз, когда мы работаем на компьютере или говорим по мобильному телефону, запускаются мощные механизмы обработки, хранения и передачи сигналов. Эти механизмы основаны на достижениях теории функций, оптимизации, теории алгоритмов и ещё десятка областей современной математики. Одни из них родились ещё в позапрошлом веке, другие (и их большинство) — практически вчера. Теория обработки сигналов является одним из наиболее востребованных практикой разделов сегодняшней математики.

Типичный непрерывный сигнал, например звук или изображение, можно представить непрерывной функцией $f(t)$ на отрезке $[0, 1]$ (или на прямой). Дискретный вариант — значения этой функции на частой равномерной сетке отрезка $[0, 1]$, т. е. вектор

$$x = \left(f\left(\frac{0}{N}\right), f\left(\frac{1}{N}\right), \dots, f\left(\frac{N-1}{N}\right) \right).$$



Хранить такой сигнал в «необработанном» виде — дорого и неэффективно. Например, фотография, сделанная рядовым смартфоном, — это 10 мегапикселей, 10 миллионов точек, для обработки получается

большое число N порядка 10^7 . При обработке векторов такого размера суммарное количество операций будет гигантским. Проблему не решит даже использование архивации. Значит, необходимо найти какой-то способ представления сигнала без значимых потерь в качестве (а иногда и с улучшением!), используя существенно меньшее, чем N , число параметров.

Однако задачу «экономного» представления сигнала без потерь не решить, если рассматривать любые сигналы, если не сузить их множество, предполагая наличие у них каких-то свойств. Сравните: бесполезно разрабатывать общую схему размещения 10 кубометров груза в багажнике объёмом 1 кубометр, если про характер груза ничего не известно.

Выручает то, что звуки, изображения и другие сигналы, взятые из жизни, обладают некоторой регулярностью, большую часть времени меняются плавно. Как выясняется, для представления плавно меняющихся сигналов число параметров можно значительно уменьшить.

Теория приближения функций. Основная идея теории приближений — заменить «сложную» функцию $f(t)$ близкой к ней более простой функцией, являющейся линейной комбинацией выбранных заранее «базисных» функций. (Линейной комбинацией называется конечная сумма слагаемых, каждое из которых — одна из базисных функций, умноженная на какое-то число. Сам базисный набор может быть и бесконечным.) Если удастся найти приближение с точностью, необходимой для практических нужд, то можно передавать не гигантский набор значений $f(t)$ в N точках, а скромный по численности набор коэффициентов при базисных элементах в приближении. По полученному набору коэффициентов функция может быть восстановлена с выбранной точностью.

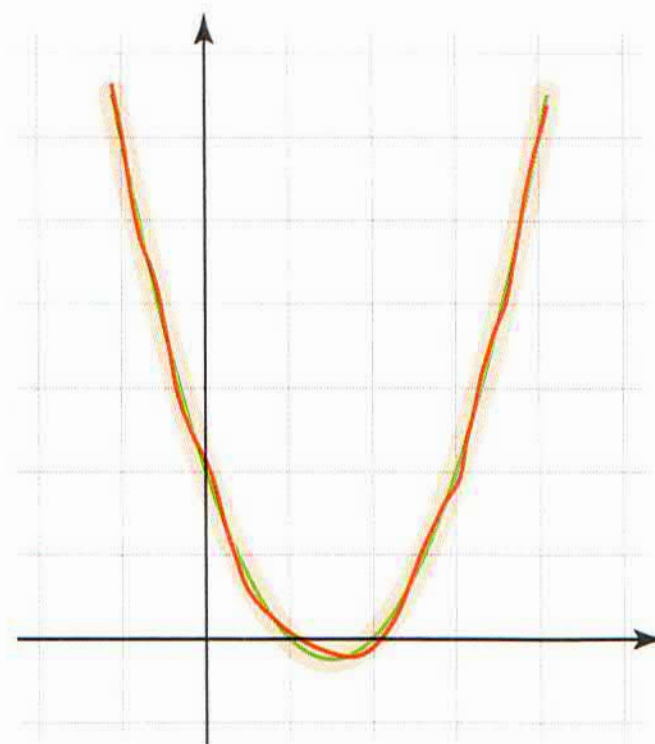
Например, в качестве базисного набора можно взять степени t : $\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$. Их линейные комбинации — это известные читателю по школьному курсу математики многочлены. И если функция $y = f(t)$ такова, что её график мало отличается от параболы $y = t^2 - 3t + 2$, то можно хранить только три числа: 1, -3 , 2. (С идеей приближения непрерывной функции многочленами читатель встречался в сюжете «Гладкие линии», стр. 80.)

Ещё одна система, доказавшая свою эффективность во многих задачах, — тригонометрическая система функций, состоящая из целых сжатий синуса и косинуса: $\{\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots\}$. Данная система — основная в приближении периодических функций. Построение таких приближений 200 лет назад привело к созданию теории тригонометрических рядов Фурье.

Базисный набор выбирается в зависимости от решаемой практической задачи. Но к середине XX века стало ясно, что классические системы не соответствуют всем запросам. Возникла необходимость в новых конструкциях, которые должны соответствовать и естественным общим пожеланиям к базисному набору.

Одно из главных условий — базисные элементы должны быть максимально независимы, дополнять друг друга. Это обеспечит существенное улучшение точности приближения линейными комбинациями элементов базиса при его расширении.

Желательно также, чтобы для достижения заданной точности приближения было достаточно относительно небольшого числа базовых элементов, что может быть обеспечено быстрым убыванием погрешности при увеличении их числа.



Ещё одно пожелание к базовым элементам носит вычислительный характер. Важно, чтобы нахождение коэффициентов хорошего приближения было несложной и быстро решаемой задачей.

Одна из эффективных идей, возникших в математике в начале XX века, — изучать возможность приближения не отдельных функций, а целых классов функций, обладающих общими свойствами, например, одинаковых в смысле гладкости.

Геометрический взгляд. Приближения в выделенных классах непрерывных и дискретных сигналов настолько похожи, что изучение принципов и методов будет вестись поочерёдно, в зависимости от степени наглядности в том или ином случае.

Начать разговор проще с дискретного случая: вектор x — не просто набор чисел, это точка геометрического пространства \mathbb{R}^N , которое можно представлять по аналогии с привычным трёхмерным пространством \mathbb{R}^3 с обычной евклидовой геометрией. Напомним, что в практических задачах размерность \mathbb{R}^N — гигантская (например, $N \sim 10^7$).

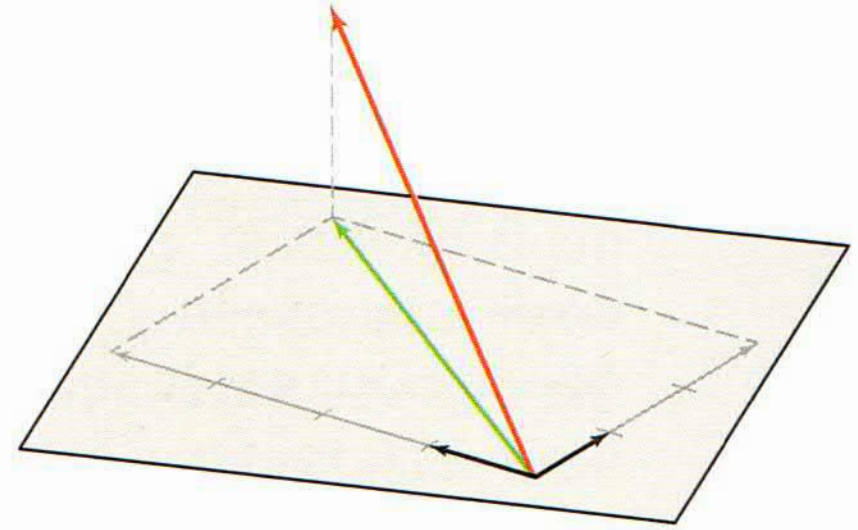
Для дискретного сигнала на сетке с шагом $1/N$ изменение координат вектора будет плавным (гладким), если модуль разности двух соседних координат не превосходит $1/N$. И доля таких сигналов среди всех будет весьма небольшой. Все N -мерные векторы, координаты которых неотрицательны и не превосходят единицы, образуют куб единичного объёма (N -мерного). Среди них гладкие сигналы заполняют N -мерный параллелепипед, его объём весьма мал и равен $(2/N)^{N-1}$. Наглядное представление — смартфон (прямоугольный, тонкий, почти плоский), лежащий на дне коробки кубической формы. Чтобы оценить долю гладких сигналов среди всех, рассмотрим модельный пример с фотографией, сделанной на смартфон: при $N = 10^7$ объём параллелепипеда невозможно представить, он меньше, чем $1/10^{6\,000\,000}$.

Итак, гладкие сигналы — мизерная часть множества произвольных сигналов. Описание всех гладких сигналов можно сделать достаточно «кратким», занимающим меньше памяти. Технически это означает, что можно найти базовые сигналы, число которых значительно меньше чем N , но линейными комбинациями которых («плоскостью», задаваемой ими) можно приблизить с достаточной точностью выбранный плавный сигнал (вспомните дно коробки как плоскость, в которой найдётся подходящее приближение для любой точки смартфона). Более общий случай: выпуклое тело малого объёма в \mathbb{R}^N можно приблизить плоскостью, размерность которой меньше, чем N ; причём чем меньше объём, тем лучше

приближение (при фиксированной размерности плоскости). Приблизить — означает провести плоскость так, чтобы она проходила рядом с каждой точкой выпуклого тела, т. е. чтобы расстояние от каждой точки тела до плоскости было мало.

Для реализации идеи остаётся выбрать базис сигналов, который порождает плоскость, хорошо приближающую данное выпуклое тело гладких сигналов.

Работа в \mathbb{R}^N с этим базисом будет значительно удобнее, если все базисные векторы $\{e_k\}$ будут попарно ортогональны (перпендикулярны) и нормированы (единичной длины): скалярные произведения $(e_i, e_j) = 0$, если $i \neq j$, и $(e_i, e_i) = 1$ при любом i . В этом случае отыскание наилучшего приближающего элемента «автоматизируется». Во-первых, это проекция вектора на плоскость. Во-вторых, проекция равна $\sum (x, e_k) e_k$, т. е. коэффициенты при таком разложении приближающего элемента по базису — скалярные произведения вектора x и базисных векторов e_k .



Пространства гладких функций. В этом разделе есть «страшные» формулы, но «начинающий» математик может воспринимать их как иллюстрации.

Для непрерывных сигналов гладкость — мера плавности изменения функции. Простой непрерывности на практике недостаточно, разумно-минимальная степень гладкости — свойство липшицевости функции (которое уже встречалось в дискретном случае). Предполагается, что расстояние между двумя точками не может увеличиться больше, чем в заданное число раз, т. е. найдётся такое число L , что при любых t_1 и t_2 выполняется неравенство

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|.$$

Можно считать, что L — характеристика растяжения резиновой нити на отрезке $[0, 1]$, с помощью которой «изготовили» график функции $f(t)$. Липшицевость — существенное усиление простой непрерывности, но более слабое свойство, чем непрерывность производной $f'(t)$ во всех точках.

В пространстве непрерывных функций $C[a, b]$ естественное понятие расстояния между функциями f и g связано с близостью их графиков во всех точках:

$$d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|.$$

Расстояние от f до нулевой функции называется нормой:

$$\|f\| = \max_t |f(t)|,$$

следовательно,

$$d(f, g) = \|f - g\|.$$

(Это расстояние называют иногда чебышёвским, в честь Пафнутия Львовича Чебышева — основоположника теории приближения функций.) Это расстояние можно использовать и в классах $C^r[a, b]$, состоящих из r раз дифференцируемых функций, у которых старшая производная $f^{(r)}(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Введённое понятие расстояния позволяет оценить достижимую точность приближения в зависимости от гладкости функции.

Например, можно утверждать (теорема Джексона), что для 2π -периодической функции $f \in C^r[0, 2\pi]$ найдётся тригонометрический многочлен f_n степени n (элемент плоскости, порождённой функциями $\cos kt$ и $\sin kt$ при $k = 0, 1, \dots, n$), расстояние от которого до f , т. е. $\|f - f_n\|$, имеет порядок $1/n^r$.

Мы уже говорили о том, что в \mathbb{R}^N можно ввести скалярное произведение и сделать его похожим по устройству на \mathbb{R}^3 . Но можно развить эту геометрическую идею и ввести бесконечномерные пространства со скалярным произведением. Пожалуй, самый важный пример — это класс функций на отрезке $[a, b]$ (достаточно широкий, например, в него входят все непрерывные функции), на этом классе скалярное произведение и норма функции (длина элемента) определяются формулами

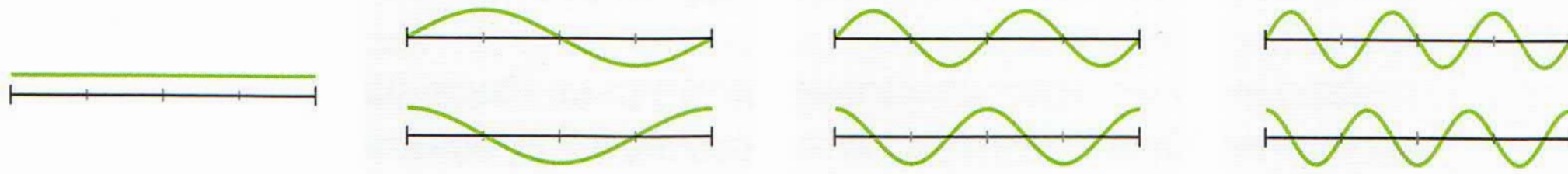
$$(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

В результате мир функций становится геометрическим, в нём можно измерять расстояния и углы между функциями. Например, угол между $f(t) = t$ и $g(t) = 2t$ равен нулю, эти векторы сонаправлены. Включение в базисный набор подобных функций, дублирующих друг друга, бессмысленно. А если равно нулю скалярное произведение функций, то функции называются ортогональными, они направлены в разные стороны, дополняют друг друга. Оказывается, что все функции из множества $\{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots\}$ попарно ортогональны на $[0, 2\pi]$. В теории приближений появление ортогонального набора элементов — знак качества, оптимальности, совершенства системы.

В пространстве функций со скалярным произведением работают те же методы приближения (проекции), что и в \mathbb{R}^N .

Метод Фурье. Стандартный базис — ортогональная и нормированная (ортонормированная) система функций $\{e_j\}_{j \geq 0}$:

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt, \quad e_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt.$$



Плоскость V_n , порождаемая функциями $\{e_0, e_1, \dots, e_{2n}\}$, состоит из тригонометрических многочленов степени n , т. е. функций вида $\sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. Подпространства V_n расширяются с ростом n и в некотором смысле исчерпывают всё пространство функций. Точнее, для любой функции из этого пространства можно найти её приближение из некоторого V_n с заданной точностью. Наилучшее приближение из V_n — это проекция f на эту плоскость

$$S_n f = \sum_{k=0}^{2n} (f, e_k) e_k.$$

Как и в \mathbb{R}^N , способ нахождения коэффициентов в разложении проекции — универсальный, это вычисление скалярных произведений (f, e_k) .

В пространстве функций ортонормированная система $\{e_k\}_{k \geq 0}$ играет важную роль, тригонометрическими многочленами успешно приближаются гладкие функции (выпуклое множество в пространстве функций). Например, для функции f класса $C^r[0, 2\pi]$ с помощью теоремы Джексона несложно установить, что погрешность $\|f - S_n f\|$ имеет порядок $1/n^r$.

Теорема Джексона позволяет оценить число коэффициентов, которые нужно сохранить вместо оригинального сигнала, чтобы обеспечить необходимую точность. Это число гораздо меньше, чем количество значений на сетке. И чем выше гладкость сигнала, тем меньше понадобится для него коэффициентов. Например, если точность приближения $\varepsilon = 0,01$, то при $r = 1$ (что соответствует часто встречающимся липшицевым сигналам) такую погрешность обеспечивает 201 коэффициент. А если $r = 3$ (такие сигналы встречаются гораздо реже) вся «посылка» будет состоять из 11 чисел!

Если функция и приближающий её тригонометрический многочлен отличаются мало, то номера входящих в него гармоник

(синусов и косинусов) определяют спектр частот, из которых в действительности составлен сигнал. А коэффициенты в многочлене говорят о вкладе, который вносят соответствующие гармоники. Наглядный пример: тембр звука складывается из синусоидальных колебаний струны, коэффициенты в разложении — амплитуды, громкость (см. «Чистые интервалы», стр. 98).

Дискретное преобразование Фурье. Идею замены непрерывного сигнала N -мерным вектором, компоненты которого — значения функции на сетке с шагом $1/N$, можно применить и к базисным наборам, например к тригонометрическим функциям. Свойства тригонометрической системы — ортонормированность и «базисные» способности — сохраняются и в «дискретном» варианте: получается ортонормированная система $\{E_k\}$ из N векторов в \mathbb{R}^N . (Техническое изящество конструкции достигается заменой каждой пары $\{\cos kt, \sin kt\}$ двумя экспонентами $e^{\pm ikt}$; основа этой операции — формула Эйлера $e^{it} = \cos t + i \sin t$.)

Коэффициенты в разложении дискретного сигнала x (вектора из \mathbb{R}^N) по базису $\{E_k\}$ образуют N -мерный вектор \hat{x} , который называют дискретным преобразованием Фурье. На этом шаге экономии нет: просто один N -мерный вектор превратили в другой.

Но если x — сигнал гладкий, то координаты вектора \hat{x} с большими номерами малы. Отбросив их (т. е. заменив нулями, которые не нужно передавать), можно получить хорошее, но «короткое» приближение для вектора \hat{x} . Применив обратное дискретное преобразование Фурье к этому приближению, получим вектор, хорошо приближающий сигнал x . Это основано на двух свойствах базиса $\{E_k\}$, унаследованных от непрерывного базиса $\{e_k\}$. Во-первых, обратное преобразование Фурье вычисляется по тем же формулам, что и прямое (единственное изменение — замена знаков в показателе экспонент). Во-вторых, дискретное преобразование Фурье — движение евклидова пространства \mathbb{R}^N , при котором сохраняются скалярные произведения $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y)$, а следовательно, и длины, и углы, и погрешности приближения.

Для оценки точности приближения сигнала с помощью дискретного преобразования Фурье можно воспользоваться дискретной версией теоремы Джексона. Оказывается, при $N = 10^7$ и заданной точности $\varepsilon = 0,01$ для случая $r = 1$ (липшицевы сигналы) придётся вычислить примерно $6 \cdot 10^5$ коэффициентов Фурье, а для $r = 3$ — примерно 140.

Типичное сжатие по методу Фурье — примерно в 10—20 раз (число $N = 10^7$ заменяется на $6 \cdot 10^5$). Но чтобы этот выигрыш

получить, придётся вычислять десятки тысяч коэффициентов Фурье, а это означает выполнение $2N^2$ арифметических операций.

Например, при $N = 10^7$ получается «нереальное» значение $2 \cdot 10^{14}$. Отправка фотографии, сделанной смартфоном, заняла бы... более получаса! А ведь потом ещё придётся потратить столько же времени на раскодировку, т. е. на обратное преобразование Фурье. Конечно, нам нужны не все коэффициенты Фурье, при гладком сигнале их число уменьшается, но и тогда объём вычислений получается недопустимо большим.

Неужели из этой ситуации нет никакого выхода? Оказывается, существует специальный алгоритм, который даёт возможность находить коэффициенты Фурье не по отдельности (один за другим), а параллельно. Это — **быстрое преобразование Фурье**, в котором вычисления устроены так, что их результаты используются для определения сразу нескольких коэффициентов Фурье (аналогия — быстрое умножение, см. «Быстрая арифметика», стр. 166). Экономия получается существенной: число операций сокращается с $2N^2$ до $2N \log_2 N$. Например, при $N = 10^7$ необходимо выполнить не $2 \cdot 10^{14}$ операций, а менее $5 \cdot 10^8$ — выигрыш в 400 000 раз! Отправка фотографии займёт долю секунды!

Вывод, который необходимо сделать, такой: при построении приближения надо учитывать не только количество используемых коэффициентов Фурье, но и число операций при их вычислении. Заметим, что в задаче разложения по базису из N элементов число операций (сложность, см. «Теория сложности», стр. 262) не может быть меньше чем N . Действительно, для определения каждого коэффициента нужна хотя бы одна операция. Сложность метода быстрого преобразования Фурье является почти линейной, т. е. близка к границам возможного.

Недостаток тригонометрической системы. Выбор тригонометрических функций в качестве базисных для обработки гладких сигналов удачен во многих отношениях, от эффективности до удобства. Эффективность — высокий коэффициент сжатия — обеспечивается гладкостью тригонометрических функций и теоремой Джексона. Удобство связано и с общим свойством ортогональной системы — наилучшим приближением является проекция, и с тем, что коэффициенты разложения в проекции можно найти с помощью быстрого преобразования Фурье (вычислительная сложность близка к линейной). В целом метод Фурье хорош и широко применяется.

Но у тригонометрической системы есть серьёзный и неустраняемый недостаток, который стал особенно заметен при использовании мощных компьютеров, — чувствительность к шуму.

Шум — искажение сигнала, ошибка. Как правило, это кратковременная, но большая по величине добавка к основному сигналу. Например: щелчок, треск — на пластинке, пылинка — на фотографии. Для дискретного сигнала x шум — это изменение одной из его координат. Но в разложении Фурье сигнала x изменятся все координаты вектора \hat{x} (на одну и ту же величину) — ошибка в одной координате размазалась равномерно по всем координатам \hat{x} , замаскировалась. Поэтому найти место повреждения сигнала и исправить ошибку будет трудно. В результате при обработке методом Фурье зашумлённой фотографии получится менее чёткое, размытое изображение.

Чтобы избежать эффекта размазывания шума, надо найти и использовать базис, состоящий из локализованных функций. Так называется функция, у которой все ненулевые значения сосредоточены на небольшом отрезке. Иными словами, нужны не плавные волны типа синусов и косинусов, а резкие и узкие всплески.

Начало всплесков: система Хаара. На пути к базису эффективному и состоящему из локализованных функций сделаем промежуточную остановку в 1909 году и познакомимся с базисом Хаара. Этот базис удобен в использовании, состоит из локализованных функций, но при этом не очень удачен в смысле эффективности. Базис Хаара на отрезке $[0, 1]$ строится последовательно, по уровням.

На нулевом уровне — всего одна функция h_1 , «ступенька»: она равна 1 на левой половине отрезка и (-1) — на правой. Из сжатий и сдвигов этой функции h_1 получаются все последующие функции Хаара.

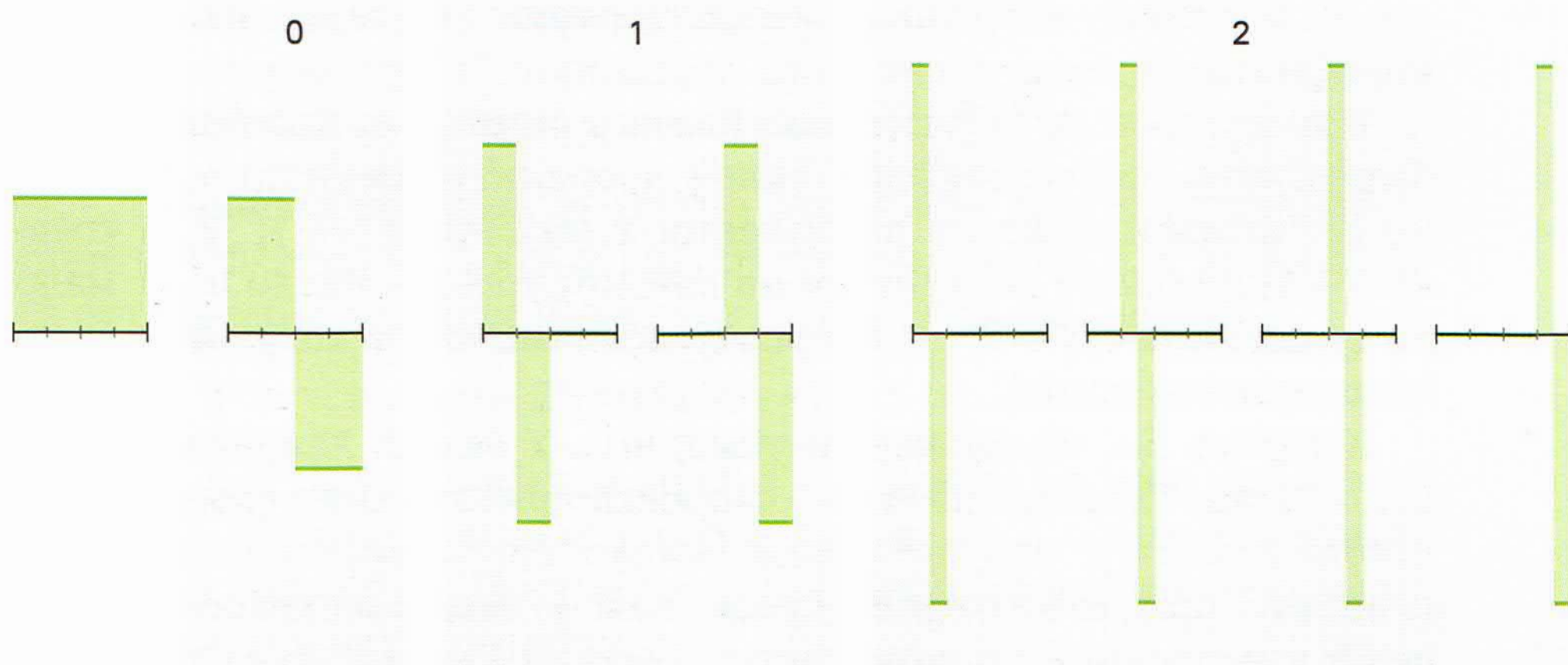
На первом уровне обитают две функции, h_2 и h_3 : сжатая в два раза ступенька h_1 может быть локализована и на $[0, 1/2)$, и на $[1/2, 1)$.

Функции h_4, h_5, h_6, h_7 второго уровня — это четыре ступеньки, полученные сжатием h_1 в четыре раза и локализованные на последовательных четвертях отрезка $[0, 1]$.

В общем случае уровень с номером n состоит из 2^n ступенек, каждая из которых — ступенька h_1 , сжатая в 2^n раз.

Функции одного уровня попарно ортогональны, так как они расположены на непересекающихся отрезках. Ортогональность функций разного уровня доказывается несложно. Чтобы норма каждой

функции была равна 1, надо каждую ступеньку умножить на коэффициент, учитывающий длину отрезка локализации.



Если функцию h_1 , продолженную тождественным нулём на всю числовую прямую, обозначить через ψ , то все функции Хаара $\{h_k\}$ можно описать одной формулой: $2^{n/2} \psi(2^n t - k)$, где $n \geq 0$, а при фиксированном n параметр k меняется от 0 до $2^n - 1$. Чтобы система стала ортонормированным базисом, надо добавить к ней ещё одну функцию $h_0 = 1$.

В пространстве всех функций функции Хаара $\{h_k\}_{k=0}^{2^n-1}$ задают плоскость V_n размерности 2^n . Базис пространства V_n — объединение функций всех уровней от 0 до $n - 1$. Аналогично системе Фурье, наилучший элемент приближения функции f в подпространстве V_n — проекция

$$S_n f = \sum_{k=0}^{2^n-1} (f, h_k) h_k.$$

При проецировании на V_n любая функция f превращается в «лесенку» из 2^n ступенек. Высота каждой ступеньки есть среднее значение функции на соответствующем интервале.

Дискретный вариант базиса Хаара $\{H_k\}$ — пронормированные значения функций $\{h_k\}$ на сетке с шагом $1/2^n$. Система $\{H_k\}_{k=0}^{2^n-1}$ — ортонормированный базис в \mathbb{R}^N , $N = 2^n$.

Даже прямое вычисление всех коэффициентов в базисе $\{H_k\}$ имеет сложность вдвое меньшую, чем для быстрого преобразования Фурье. Это следствие двоичной структуры базиса Хаара. Но и эту низкую сложность можно уменьшить! В так называемом **каскадном алгоритме** используется фактическая повторяемость

действий в дискретном преобразовании Хаара, обусловленная двоичностью и «правильным» чередованием знаков функций $\{H_k\}$. В итоге достигается сложность $4(N - 1)$ — по порядку неулучшаемый результат, в среднем менее четырёх операций на каждый коэффициент!

В дискретном преобразовании Хаара, в отличие от преобразования Фурье, шум, появившийся в одной координате вектора x , меняет не все коэффициенты в разложении x по базису $\{H_k\}_{k=0}^{2^n-1}$, а только $n + 1$, по одной координате на каждом уровне. Число $n + 1$ мало по сравнению с $N = 2^n$, т. е. преобразование Хаара сохраняет локализованность помех.

Казалось бы, идеальная система, но... У базиса Хаара тоже есть недостатки. Главный из них — скорость приближения функции перестаёт расти с возрастанием гладкости. Например, функции класса C^3 приближаются не лучше, чем функции из класса C^1 . Это ведёт к медленной сходимости разложений Хаара и, как следствие, к необходимости хранить большое число коэффициентов.

Другой недостаток функций Хаара — они разрывные. А это сужает технические возможности. Во многих приложениях приближение функции (сигнала) приходится дифференцировать, иногда даже несколько раз (скажем, при численном решении дифференциальных уравнений). С функциями Хаара этого делать нельзя, они не только не дифференцируемы, но и не непрерывны.

Значит, в идеале, для приближений нужен «гладкий Хаар»!

Всплески: общая конструкция. Мы двигались в изложении «параллельно» развитию теории приближений функций, пропустив ряд важных остановок — многочисленные достижения на этом пути. Накоплены идеи, благодаря которым в 1980-х годах произошла кристаллизация понимания того, как должны выглядеть всплески — «правильный» базис в пространстве функций со скалярным произведением на числовой прямой \mathbb{R} .

Общее представление базиса всплесков даётся на языке линейных пространств, плоскостей, которые порождаются конечными наборами элементов базиса. Терминологически такое представление называется кратномасштабным анализом: это система замкнутых подпространств $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в пространстве функций, обладающая следующими свойствами.

1. Пространства V_n расширяются: $V_n \subset V_{n+1}$, $V_n \neq V_{n+1}$.
2. Пространства V_n «исчерпывают» всё пространство функций при $n \rightarrow \infty$: любую функцию можно приблизить сколь угодно точно функциями из некоторого пространства V_n .

3. Пересечение всех пространств V_n содержит только нулевую функцию (тождественный нуль).

4. Расширение в системе $\{V_n\}$ носит двоичный характер: для любой функции $f(t) \in V_n$ имеем $f(2t) \in V_{n+1}$.

5. Пространство V_0 порождено ортогональными друг другу целыми сдвигами некоторой функции φ .

С помощью функции φ можно построить всплеск-функцию ψ , сдвиги и сжатия которой образуют систему всплесков, являющуюся ортонормированным базисом в пространстве функций:

$$\psi_{n,k}(t) = 2^{n/2} \psi(2^n t - k), \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Каждый кратномасштабный анализ порождает систему всплесков, и любая система всплесков порождается некоторым кратномасштабным анализом. Поэтому построение системы всплесков сводится к построению функции φ .

Базисы, порождаемые системами кратномасштабного анализа, в силу своей двоичной природы обладают рядом преимуществ. Во-первых, коэффициенты разложения быстро вычисляются с использованием каскадного алгоритма. Во-вторых, и это главное, переход от плоскости V_n к V_{n+1} означает, что в задаче о приближении число используемых базисных функций увеличивается вдвое, что является оптимальным способом достижения заданной точности.

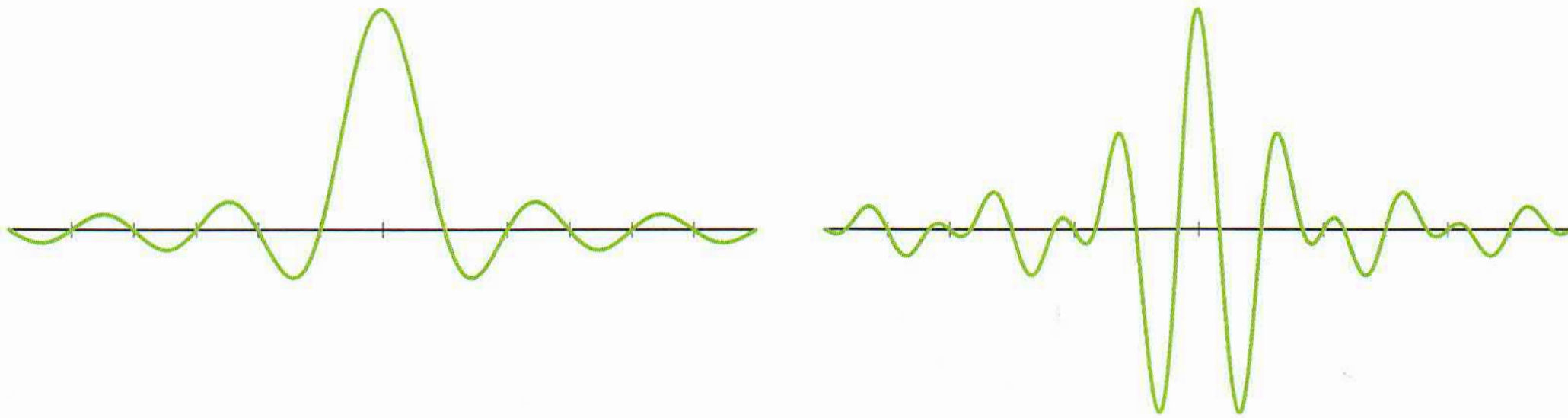
Отметим, что условия на пространства V_n в определении кратномасштабного анализа обеспечивают то, что система $\{\psi_{n,k}(t)\}$ будет базисом в пространстве функций на прямой.

Всплески: примеры. Построенный базис Хаара на отрезке $[0, 1]$ — всё ещё не система всплесков. Он превращается в такую с помощью распространения на всю прямую \mathbb{R} . *Всплески Хаара* порождаются функцией φ — характеристической функцией промежутка $[0, 1)$, которая равна 1 на нём и 0 вне него, а также функцией ψ , полученной продолжением нулём на \mathbb{R} функции Хаара h_1 . Всплески Хаара обладают прекрасной локализацией, но наследуют и недостатки системы Хаара (ограниченность скорости приближения при росте гладкости, разрывность функций системы).

Всплески Шеннона—Котельникова достаточно естественным образом возникают в электронике, поэтому инженеры придумали эту систему раньше математиков (в первой половине XX века). Кратномасштабный анализ пространств функций порождён функцией φ

и соответствует системе всплесков с функцией ψ , где

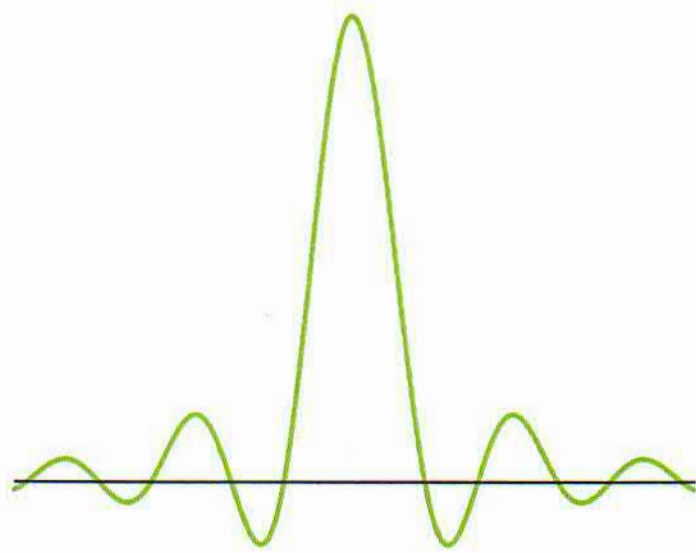
$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}, \quad \psi(t) = \frac{\sin 2\pi t - \sin \pi t}{\pi t}.$$



(Техническое пояснение для аналитиков: функция φ — преобразование Фурье характеристической функции отрезка. Так что возникающая система всплесков в каком-то смысле двойственна системе Хаара.)

Получающиеся всплески Шеннона—Котельникова очень гладкие, но при этом далеки от локализованных: медленно убывают при $t \rightarrow \infty$. Плохая локализация затрудняет избавление сигнала от шума и замедляет работу каскадного алгоритма. Это главный недостаток данной системы.

Всплески Мейера. В 1986 году Ив Мейер немного «подправил» систему Шеннона—Котельникова, получив гладкую и быстро убывающую систему всплесков. Эта малая поправка, однако, далась большими усилиями, ведь новая система должна была сохранить

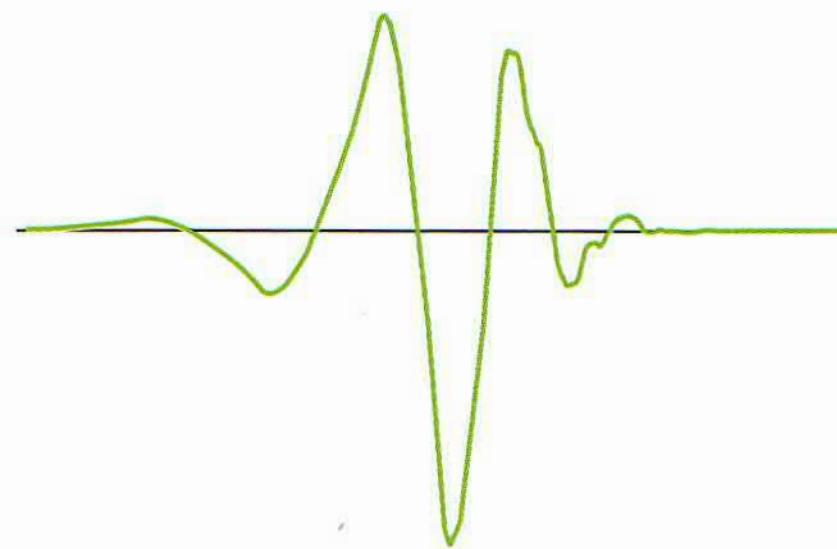


все свойства всплесков Шеннона—Котельникова. (Изменение можно пояснить так: в отличие от системы Шеннона—Котельникова, теперь функция $\varphi(t)$ является преобразованием Фурье сглаженной характеристической функции отрезка, а такая функция $\varphi(t)$ быстро убывает при $t \rightarrow \infty$.) Получилась замечательная система функций, которая до сих пор широко используется. В отличие от ранее известных систем, всплески Мейера не были взяты «из жизни», а полностью, от начала

до конца, придуманы. Это — чисто математическая конструкция, причём очень хитрая и тонкая. За её изобретение Мейер получил множество научных наград, включая престижнейшую премию Абеля в 2017 году.

При всех своих достоинствах, всплески Мейера — это ещё не «гладкий Хаар», поскольку всплеск-функция не обращается в нуль вне некоторого отрезка (хотя и быстро стремится к нулю).

Всплески Добеши были изобретены в 1988 году и произвели сенсацию в научном сообществе. На Международном конгрессе математиков в Цюрихе в 1994 году Ингрид Добеши, вопреки обыкновению, было дано два часа для пленарного доклада, вместо принятого одного часа. Новые базисы уже не задаются явными формулами, а строятся как решения специальных уравнений. Вычисляются они приближённо с некоторой точностью. Базисные функции имеют конечную гладкость, в отличие от систем Шеннона—Котельникова и Мейера. Более того, они имеют много общего с фракталами. Тем не менее они обладают всеми необходимыми свойствами: хорошо приближают сигналы и позволяют удалять шумы. А самое главное, как и для системы Хаара, функции системы Добеши сосредоточены на конечных отрезках. Сейчас они используются повсеместно при работе с фото- и видеоизображениями, в компьютерной томографии, при распознавании образов и т. д. Например, стандарт JPEG2000 основан на всплесках Добеши.



Заключение. Подведём итоги рассказа о задачах экономного представления сигналов. Два века назад появилась теория рядов Фурье. Столетием позже появились первые всплески (функции Хаара), ещё через 80 лет возникли всплески Добеши. Именно столько времени понадобилось учёным для создания теории всплесков, нашедшей плодотворные приложения. Теория продолжает интенсивно развиваться, в ней остаётся много нерешённых интересных задач.

Математика и логика

Логика как наука — предмет почти такой же древний, как и математика. В античное время и средние века она была составной частью *тривиума* (грамматика, риторика, логика/диалектика) — базового уровня образования; математические же предметы (арифметика, геометрия, астрономия и музыка) составляли следующий, более продвинутый, уровень, называемый *квадривиум*. (От слова «тривиум» происходит одно из любимых математиками выражений «тривиально».) Предметы тривиума понимались как науки о том, как правильно, без ошибок, писать, говорить и, соответственно, рассуждать.

Мы расскажем о том, как и почему возникла *математическая логика*, что она изучает, какие у неё есть достижения и современные применения.

От Аристотеля к Булю. Основы учения о правильных рассуждениях заложил Аристотель. Он заметил, что корректные умозаключения следуют определённым элементарным схемам, называемым *силлогизмами*, и перечислил ряд таких схем. (Классический пример силлогизма: «Все люди смертны. Сократ — человек. Следовательно, Сократ смертен».) Учение о силлогизмах в свою очередь опиралось на глубокий анализ понятий и их соединения в высказывания.

Силлогистика Аристотеля была не лишена недостатков, однако в целом была выдающейся теорией и стала основой изучения логики на протяжении античности и средних веков. В трудах античных стоиков и средневековых схоластов она была модифицирована и дополнена. В таком виде аристотелевская логика дошла вплоть до середины XIX века, где и встретила революцию, связанную с проникновением в логику математических методов.

Возникновение математической логики полностью изменило представления учёных как о методах исследования логики, так и о том, что составляет сам предмет её изучения. В наше время заявления, что логика есть наука о правильных рассуждениях, кажутся настолько же справедливыми, насколько утверждение «математика — это наука о правильных вычислениях».

Аналогия между рассуждениями и вычислениями несколько глубже, чем кажется на первый взгляд. Возникновение логики как математической науки было связано с работами британских учёных Джорджа Буля и Августа де Моргана, которые обнаружили, что с логическими высказываниями можно оперировать как с алгебраическими

выражениями. Например, если сложение читать как логическую связку «или», умножение как «и», а равенство как «равносильно», то для любых высказываний a, b выполняются законы

$$a + b = b + a, \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

как и многие другие привычные нам законы арифметики. Но, помимо этого, в алгебре высказываний выполняется и кое-что непривычное, например всегда

$$a + a = a \quad \text{и} \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c).$$

Такой взгляд на логику высказываний и силлогистику оказался и неожиданным, и плодотворным. В наше время эту точку зрения разрабатывает область, называемая *алгебраической логикой*, а одним из её центральных понятий является понятие *булевой алгебры*, названной так в честь её первооткрывателя. Эта область исследований, через понятие реляционной алгебры, обобщающей булеву, привела в 1960-х годах к теории реляционных баз данных, в наше время лежащей в основе самых распространённых языков запросов, таких как SQL.

Математизация логики и аксиоматизация математики. Движущей причиной процесса математизации логики был назревший в самой математике на рубеже XIX—XX веков кризис оснований. С одной стороны, во второй половине XIX века в математике получил распространение удобный язык теории множеств, созданной Георгом Кантором. Математики стали уверенно использовать в своих рассуждениях конструкции с бесконечными множествами. Математика, вооружённая теорией множеств, шла от успеха к успеху.

С другой стороны, в самой теории множеств Кантора обнаружились парадоксы, которые указывали на то, что с этой теорией не всё в порядке на самом базовом уровне. Простейший парадокс такого рода, в фольклорном варианте известный как парадокс брадобрея, был придуман Берtrandом Расселом: рассмотрим множество R всех тех множеств, которые не содержат сами себя в качестве элемента. Тогда $R \in R$ если и только если $R \notin R$, противоречие.

Такое положение дел заставило многих выдающихся математиков и философов той эпохи (Пeano, Фреге, Рассел, Гильберт, Пуанкаре, Брауэр, Вейль и др.) задуматься об основаниях математики. Их волновали такие фундаментальные вопросы как:

- Что означает доказать математическую теорему? Какие средства при этом законно использовать?
- Что значит выразить то или иное математическое понятие или утверждение на том или ином языке?
- Когда мы говорим об истинности и о доказуемости какого-либо математического утверждения, имеется ли в виду одно и то же?

Параллельно в математике стали укореняться новые стандарты строгости. Основные области математики — анализ, алгебра, геометрия — были поставлены на аксиоматическую основу. Великий математик Давид Гильберт (1862—1943) был ярким сторонником и пропагандистом аксиоматического метода. Под его влиянием была построена и общепринятая в наше время система аксиом теории множеств, свободная от очевидных парадоксов. Эту аксиоматику предложил в 1908 году Э. Цермело и в дальнейшем дополнили Дж. фон Нейман и А. Френкель. Но где же настоящая гарантия, что полученная система не содержит противоречия? Каким образом это можно установить?

Эти вопросы оказались гораздо сложнее, чем представлялось тогда Гильберту. Они потребовали глубокого изучения аксиоматических систем и их формализации, привели к точному анализу структуры математического высказывания, первым формулировкам строгих математических моделей таких явлений, как доказуемость, выразимость, истинность, и сделали возможным их изучение математическими методами. Так возникла математическая логика — особая область исследований внутри математики. В рамках этой дисциплины был создан точный язык и математический аппарат для исследования целого пласта явлений, ранее относившихся к чисто гуманитарному знанию. (В этой роли математическую логику можно сравнить с такой областью современной математики, как теория вероятностей, которая ещё в начале XX века не была строго математической дисциплиной.)

Формальные языки. С современной точки зрения область интересов математической логики значительно шире, чем наука о правильных рассуждениях; её можно приблизительно описать, с оговорками и уточнениями, как *построение и исследование формальных языков и систем математическими методами*. Заметим, что если в этом определении отбросить слово «формальных», то вместо логики мы получим, по существу, математическую лингвистику — что указывает на определённое родство между этими двумя дисциплинами. Ключевое же отличие математической логики от логики в широком смысле слова — это именно использование математических методов, применяемых к точным формальным моделям.

« Математическая логика по предмету своему есть логика, а по методу — математика. »

(П. С. Порецкий, 1884 год, Казань.)

Формальные и естественные языки имеют общие черты: у тех и у других есть *синтаксис* (то, как мы говорим или пишем), *семантика* (смысл того, что написано) и *прагматика* (то, как используется написанное). Основное отличие заключается в том, что —

по крайней мере в идеале — синтаксис и семантика формальных языков могут быть определены на уровне математической строгости и поэтому в принципе поддаются анализу чисто математическими методами.

В наше время формальные языки встречаются в каждом доступном нам электронном устройстве, вроде мобильного телефона, а некоторые из них — языки программирования — даже изучают в школе. Поэтому за примерами далеко ходить не надо. Однако в середине XIX века, когда начался процесс математизации логики, формальных языков ещё не было, их только предстояло создать.

Логика предикатов. Разработчики первых формальных языков и систем, как правило, не думали о том, что эти системы могут быть реально использованы в вычислительных устройствах. (Исключением, видимо, можно считать великого учёного Готфрида Вильгельма Лейбница (1646—1716), который почти за два века до Буля предвосхитил многие идеи математической логики, включая идею формализации языка математики, и даже построил механический арифмометр.)

Первые формальные языки и системы возникли как результат выделения фрагмента естественного языка, достаточного для передачи формулировок математических утверждений и их анализа. Процесс выработки основных категорий этого языка был продолжительным и шёл параллельно с выработкой некоторых ставших в наше время стандартными математических обозначений. (Одним из важных понятий, введённых в это время, стало понятие *квантора*, сформировавшееся в работах Г. Фреге и Ч. Пирса. Кванторы существования \exists и всеобщности \forall заменяют языковые конструкции «для некоторого» и «для всех». Первое из этих обозначений введено Дж. Пеано в 1897 году, второе — по аналогии — Г. Генценом в 1935 году, однако общеупотребительными эти обозначения стали лишь под влиянием Бурбаки во второй половине XX века.) Этот процесс в основном завершился в 1920-х годах, когда в качестве стандартного класса языков, предназначенных для формализации и анализа математических утверждений, стал рассматриваться язык логики предикатов (первого порядка).

Предикатом на множестве M мы называем высказывание, зависящее от n параметров из этого множества (например, «натуральное число x чётно», «точки x , y и z плоскости лежат на одной прямой»). Как только фиксированы значения параметров, предикат принимает логическое значение ложь или истина. Таким образом, с формальной точки зрения предикат представляет собой функцию от n аргументов из множества M в $\{0, 1\}$.

Не вдаваясь в технические подробности, можно приблизительно описать высказывания логики предикатов как такие, которые можно

сформулировать (предполагая заранее заданными обозначения некоторых базовых предикатов) с помощью конструкций \wedge «и», \vee «или», \neg «не», \rightarrow «влечёт» и уже упомянутых кванторов. Например, текст $\forall x \exists y (y > x \wedge P(y))$ выражает неограниченность множества простых чисел, если договориться, что переменные пробегают множество натуральных чисел, « $>$ » означает «больше», а $P(y)$ выражает простоту числа y . Эти договорённости составляют часть того, что мы называли семантикой языка логики предикатов.

Удивительный факт, подтверждаемый всей существующей математической практикой, состоит в том, что выразительных средств языка логики предикатов — на первый взгляд очень скромных — достаточно для формулировки любых известных математических результатов. При этом может быть использовано всего лишь одно базовое понятие — предикат принадлежности $x \in y$ «множество x есть элемент множества y ». (В картине мира аксиоматической теории множеств все объекты, обозначаемые переменными, являются множествами.)

Доказуемость и вычислимость. Выразить в данном языке то или иное осмысленное утверждение — совсем не то же самое, что суметь его доказать. Следующий уровень языка логики предикатов состоит в описании таких текстов, которые следует признать корректными доказательствами. Традиционно этот уровень называется в математической логике *исчислением предикатов*. Формальное доказательство (в формате, который принято называть гильбертовским, но который существовал и до работ Давида Гильберта) представляет собой конечную цепочку высказываний логики предикатов, каждое из которых либо является аксиомой, либо получается из предшествующих высказываний по одному из постулируемых правил. Минимальный стандартный набор таких правил содержит лишь два: правило, позволяющее из высказываний A и $A \rightarrow B$ вывести B , и правило, позволяющее из высказывания A вывести $\forall x A$. (Если высказывание A содержит параметр x , то формальное доказательство A обосновывает его истинность при всех возможных значениях параметра.)

Таким образом, математическая доказуемость описывается двумя формальными языками — языком утверждений, описанным в предыдущем разделе, и языком доказательств — из которых второй является надстройкой над первым.

Похожая ситуация имеет место и с понятием вычислимости. Языки программирования предназначены для описания алгоритмов. Алгоритм при этом описывается программой — построенным по определённым правилам формальным текстом, который принято называть кодом. Таким образом, первый уровень языка программирования

составляет язык текстов программ. Однако, процесс *выполнения* программы на данном компьютере на данном входе также может быть зафиксирован в виде текста (не важно, сохраняется ли этот текст в ходе работы программы или нет). В теории алгоритмов принято называть такой текст *полным протоколом* работы программы. То, каким образом порождается этот протокол, и составляет полное описание той или иной вычислительной модели. Для реальных языков программирования, разумеется, такое описание чрезвычайно сложно, однако для простейших моделей, таких как машина Тьюринга, оно гораздо проще.

Теория алгоритмов и создание компьютеров. Математическая логика сыграла важную роль в появлении компьютеров, хотя и не была единственной движущей силой в этом сложном процессе. Именно в математической логике, в попытке дать наиболее общее определение задачи, имеющей алгоритмическое решение, было осознано, что возможно построение универсального вычислительного устройства (машины), которое будет способно решать все теоретически разрешимые алгоритмические задачи.

Одним из первых, кто это понял, был Алан Тьюринг, давший точное определение и наиболее убедительный анализ понятия вычислимой функции в 1936 году. Другими учёными, которые наряду с Тьюрингом пришли к тем же идеям приблизительно в то же время, были Алонзо Чёрч и Эмиль Пост. Этими и другими исследователями в 1930-х годах были созданы начала теории алгоритмов, которая стала основой понимания работы и построения вычислительных устройств в 40-е и 50-е годы. В частности, идея универсальной машины Тьюринга была в дальнейшем технически реализована в компьютерной архитектуре «по фон Нейману», в соответствии с которой программа хранится в памяти устройства и может быть модифицирована в ходе его работы. На основе этой идеи построены все операционные системы.

Задачей, которую стремились решить пионеры теории алгоритмов, был вопрос, поставленный Гильбертом и названный им по-немецки *Entscheidungsproblem*, «проблема решения». Вопрос состоял в том, чтобы найти алгоритм, который по данному утверждению, записанному на языке логики предикатов, давал бы ответ, существует ли формальное доказательство этого утверждения или нет. Если бы такой алгоритм существовал, то все математические проблемы в некотором смысле имели бы чисто механическое решение: как уже упоминалось, на языке логики предикатов можно сформулировать практически любое математическое утверждение, например знаменитую гипотезу о бесконечности числа пар простых чисел-близнецов. Тогда вопрос о том, выводима ли эта гипотеза из аксиом теории множеств,

сводился бы к проверке доказуемости некоторого высказывания в исчислении предикатов. Неудивительно, что исследователи *Entscheidungsproblem* стремились показать, что требуемого алгоритма в принципе не может существовать.

Если доказать существование того или иного алгоритма можно, предъявив его явно, то для того, чтобы утверждать, что такого алгоритма *не существует*, необходимо располагать точным математическим описанием того класса задач, которые допускают алгоритмическое решение. Ответ на этот вопрос потребовал разработки формальных языков описания алгоритмов ещё до появления компьютеров. Причём, поскольку цель такой разработки была более теоретическая, чем практическая, исследователи стремились к формулировке наиболее простых для описания и в то же время универсальных вычислительных моделей. Первыми такими моделями были рекурсивные функции Гёделя—Эрбрана, лямбда-исчисление Чёрча и машины Тьюринга.

Гёдель, хотя и был первым, кто фактически сформулировал универсальный язык программирования, не считал, что найденное им (и французским логиком Эрбраном) понятие является универсальным в смысле способности запрограммировать любой алгоритм. Первым, кто высказал тезис об универсальности своей вычислительной модели, был Алонзо Чёрч. Он также предъявил доказательство невозможности решения *Entscheidungsproblem* в рамках этой модели. Исчисление Чёрча было очень простым по форме, но больше напоминало формальное логическое исчисление, чем реальную вычислительную машину. Машины Тьюринга в этом смысле были ближе к будущей реальности, и поверить в тезис Тьюринга о том, что любая задача, имеющая алгоритмическое решение, может быть решена на машине Тьюринга, было намного легче, чем в аналогичный тезис Чёрча (известно, что именно работа Тьюринга смогла убедить Гёделя в справедливости этого тезиса). Тьюринг также показал, что его машины эквивалентны лямбда-исчислению в смысле вычислительных возможностей, что стало косвенным свидетельством справедливости тезиса Чёрча—Тьюринга, как его теперь принято называть.

Впоследствии многие исследователи предлагали свои вычислительные модели в надежде расширить класс вычислимых функций, впервые описанный Чёрчем и Тьюрингом. Все такие попытки не привели к расширению этого класса, который оказался очень устойчивым. В настоящее время тезис Чёрча—Тьюринга — понимаемый в смысле любой из эквивалентных вычислительных моделей — является одним из краеугольных камней, на которых базируется теория алгоритмов.

Что касается лямбда-исчисления, то оно долгое время пребывало на обочине математической логики, будучи вытеснено из теории

алгоритмов более удобными и интуитивными моделями. Однако во второй половине XX века лямбда-исчисление и системы на его основе нашли серьёзные практические применения. Лямбда-исчисление Чёрча стало прообразом так называемых функциональных языков программирования (таких как современный язык Haskell), которые имеют ряд преимуществ по сравнению с традиционными императивными языками и в настоящее время очень активно развиваются.

Алгоритмически неразрешимые проблемы в математике. Вслед за *Entscheidungsproblem* с точки зрения теории алгоритмов были проанализированы и многие другие математические проблемы, поставленные как вопросы о построении того или иного алгоритма. Некоторые из таких трудных проблем, остававшихся открытыми десятилетиями, оказались алгоритмически неразрешимыми задачами.

Среди такого рода вопросов наиболее известна 10-я проблема Гильберта о распознавании разрешимости диофантовых уравнений. Диофантово уравнение — это уравнение вида $P(x_1, \dots, x_n) = 0$, где P — многочлен с целыми коэффициентами от переменных x_1, \dots, x_n . Требуется узнать по заданному многочлену P , существуют ли целые числа x_1, \dots, x_n , удовлетворяющие такому уравнению.

Вопрос Гильберта о построении общего алгоритма, работающего для всех диофантовых уравнений, с самого начала выглядел безнадёжным. С появлением теории алгоритмов исследователи стали предпринимать усилия в попытке доказать неразрешимость этой задачи. Промежуточные результаты в этом направлении получили американские логики Дж. Робинсон, М. Дэвис и Х. Патнэм, на их основе окончательное решение задачи было получено лишь в 1970 году ленинградским математиком Ю. В. Матиясевичем.

В наше время в математике алгоритмические вопросы занимают подобающее им важное место. Математическая логика научила нас тому, что далеко не всякий такой вопрос является разрешимым. Кроме того, даже если алгоритм решения той или иной задачи существует в принципе, не всегда можно говорить о его применимости на практике. Например, выполнение алгоритма может потребовать слишком много времени или памяти компьютера. Такого рода вопросами занимается отдельная область теории алгоритмов — теория сложности вычислений, о которой подробно рассказано в другой статье этого сборника (см. «Теория сложности», стр. 262).

Теоремы Гёделя и недоказуемые утверждения. Ещё одним открытием, сделанным гениальным австрийским логиком Куртом Гёделем в 1931 году, было явление неполноты аксиоматических систем. Знаменитые теоремы Гёделя о неполноте не только оказали большое

влияние на развитие математической логики и дали толчок к созданию теории алгоритмов, но и стали общекультурным явлением, затронувшим даже творчество писателей и художников. Гёдель был назван в числе ста наиболее влиятельных личностей XX века по версии журнала Тайм. Однако известность теорем Гёделя приводит и к тому, что часто они интерпретируются в слишком расширительном, метафорическом смысле.

Полными называют такие системы аксиом, в которых доказуемо или опровержимо любое утверждение того же языка (можно говорить о доказуемости в исчислении предикатов из данного множества аксиом). Понятно, что если мы хотим построить систему аксиом для той или иной области математики, нам бы хотелось, чтобы эта система была непротиворечивой и полной — неполнота означает, что мы «забыли» постулировать какие-то принципы, касающиеся базовых понятий данного языка, и нужно их добавить к списку аксиом.

Теоремы Гёделя относятся к классу аксиоматических систем, удовлетворяющих двум естественным и широким требованиям. Во-первых, необходимо, чтобы в рассматриваемом формальном языке по меньшей мере было выразимо понятие натурального числа и операции сложения и умножения. На первый взгляд это требование кажется весьма специальным, однако натуральные числа — один из базовых математических объектов, и языки, претендующие на формализацию значительной части математики, должны позволять о них говорить.

« Целые числа создал Господь Бог, всё
остальное — дело рук человеческих. »

(Леопольд Кронекер, 1886 год, Берлин.)

Во-вторых, должен существовать алгоритм, распознающий, является ли данный текст аксиомой рассматриваемой теории или нет. (Если аксиомы теории нераспознаваемы, то неясно, как можно строить доказательства в такой системе.)

Гёдель показал, что при выполнении этих требований любая система аксиом либо противоречива, либо неполна. Более того, для любой непротиворечивой системы можно явно указать предложение, касающееся арифметики натуральных чисел, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть в данной системе (такие утверждения принято называть *независимыми* от данной системы аксиом). В частности, это означает, что систему аксиом формальной арифметики нельзя никаким непротиворечивым образом «пополнить»: всегда найдутся независимые от неё арифметические утверждения. Это составляет содержание так называемой *первой теоремы Гёделя*.

Вторая теорема Гёделя говорит о том, что утверждение, выражающее непротиворечивость данной аксиоматической системы,

не доказуемо в самой системе, если эта система и в самом деле непротиворечива. Если считать, что стандартные математические методы укладываются в рамки аксиоматической теории множеств, то из этой теоремы следует, например, что стандартными математическими методами нельзя установить непротиворечивость теории множеств (и, тем самым, их собственную непротиворечивость).

Теоремы Гёделя позволили построить первые примеры независимых утверждений для сильных систем аксиом, таких как арифметика или даже теория множеств. После работ Гёделя такие примеры были обнаружены среди открытых проблем в различных областях математики. Одной из самых знаменитых открытых проблем в математике была *континуум-гипотеза Кантора*, в соответствии с которой всякое бесконечное подмножество множества вещественных чисел либо счётно (равномощно множеству натуральных чисел), либо континуально (равномощно множеству вещественных чисел). В 1938 году Гёдель сумел доказать, что эту гипотезу невозможно опровергнуть в теории множеств, а в 1961 году американский математик Пол Козн установил её недоказуемость.

Недоказуемые утверждения теоретико-множественной природы впоследствии были обнаружены в самых разных частях математики — в анализе, алгебре, топологии и др. Сравнительно недавно, в конце 1970-х годов, были найдены первые простые примеры утверждений из области конечной комбинаторики, независимые от аксиом формальной арифметики и даже от более сильных аксиоматических систем. Принципиальная разница с примерами типа континуум-гипотезы состоит в том, что комбинаторные примеры относятся к конечным и совершенно элементарным объектам, и их можно легко объяснить школьнику. Исследования в направлении поиска естественных примеров независимых утверждений активно ведутся и в наши дни.

Логика в других разделах математики. Наиболее впечатляющие достижения математической логики, описанные выше, так или иначе связаны с анализом трудных проблем, в том или ином смысле не имеющих решения. Такие проблемы в математике встречаются, по счастью, довольно редко. Для работающих математиков поэтому более ценным является вклад в копилку методов, годных для решения их собственных повседневных задач. Здесь мы упомянем некоторые известные приложения логики такого рода, хотя в целом следует признать, что их не слишком много.

Область математики, которая испытала на себе сильное влияние логических методов — это абстрактная алгебра. Соответствующее направление математической логики — теория моделей — возникло

в 1940-х годах в работах А. И. Мальцева в России и А. Тарского и А. Робинсона в США с прицелом на приложения в алгебре. Первые такие приложения были найдены в 1941 году А. И. Мальцевым, который осмыслил доказанную им (а ранее в более слабой форме Гёделем) теорему о компактности для логики предикатов как общий метод получения локальных теорем в алгебре. Оказалось, что методы универсальной алгебры и методы теории моделей весьма близки и понимание взаимосвязей обогатило обе дисциплины. Некоторые конструкции, впервые найденные в математической логике, стали стандартными в алгебре и анализе, например так называемая конструкция ультрапроизведения, придуманная польским логиком Е. Лосем.

Одним из ярких достижений теории моделей 1960-х годов стало создание *нестандартного анализа* Абрахамом Робинсоном. Он описал логическую конструкцию, которая позволила непротиворечиво рассматривать пополнение множества вещественных чисел бесконечно малыми и бесконечно большими числами. С помощью этой конструкции стало возможным дать объяснение исходной интуиции лейбницеvских «бесконечно малых» и дать технически простое и интуитивное построение основных результатов математического анализа. В дальнейшем эти методы были также использованы и для получения новых результатов.

Современное направление теории моделей, возникшее в работах 1980-х годов и активно развивающееся в наши дни, установило новые связи между логическими и алгебро-геометрическими методами. Пожалуй, наиболее впечатляющим достижением этого направления было доказательство Э. Хрушовским в 1996 году гипотезы Морделла—Ленга для функциональных полей в любой характеристике, которое было впервые получено в полной общности лишь с использованием методов теории моделей. Не вдаваясь в объяснения этой теоремы, отметим, что речь идёт о сильном результате, связанным с доказанной Г. Фальтингсом в 1984 году гипотезой Морделла о конечности числа рациональных точек на алгебраической кривой (из которой, в частности, вытекает конечность числа возможных решений уравнения Ферма $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$).

Методы теории доказательств — области математической логики, изучающей формальную доказуемость — также находят применения в «обычной» математике. Одним из успешных современных направлений является *proof mining*, извлечение конструктивных оценок из априори неконструктивных математических доказательств. Так называемые функциональные интерпретации, первоначально разработанные для анализа формальных систем, оказалось возможным применить и к конкретным содержательным математическим

результатам (например, из области вещественного анализа, где интересен вопрос о скорости сходимости того или иного процесса к неподвижной точке и требуется явная оценка этой скорости). Результаты, полученные логическими методами, часто дают совершенно неочевидные усиления исходных теорем.

Логика в компьютерных науках. Если применения математической логики в «обычной» математике достаточно редки, то роль логических методов в информатике и компьютерных науках намного выше. Здесь математическая логика даёт подходящий язык для изучения возникающих задач и набор общих подходов к их решению. Удивительным образом, иногда оказывается, что концепции, сформулированные в математической логике очень давно и с другими целями, обретают новую жизнь в конкретных прикладных областях. Расскажем о некоторых направлениях, в которых логика доказала свою эффективность.

Реляционные базы данных и языки запросов. Многомиллиардная индустрия баз данных связана с технологией хранения больших объёмов структурированных данных, извлечением из них полезной информации и её обновлением. Поиск информации в базе данных осуществляется пользователем на *языке запросов*, который позволяет найти среди большого массива данных нужные сведения, потратив на это не слишком много времени. Поэтому языки запросов должны сочетать в себе достаточную гибкость для формулировки запросов и одновременно обеспечивать возможность эффективного поиска информации.

В 1960-х годах американский учёный Т. Кодд понял, что самый обычный язык логики предикатов очень удобен для обеих целей, поскольку позволяет эффективно осуществлять поиск по запросу. Эффективность обеспечивается с помощью аппарата реляционной алгебры — языка операций над отношениями, разработанного до этого в математической логике (в школе Альфреда Тарского) как алгебраический эквивалент языка логики предикатов. Идея Кодда о том, что запросы на языке реляционной алгебры допускают эффективный поиск, была первоначальным стимулом в разработке реляционных баз данных и общеупотребительных в настоящее время языков запросов, таких как SQL. С тех пор теория баз данных и логических языков успешно развиваются рука об руку.

Верификация программ и протоколов. Задача верификации программ, протоколов, аппаратных средств является одной из наиболее трудных и практически важных в компьютерной индустрии. Под верификацией понимается доказательство корректности работы программы (протокола, процессорного чипа, и т. д.), т. е. соответствия

того, что реально делает программа, тому, что нам хотелось бы, чтобы она делала. Поскольку программа работает с входными данными, а вариантов входных данных может быть бесконечно много, мы не можем протестировать работу программы на всех возможных входах. На практике применяют методы тестирования, которые увеличивают вероятность обнаружения ошибок, однако полной гарантии надёжности всё-таки не дают.

Другой путь решения этой проблемы, также активно применяемый на практике, состоит в сведении рассматриваемой задачи к логическому вопросу о соответствии программы её формальной спецификации. Это предполагает формулировку требований к тому, что должна делать программа, на формальном языке *спецификаций* программ. (В качестве такого языка часто используется язык так называемой *темпоральной*, или *временной*, логики, одной из разновидностей модальных логик.)

Подход, называемый *model checking*, состоит в том, чтобы сопоставить программе граф, представляющий её возможные состояния и переходы между ними. Это позволяет свести задачу верификации программы к вопросу о выполнимости формулы, задающей спецификацию, в модели, представляющей программу. Для решения задачи проверки выполнимости формулы в данной модели разработаны эффективно работающие алгоритмы, что позволяет на практике верифицировать программы с большим числом состояний. Этот метод особенно хорошо себя зарекомендовал для верификации чипов.

Альтернативный подход, называемый *theorem proving*, состоит в том, чтобы сопоставить программе логическую формулу, выражающую её корректность, и искать формальное доказательство этой формулы — например, в исчислении предикатов. Этот подход на данный момент не так распространён на практике, как *model checking*, но продолжает развиваться. Успешность этого метода во многом зависит от эффективности работы *пруверов* — программ автоматического поиска формальных доказательств. Разработка такого рода систем активно ведётся в наши дни.

Теории типов и функциональное программирование. Парадигма функционального программирования сочетает в себе несколько базовых идей, первоначально возникших в математической логике.

Первая идея — это взгляд на функцию как на объект, к которому может применяться программа наряду с другими данными (аргументы функций в свою очередь могут быть функциями и т. д.). Функциональная программа в целом может рассматриваться как определение некоторой сложной функции, а исполнение программы — как процесс вычисления значения функции на данном аргументе, сводящийся к пошаговому упрощению (редукции) её определения.

Более привычный нам императивный стиль программирования, в традиции Тьюринга и фон Неймана, привязан к понятию состояния памяти компьютера, которое изменяется в результате применения команд, таких как присваивания переменным новых значений. Функциональные программы не предполагают явного хранения состояния вычисления, в них нет присваиваний, а функции больше соответствуют математическому пониманию функций, чем подпрограммы в императивном программировании, которые могут зависеть от внешних переменных и иметь побочные эффекты.

Эти особенности позволяют писать в функциональном стиле более прозрачный код, потенциально содержащий меньше ошибок. Кроме того, функциональные программы допускают хорошее распараллеливание, поскольку разные части определения функции могут быть вычислены независимо.

В последние годы функциональные языки занимают всё более важную нишу среди употребительных языков программирования и применяются в тех областях, где важно иметь надёжные программы, например, в банковской сфере. По существу, первым функциональным языком программирования было лямбда-исчисление, придуманное Чёрчем как простейшая универсальная вычислительная модель. Идеи лямбда-исчисления были затем воплощены в одном из первых действующих функциональных языков — языке LISP, а также во многих более современных языках вплоть до Ocaml и Haskell.

Другой ключевой идеей, идущей из математической логики, является идея *типа данных*, на которой основано подавляющее большинство языков программирования высокого уровня, не обязательно именно функциональных. Использование переменных и функций, которым приписан определённый тип (например, тип «число с плавающей точкой», или тип «массив целых чисел»), позволяет на уровне компиляции проводить контроль типов, что избавляет программы от значительного числа ошибок (связанных с несоответствием значения переменной типу). Развитие языков программирования идёт в сторону усовершенствования и усложнения системы типов, где контролю типов отводится всё большая роль.

Формальные языки с типами (в отличие от бестиповых языков, в которых все переменные имеют один и тот же тип) впервые возникли в фундаментальном труде Б. Рассела и А. Уайтхеда «Основания математики», целью которого было построение математики на основе непротиворечивой системы аксиом теории множеств. В математике эта система, однако, не прижилась и была заменена более простой бестиповой теорией множеств Цермело—Френкеля с аксиомой выбора.

В 1950-е годы в логике было обнаружено, что в достаточно развитых системах на базе лямбда-исчисления с типами последние ведут себя в точности как логические высказывания (языка интуиционистской логики), а функциональные программы — как формальные доказательства этих высказываний. Это явление, описанное здесь, разумеется, очень приблизительно, получило название *соответствия Карри—Говарда*. Через несколько десятков лет оно послужило основой для создания функциональных языков, в которых возможно написание программ с одновременной верификацией их кода. Наиболее известными языками такого рода являются Coq и Agda, созданные для формализации математических доказательств. В частности, именно на языке Coq удалось построить формальное доказательство гипотезы четырёх красок и ряда других трудных математических результатов. Эти же языки начинают применяться и для задач верификации программ, описанных в предыдущем пункте.

Этими тремя темами мы ограничим избранный список областей информатики, в которых на деле применяются результаты математической логики. Многие не менее важные темы при этом оказались не затронутыми: теория сложности вычислений, теория автоматов и монадическая логика, SAT-solving, языки авторизации и контроля доступа к информации, логическое программирование и хорнова логика, онтологические базы данных и дескрипционная логика — перечисление можно очень долго продолжать.

Завершая обзор, посмотрим на отдельные области гуманитарных наук, испытавшие на себе влияние методов математической логики. Выбранные нами предметы касаются философии, языкознания и даже теории права. Эти разнообразные темы объединены в одну группу, поскольку связаны с изучением явлений, требующих модификации тех или иных аспектов классической логики.

Неклассические логики. Первые логические системы, отличные от традиционной двузначной, стали появляться ещё в то время, когда процесс формализации классической логики предикатов не был завершён. К настоящему времени неклассические логики представляют собой большое царство, населённое самыми разнообразными и экзотическими представителями (исчисляемое десятками семейств). Мотивации при рассмотрении неклассических логик могут быть самыми разными: попытки точнее передать те или иные свойства естественного языка; попытки построить систему, отвечающую тем или иным философским установкам; попытки расширить язык классической логики новыми выразительными возможностями или, наоборот, сузить выразительные возможности классической логики с тем,

чтобы сделать её более эффективной для решения тех или иных задач. Проведём небольшую экскурсию по «зоопарку» неклассических логик.

Интуиционизм как философское течение возник в самом начале XX века в работах молодого нидерландского математика Л. Э. Я. Брауэра как реакция на кризис оснований математики и теории множеств. Характерной чертой философии Брауэра было желание избавить математику от неконструктивных теорем существования, т. е. утверждений о существовании тех или иных объектов, без возможности предъявить явно их конструкцию. Глубокий анализ привёл Брауэра к идее о том, что сама классическая логика, а именно закон исключённого третьего, является источником таких неконструктивных утверждений в математике. Это потребовало радикально пересмотреть традиционное понимание смысла математических утверждений, логических операций и кванторов.

Хотя сам Брауэр настаивал на неформальном характере своей философии математики — отсюда её название «интуиционизм» в противоположность гильбертовскому «формализму» — к началу 1930-х годов возникла потребность в уточнении совокупности логических принципов, приемлемых с интуиционистской точки зрения. Решение этой задачи было дано учеником Брауэра А. Гейтингом, который сформулировал общепринятую в настоящее время *интуиционистскую логику предикатов*, опираясь на предшествовавшую работу А. Н. Колмогорова. Парадоксально, но в результате интуиционизм был также поставлен на прочную формальную основу.

Несмотря на поддержку ряда выдающихся математиков, одним из которых был Герман Вейль, интуиционизм не стал преобладающей философией математики. В настоящее время трудно найти подлинных сторонников этой философии даже среди логиков. Тем не менее, с точки зрения формальной логики, интуиционизм представляет собой стройную и богатую содержательными результатами систему. С течением времени было осознано, что интуиционистская логика скрывается во многих математических структурах, в частности в структурах топологической природы. Например, было обнаружено, что возникшее в работах А. Гротендика понятие топоса можно рассматривать как модель интуиционистской логики.

С другой стороны, интуиционистская логика часто возникает в различных приложениях в компьютерных науках. Это не случайно, поскольку интуиционистская логика теснее связана с понятием вычисления, чем логика классическая. Одним из важнейших проявлений этой связи является уже упомянутое соответствие Карри—Говарда.

Классическая логика допускает интерпретацию в логике интуиционистской, поэтому современная точка зрения на их соотношение

состоит в том, что интуиционистская логика не ограничивает, а, наоборот, добавляет в классическую новые выразительные возможности — такие как различие между неконструктивным и конструктивным утверждением о существовании.

Модальная логика. Другим классом логик, обогащающих классическую новыми выразительными возможностями, являются так называемые модальные логики. Язык модальной логики, наряду с обычными связками, содержит новую одноместную логическую связку \Box . Высказывание $\Box A$ в разных контекстах может пониматься совершенно по-разному, что приводит к разным постулируемым принципам, т. е. разным модальным логикам. Стандартные логические связки, такие как импликация или отрицание, как правило, сохраняют в модальной логике классическую интерпретацию. (Разумеется, могут рассматриваться модальные логики и над другими логиками, например над интуиционистской, однако такие системы в целом сложнее и потому менее распространены.)

Исторически первым, идущим ещё от Аристотеля, прочтением формулы $\Box A$ было высказывание « A необходимо». (Здесь мы говорим о языковой конструкции, присутствующей в нашем естественном языке, а не о каком-либо математическом понимании того, что значит «необходимо».) Двойственное высказывание «не A не является необходимым» обычно отождествляется с высказыванием « A возможно» и обозначается $\Diamond A$.

Перечислим некоторые известные интерпретации модальности, приводящие к интересным и полезным семействам логик.

Логика доказуемости: $\Box A$ означает « A доказуемо» в данной аксиоматической теории, например в теории множеств. При этом высказывания понимаются как высказывания в языке теории множеств, каковым можно считать и само высказывание о доказуемости утверждения A . Эта логика интересна тем, что даёт точную математическую семантику модальности и применяется для исследования обычных классических аксиоматических теорий.

Временная логика, описывающая развитие некоторого процесса во времени: $\Box A$ означает «всегда в будущем будет верно A ». Различные модели течения времени — непрерывное, дискретное или даже ветвящееся — приводят к разным временным логикам. Временные логики, применяемые на практике для верификации программ, используют и некоторые дополнительные связки, например двухместную связку, выражающую « A имеет место до тех пор, пока B ».

Эпистемическая логика, описывающая знания и обмен информацией между несколькими агентами: $\Box_x A$ означает «агенту x известно A » (в этой логике, как правило, описываются знания нескольких

агентов x, y, \dots и каждому из них соответствует своя модальность \Box_x, \Box_y, \dots). Эпистемическая логика является частью (формальной) эпистемологии — обширного и важного раздела философии, занимающегося исследованием таких понятий, как знание и вера, того как знание возникает, как оно связано с понятием доказательства (обоснования). Формализм эпистемической логики позволяет построить модели различных аспектов этих явлений и использовать их для анализа тех или иных теоретических положений.

Эпистемическая логика также находит более конкретные применения в компьютерных науках и искусственном интеллекте для описания знания, возникающего в системах с несколькими агентами. Например, условие корректности протокола, связанного с обменом информацией, в котором не должна допускаться утечка информации третьим лицам, может быть сформулировано на языке эпистемической логики.

Деонтическая логика формализует модальности типа долженствования, например $\Box A$ можно понимать как « A требуется» или « A обязательно» (двойственную модальность можно понимать как « A разрешено»). Такие логики впервые стали рассматриваться в философии и теории права для формализации и анализа различных аспектов правовых систем.

Многозначная логика и нечёткая логика. Многозначные логики возникают, если допускаются другие истинностные значения, помимо классических истины 1 и лжи 0. Например, можно рассматривать промежуточное значение $1/2$ и интерпретировать его как «неизвестно». Следующий шаг требует определения того, каким образом вычисляются значения логических связок, и конкретное решение по этому поводу может привести к различным логикам.

Если пойти дальше по пути многозначности, то естественно возникает идея о том, что истинностным значением высказывания может быть любое вещественное число в интервале $[0, 1]$ (например, это число может выражать степень нашей уверенности в справедливости высказывания). Такие логики часто называют «нечёткими» (fuzzy), поскольку предикаты в такой системе могут выглядеть как размытые, не имеющие чётких границ. Например, высказывание о том, что видимый цвет является красным, не является чётким в силу неопределённости самого понятия «красный».

Нечёткие логики призваны формализовать рассуждения в условиях неопределённости или неточности информации. Подлинным «отцом» нечёткой логики и теории нечётких множеств был Л. Заде. Он увидел потенциал этой логики для различных инженерных применений, например в такой области, как экспертные системы или теория управления, и сделал очень много для её популяризации.

Немонотонная логика. Классическая логика обладает очевидным свойством монотонности: добавление новых аксиом не отменяет никаких ранее доказанных теорем. В работе с базами данных, где не вся содержащаяся информация может быть верной, появление новой информации может привести к пересмотру уже известных фактов и их отмене. В этом случае свойство монотонности нарушается.

Аргументы и доказательства, приводимые в суде, могут быть оспорены или опровергнуты противной стороной. Процесс выстраивания аргументов, таким образом, на практике выглядит совершенно непохоже на привычные нам дедуктивные математические доказательства. Эти аспекты изучает *теория аргументации* — весьма развитая область исследований, связанная с философией, лингвистикой, теорией права и искусственным интеллектом. Формальные модели аргументации во многих случаях базируются на немонотонных логиках.

Паранепротиворечивая логика. Как известно, в классической логике действует закон *ex contradictio quodlibet*, т. е. из противоречия следует всё что угодно. Поэтому противоречивые классические системы все эквивалентны между собой и, по существу, бесполезны. На практике людям приходится рассуждать в не столь стерильных условиях: не всегда бывает известно, есть ли противоречие в имеющейся информации, на основании которой приходится делать выводы. Логика, приспособленные для рассуждений в условиях возможно противоречивых предположений, называются паранепротиворечивыми. В таких системах возникновение противоречия не приводит к доказуемости всех вообще утверждений.

Можно сказать, что наша обыденная логика (как способ умозаключений на основе имеющейся информации) является одновременно нечёткой, паранепротиворечивой и немонотонной. Разумеется, все эти формальные системы являются лишь приближёнными и грубыми моделями отдельных аспектов той самой «обыденной логики».

Грамматики Хомского и семантика Монтегю. Одной из теорий, соединивших в себе сразу несколько аспектов неклассических логик — кванторы, предикаты, модальности, модели Крипке и лямбда-абстракцию — является семантика Монтегю. Эта теория, предложенная американским логиком Р. Монтегю в начале 1970-х годов, представляет собой попытку применить идеи математической логики к трудной задаче описания семантики естественного языка. Она, по существу, положила начало целому направлению в математической лингвистике — формальной семантике. Ранее работы Н. Хомского, создавшего теорию формальных грамматик, произвели революцию в понимании синтаксиса естественных языков. Применения

математической логики в лингвистике, из которых мы вскользь упомянули лишь два важных направления, безусловно заслуживают отдельного разговора.

Неужели это всё математика? — недоумённо воскликнет читатель. И да, и нет. Исследователи, применяющие методы математической логики в той или иной области знания, должны прежде всего быть компетентными специалистами именно в этой области и разбираться в постановках специфических для неё задач. Напомним, что многие создатели математической логики — Гёдель, Тьюринг, фон Нейман и др. — не были только лишь «чистыми» математиками.

Тем не менее, используемый в приложениях логический аппарат является самым настоящим математическим аппаратом, даже если он и совсем не похож на ту математику, которой традиционно обучают на математических факультетах университетов. Вопросы, связанные с неклассическими логиками — например, вопросы их полноты относительно семантики Крипке или топологической семантики, вопросы классификации различных семейств неклассических логик — имеют существенную математическую составляющую. Для успешной работы в философской логике, математической лингвистике, теории игр, теории баз данных и других областях приложений этой математикой также нужно овладеть. К счастью, порог входа здесь не так уж высок, и математическую логику с успехом преподают на факультетах компьютерных наук, философии и лингвистики.

Математически наиболее развитые части математической логики — такие, как теория множеств, теория алгоритмов и сложности вычислений, теория моделей или ординальный анализ формальных систем, содержат некоторые из наиболее сложных с математической точки зрения результатов и применяемых методов. Разумеется, современные исследования в этих давно сложившихся областях целиком и полностью лежат в области математики.

Теория сложности

Разнообразные алгоритмы для решения самых различных задач повсеместно встречаются как в науке и технике, так и в обыденной жизни (хотя в последнем случае они всё чаще и чаще находятся «под капотом» и рядовому пользователю видны плохо). Некоторые из них, включая наиболее важные, упоминаются в настоящем сборнике. В этой статье мы поговорим об общей дисциплине, которая занимается изучением эффективности или, если угодно, качества алгоритмов вне зависимости от их вида и происхождения.

Прежде всего надо договориться о классе изучаемых объектов, т. е. собственно алгоритмов. Единого мнения на этот счёт нет. Само слово «алгоритм» происходит от имени великого персидского учёного аль-Хорезми, в IX веке описавшего правила обращения с позиционной системой счисления (любопытно, что слово «алгебра» происходит из того же сочинения). После этого в течение долгого времени под алгоритмами понималось искусство и правила счёта; алгоритмы, оперирующие с целыми или рациональными числами мы будем называть *числовыми*. Следующей ступенью общности являются алгоритмы, работающие с произвольными дискретными данными: графами, массивами, текстами, расписаниями и т. д. Это *алгоритмы в строго математическом смысле этого слова*. Они были определены и впервые изучены в работах великих математических логиков прошлого столетия, таких, как К. Гёдель, А. А. Марков, П. С. Новиков, А. Тьюринг, А. Чёрч, создавших строгую *теорию вычислимости*, и это именно тот класс алгоритмов, который используется в современных устройствах. Наконец, алгоритмы можно понимать и в наиболее широком смысле, как набор конкретных и полностью определённых правил, выполнение которых позволит добиться поставленной цели за конечное время.

Основное положение теории сложности алгоритмов, грубо говоря, состоит в том, что не все алгоритмы равны с точки зрения их практической пригодности, причём эти различия могут относиться не только к алгоритмам, стоящим на разных ступеньках лестницы, обрисованной в предыдущем абзаце, но даже к алгоритмам для одной и той же задачи. Более того, «качество» алгоритмов можно *измерять* некоторой «функцией сложности», что, собственно, и приводит к строгой математической теории.

Мы попытаемся проиллюстрировать её основные идеи на простом модельном примере. Рассмотрим задачу нахождения *наиболь-*

шего общего делителя $\text{НОД}(a, b)$ натуральных чисел a и b ($a < b$), т. е. наибольшего возможного d такого, что как a , так и b делится на d . Эта школьная задача и её обобщения (скажем, на случай многочленов) возникают везде, где применяется теория чисел, в первую очередь — в криптографии. Как её решать? Возможны несколько подходов.

Первый алгоритм (совсем примитивный). Перебираем все числа от a до 1 в порядке убывания (т. е. начиная с a), пока не натолкнёмся на нужное.

Второй алгоритм (после некоторого раздумья). Давайте лучше последовательно делить a на 2, 3, 4, и пробовать $a/2$, $a/3$, $a/4$ (имеется в виду, что если a/k не является целым, мы его пропускаем, а если оно целое, пробуем поделить на него b) и т. д., пока не доберёмся примерно до \sqrt{a} . Если нам повезло (а это заведомо случится при $\text{НОД}(a, b) \geq \sqrt{a}$), то хорошо, а если нет, то переходим к первому способу, но на этот раз начиная с \sqrt{a} , а не с a .

Третий алгоритм (для математически продвинутых). Разложим a и b на простые множители: $a = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_k^{d_k}$ и $b = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ (некоторые степени здесь могут быть нулевыми). Тогда наибольший общий делитель вычисляется по нехитрой формуле

$$d = p_1^{\min(d_1, e_1)} p_2^{\min(d_2, e_2)} \dots p_k^{\min(d_k, e_k)}.$$

Для того, чтобы разумным способом сравнивать различные подходы, очевидно, нужна некоторая общая «линейка» (или «мера»). Можно пытаться использовать в качестве меры просто число сделанных попыток, тогда сразу видно, что в наихудшем случае первому алгоритму понадобится порядка a попыток, в то время как второму — порядка $2\sqrt{a}$, что уже является ощутимым прогрессом. Но как их сравнивать с третьим алгоритмом, использующим совсем другие (и более продвинутые) идеи?

Ситуации, когда хорошие алгоритмы движутся к цели окольными путями, встречаются сплошь и рядом; собственно для их анализа теория алгоритмов и существует. Поэтому понятно, что искомая линейка должна быть универсальной и пригодной для любого алгоритма, независимо от выбранного им пути решения задачи. Оказывается, что даже если нас интересуют только теоретико-числовые задачи типа нашего модельного примера, дать работоспособное определение их сложности полностью в терминах чисел затруднительно — слишком много разных идей и красивой математики вовлечено в уже имеющиеся алгоритмы. Многие из них

даже не являются числовыми в нашем смысле, т. е. используют для своей работы объекты другой природы.

По этой причине универсальная мера может быть введена лишь на следующей ступени общности в рамках классической теории вычислимости, и по-научному она называется *числом тактов работы машины Тьюринга* — абстрактного вычислительного устройства, предложенного великим британским математиком А. Тьюрингом в 1936 году. На интуитивном уровне это число *элементарных* (т. е. далее неразложимых) шагов, которые требуется предпринять для достижения поставленной цели. В случае классической машины Тьюринга это операции совсем примитивные: сдвинуться по вычислительной ленте на одну позицию влево или вправо, прочесть или перезаписать обозреваемый символ и т. д. Но читатель, немного знакомый с программированием, может без особого ущерба для понимания предполагать, что мы подсчитываем число *выполнений* инструкций, содержащихся в программе, за всё время её работы. Именно число выполнений, а не число самих инструкций — последнее приводит к так называемой *колмогоровской сложности*, которую мы здесь не рассматриваем.

Поговорим теперь немного о роли случая. Если мы станем применять наши алгоритмы к $a = 54\,284\,452$, $b = 67\,855\,565$, то скажется это на их работе по-разному. Первый и третий спецификации a и b просто не заметят, и будут работать со своей обычной производительностью, а второй алгоритм выдаст правильный ответ $\text{НОД}(a, b) = 13\,571\,113$ с третьей попытки. Означает ли это, что он однозначно лучше?

Строго математический ответ на этот вопрос дать невозможно. Всё зависит от того, насколько часто исключительно хорошие или исключительно плохие примеры встречаются в интересующем нас в данный момент конкретном приложении. Хрестоматийным примером служит симплекс-метод, используемый (насколько автору известно) во всех современных пакетах *линейного программирования* для решения оптимизационных задач. Здесь ситуация строго обратная (в сравнении с приведённым примером для второго алгоритма): исключительно плохие примеры для симплекс-метода известны, но для их построения надо хорошо постараться, и на практике они не замечены.

Наиболее математический подход к анализу алгоритмов состоит, конечно, в том, чтобы не полагаться на случай и наличие исключительно хороших примеров просто игнорировать. Он называется *теорией сложности в наихудшем случае* (или иногда *гарантированной сложностью*). Со всеми сделанными оговорками такой подход

оказывается вполне качественной и адекватной моделью в большинстве интересных ситуаций — проколы типа симплекс-метода (т. е. когда сложность в наихудшем случае определяется исключительно плохими примерами) можно пересчитать на пальцах одной руки. Требовать от математической модели бóльшего просто неразумно.

Чтобы разобраться, в чём же этот подход состоит, заметим, что наиболее важная и универсальная информация о числе — это количество знаков в его записи (n). Скажем, в нашем примере $n = 8$, если запись десятичная и $n \approx 25$, если она двоичная — отличие чуть больше, чем в три раза. Конечная цель разработчиков алгоритмов — построить алгоритм, который гарантированно решает задачу за $f(n)$ элементарных шагов, независимо от того, какие именно n -разрядные числа ему даны (где f — некоторая функция, желательно медленно растущая). Подчеркнём, что n — именно число знаков в записи числа, а не само это число; чтобы почувствовать разницу, достаточно заметить, что число, выражающее число атомов в видимой части Вселенной вполне уместается на одной строке, хотя и убогим почерком.

Разберём ещё раз с этой точки зрения алгоритмы для нашего модельного примера. Первому алгоритму в худшем случае понадобится порядка $f(n) \approx 10^n$ элементарных операций. Это произведение числа попыток на число операций, необходимых для каждой из них, но поскольку для этого требуются лишь простые арифметические действия (впрочем, как вытекает из статьи «Быстрая арифметика» (стр. 166), даже для них ситуация не настолько проста, насколько кажется), второй множитель оказывается небольшим полиномом от n , и по сравнению с экспоненциальными функциями им вполне можно пренебречь. Знак приближённого равенства \approx вызван именно этим обстоятельством. Вторым алгоритм в наихудшем случае (хорошее упражнение — попытаться понять, в каком) потребует $f(n) \approx 10^{n/2}$ операций, так что он в самом деле слегка лучше первого. Намного поучительнее ситуация с третьим алгоритмом. Понятно, что его успех в первую очередь зависит от следующего вопроса: насколько быстро мы умеем раскладывать числа на простые множители?

Этот вопрос занимал математиков с античных времён, за тысячелетия до того, как предположение о том, что эффективного способа решения задачи о разложении на простые множители не существует, легло в основу большинства используемых в современном мире криптосистем. Глубоко вдаваться в этот вопрос у нас, к сожалению, возможности нет (данная тема заслуживает отдельной

статьи), поэтому отметим лишь, что наилучший из известных сегодня алгоритмов в наихудшем случае работает за время $f(n) = 10^{Cn^{1/3}(\log_2 n)^{2/3}}$, где $C > 0$ — не слишком большая константа. Это уже существенно лучше в сравнении с $f(n)$ для первого и второго алгоритмов, но функция всё равно растёт экспоненциально быстро.

Давайте ещё немного поразмышляем над третьим алгоритмом. По своему виду он является *сведением* одной задачи к другой, а именно, задачи нахождения наибольшего общего делителя к задаче разложения чисел на простые множители. Это означает, что любой прогресс в решении второй задачи автоматически влечёт равнозначный прогресс в решении первой. Как мы увидим ниже, общее понятие сводимости одной задачи к другой играет исключительно важную роль в теории сложности алгоритмов. В программистских терминах оно соответствует понятию *процедуры* или *подпрограммы*; надо, правда, ещё позаботиться о том, чтобы процедура вызывалась «не слишком часто» (в случае третьего алгоритма — два раза) и для «не слишком» больших значений параметров (в нашем случае это просто исходные данные a и b).

В том, что касается нахождения наибольшего общего делителя, пора переходить к развязке, многими читателями, по-видимому, давно ожидаемой. «Начала» великого древнегреческого математика Евклида (около 300 года до н. э.) по праву считаются одной из величайших книг в истории человечества, в которой были заложены основы современной геометрии (термины «евклидово пространство», «евклидова метрика» и др. восходят к тексту «Начал»), и во многом всей современной математики вообще. Гораздо менее известно, что книга VII содержит описание старейшего из дошедших до нас алгоритмов, который к тому же активно используется и сегодня.

Алгоритм четвёртый и последний (алгоритм Евклида). Разделим b на a с остатком: $b = h \cdot a + r$, где $0 \leq r \leq a - 1$. После этого рекурсивно применяем алгоритм к паре (r, a) : делим a на r , $a = u \cdot r + s$ и заменяем пару (r, a) на (s, r) . Продолжаем действовать, пока не доберёмся до пары вида $(0, d)$. Второе число в полученной паре и будет искомым ответом.

Почему этот алгоритм работает правильно? И, даже если так, почему он работает быстро? Ответами на вопросы такого рода (когда они не вполне очевидны, конечно) занимается специальный раздел теории сложности, называемый *анализом алгоритмов*. Алгоритм Евклида работает правильно, потому что $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(r, a) =$

$= \text{НОД}(s, r) = \dots$ Тем самым, наибольший общий делитель является, как любят говорить математики, *инвариантом* данной процедуры (сравните со статьёй «Игра в „15“», стр. 148), а для заключительной пары $(0, d)$ он как раз и равен d . Быстро он работает потому, что всегда имеет место соотношение $(a + r) \leq \frac{2}{3}(a + b)$. Поэтому сумма чисел в паре убывает экспоненциально и, в частности, алгоритм заведомо сойдётся за $f(n) \approx 10n$ итераций, что является *линейной* функцией от числа знаков n в записи a и b . Результат оказывается настолько впечатляющим по сравнению с нашими предыдущими подходами, что их можно было бы смело отнести к разряду исторических курьёзов, если бы не то обстоятельство, что алгоритму Евклида уже порядка 2500 лет... Учитывая его простоту и эффективность, алгоритм Евклида и его обобщения широко используются в наши дни, как в теоретической математике, так и в приложениях, преимущественно в криптографии.

Фундаментальным отличием функции $10n$ от всех встречавшихся нам ранее является тот факт, что она *полиномиальная* (т. е. имеет вид $C \cdot n^d$ для некоторых $C, d > 0$), а не экспоненциальная. В современной теории сложности алгоритмы с такой оценкой сложности (в наихудшем случае) называются *полиномиальными*, а класс всех задач, которые допускают *хотя бы один* полиномиальный алгоритм, имеет преднамеренно лаконичное название «Р». В этих терминах алгоритм Евклида устанавливает, что задача нахождения наибольшего общего делителя двух чисел лежит в классе Р.

Класс Р обычно отождествляется с классом всех задач, обладающих эффективным решением в практическом смысле этого слова. Подчеркнём, что речь идёт о математической абстракции, не претендующей (и никогда не претендовавшей) на абсолютно точное описание реальности.

Класс Р также крайне удобен с математической точки зрения, и это вытекает из того нехитрого замечания, что при перемножении двух полиномов или подстановке одного полинома в другой всё равно получится полином. Скажем, при анализе наших предыдущих алгоритмов мы писали « $f(n) \approx$ » чтобы различать число «попыток» (или итераций) и число «элементарных операций». Однако все арифметические действия заведомо выполнимы за полиномиальное время (см. «Быстрая арифметика», стр. 166), поэтому при исследовании принадлежности классу Р этой разницей можно пренебречь и сосредоточиться на том, что на самом деле важно, т. е. на *числе* итераций. Такие ситуации встречаются сплошь и рядом.

Ещё одним выражением этой замечательной инвариантности является то обстоятельство, что класс P не зависит от выбора вычислительной модели. У использующих $C++$ и Basic (и даже предпочитающих FORTRAN или, совсем по классике, машины Тьюринга) класс P один на всех. Предположение о том, что так будет всегда, для любого разумного вычислительного устройства, известно, как *расширенный тезис Тьюринга—Чёрча*.

Полиномиальные алгоритмы (во многих случаях весьма нетривиальные) существуют для многих естественных задач. Элементарные арифметические операции в этой связи уже упоминались ранее; с их более тонкой градацией внутри класса P можно познакомиться в статье «Быстрая арифметика» (стр. 166). Алгоритм Евклида даёт полиномиальный алгоритм для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел (кстати, как насчёт наименьшего общего кратного?). «Исключительно плохие» примеры для симплекс-метода означает: примеры, на которых он работает экспоненциальное время. Первый по-настоящему полиномиальный алгоритм для линейного программирования был впервые построен советским математиком Л. Хачияном в 1979 году.

Перелистаем настоящий сборник.

Многие важные задачи для транспортных потоков (см. «Математика транспортных потоков», стр. 18) допускают полиномиальные алгоритмы.

Алгоритмы, связанные с Интернетом («Математика интернета», стр. 16) являются алгоритмами лишь в широком смысле, так как сами задачи по своей сути динамические и распределённые. О них мы поговорим немного позже, пока лишь отметим, что полиномиальность здесь является требованием заведомо необходимым, но никак не достаточным. Имеющие дело с «большими данными» (big data) обычно настаивают на *линейных* алгоритмах, т. е. таких, для которых $f(n) \leq Cn$.

Все алгоритмы, используемые в криптографии («О применениях математики в криптографии», стр. 36) — полиномиальные. Это, впрочем, довольно редкий пример, базирующейся одновременно как на существовании эффективных алгоритмов (для легитимного пользователя), так и на предположении о несуществовании таковых (в случае противника).

Алгоритмы, используемые для сжатия информации, также являются полиномиальными. Борьба идёт за улучшение скорости кодирования и декодирования внутри класса P — как и в случае «больших данных», разница между линейными и, скажем, квадратичными алгоритмами оказывается весьма ощутимой.

Простой алгоритм для существования эйлера цикла из статьи «От прогулок по Кёнигсбергу до реконструкции генома» (стр. 13) — полиномиальный. Про парную задачу нахождения гамильтонова цикла мы поговорим чуть позже.

«Игру в „15“» (стр. 148) можно легко обобщить до «игры в „ n^2-1 “» для произвольного натурального n . Существует (скорее всего — строго это утверждение автор не проверял!) полиномиальный относительно n алгоритм, позволяющий для двух чётных позиций указать путь, переводящий одну в другую. Кстати, эта задача легко сводится (в нашем смысле) к своему частному случаю, когда одна из позиций является полностью упорядоченной; может ли читатель понять, как именно?

Ещё одна задача, которая занимала математиков на протяжении тысячелетий — это задача определения простоты числа. Хотя «почти полиномиальные» алгоритмы (скажем, *вероятностные* алгоритмы, которым разрешается подбрасывать монетку и ошибиться в ответе с малой вероятностью) были известны довольно давно, полиномиальный алгоритм в строгом смысле этого слова был построен лишь в 2002 году. Это открытие вызвало огромный резонанс как среди математического сообщества, так и за его пределами.

По-видимому, у ряда читателей в этот момент должно возникнуть лёгкое недоумение: а в чём собственно разница между тестированием простоты и разложением на простые множители? Не одно ли это и то же?

Оказывается, что нет, и в этом проявляется существенное и довольно тонкое различие между *конструктивными доказательствами* и *чистыми доказательствами существования*. Скажем, многие из «почти полиномиальных» алгоритмов (с окончательным алгоритмом тестирования простоты ситуация чуть сложнее, но принцип тот же) в качестве доказательства того, что число m составное, выдадут контрпример к малой теореме Ферма, т. е. такое a , что $a^{m-1} \neq 1$ в арифметике по модулю m . Можно ли из этого доказательства извлечь *фактическое* разложение m на простые множители? Ответ на этот вопрос неизвестен, положительный ответ в виде полиномиального алгоритма привёл бы к весьма ощутимым изменениям в современной цивилизации, во многом основанной на вере в то, что криптографические системы типа RSA являются устойчивыми.

Давайте и мы попробуем наши скромные силы в задаче о разложении на простые множители. Как мы уже отмечали (третий алгоритм), задача нахождения НОД двух чисел сводится к задаче факторизации (разложения на простые множители), а алгоритм

Евклида делает это сведение ненужным с практической точки зрения. Математика, однако, развивается по своим собственным законам, и тот факт, что какие-то подходы или результаты оказываются «устаревшими» (учитывая почтенный возраст алгоритма Евклида, данное слово здесь, конечно, весьма условно) совершенно не означает, что заложенные в них идеи также оказываются бесполезными. В данном случае естественно попытаться поступить наоборот и использовать алгоритм Евклида для того, чтобы раскладывать числа на множители. Ведь для того, чтобы отыскать нетривиальный делитель составного числа m (кстати, понятно ли, почему задача полной факторизации сводится к этой?), достаточно «всего лишь» разыскать такое n , для которого $1 < \text{НОД}(m, n) < m$, после чего можно воспользоваться (эффективным!) алгоритмом Евклида.

Конечно же, в общем виде такую задачу мы решать не умеем. Тем не менее оказывается, что эта идея не настолько бесперспективна, как может показаться с первого взгляда. А именно, такой подход к факторизации лежит в основе:

- 1) некоторых важных «криптоаналитических» алгоритмов (т. е. алгоритмов, ищущих уязвимые места в криптографических системах с открытым ключом);

- 2) полиномиального *квантового* алгоритма для факторизации чисел, придуманного американским математиком П. Шором в 1995 году.

На последнем результате стоит остановиться подробнее, так как он дал мощный толчок к развитию огромной современной области, называемой *квантовыми вычислениями*, в которой бок о бок трудятся математики, специалисты в области теоретической информатики и физики. Никакого подвоха здесь нет: компьютер, который в состоянии использовать законы квантовой механики, в самом деле может разлагать n -разрядные числа на простые множители за время, чуть большее Cn^2 . Кстати, сам алгоритм использует весьма красивую и неожиданную математику: применение в самом конце алгоритма Евклида оказывается лишь верхушкой айсберга.

Внимательный читатель, видимо, в этот момент должен слегка удивиться: выше упоминалось, что класс P не зависит от выбора вычислительной модели, и вдруг мы предъявляем устройство, пусть даже пока и гипотетическое, которое вдруг оказывается в состоянии делать такие замечательные вещи. Никакого подвоха здесь нет также. Именно, мир, в котором мы живём, устроен одним из трёх следующих способов:

- 1) построение практичного квантового компьютера невозможно (и, тем самым, эта модель приравнивается к «неразумным»);

2) расширенный тезис Тьюринга—Чёрча неверен (и, видимо, возможны отклонения от него, использующие и другие физические или биологические законы);

3) для факторизации чисел существует *классический* полиномиальный алгоритм (со всеми вытекающими отсюда последствиями).

Мы просто пока не знаем, как именно устроен наш мир. К этому можно лишь добавить, что в мире № 1 невозможность построения квантового компьютера должна, скорее всего, определяться пока непонятными фундаментальными, а не технологическими препятствиями: как показывает опыт человеческого развития, при наличии достаточной воли (а в построение квантового компьютера вкладываются весьма значительные средства во многих развитых странах), последние рано или поздно преодолеваются. Так что популярный тезис о заведомой беспроигрышности этой деятельности (на выходе — или квантовый компьютер или новые физические законы, объясняющие невозможность его построения) по крайней мере не лишён некоторых оснований.

Теперь мы немного поговорим о *проблеме нижних оценок* в теории сложности вычислений, а именно, *доказательстве* того, что для конкретных интересных задач *любой* алгоритм должен иметь сложность $f(n) \geq \varepsilon \cdot b(n)$, где $b(n)$ — некоторая фиксированная функция. Вершиной здесь было бы доказательство того, что какая-нибудь интересная задача не принадлежит классу P , т. е. не допускает никакого алгоритма с верхней оценкой сложности $f(n) \leq Cn^k$ (о перспективных кандидатах мы поговорим позже). Возьмём для примера задачу факторизации. Красной нитью через наше изложение проходил тезис о том, что задача факторизации чисел не лежит в P , причём, в отличие от тезиса Тьюринга—Чёрча, это *математическое* предположение. Количество человеко-часов, потраченное на его опровержение (в том числе и часов, относящихся к наиболее сильным специалистам по теории чисел и алгоритмам) не поддаётся никакому исчислению. Означает ли это, что нам следует просто принять его за некий физический закон и заняться чем-то ещё?

Конечно же, для любого работающего математика этот вопрос чисто риторический и может в лучшем случае вызвать лёгкую улыбку. Тот факт, что на протяжении весьма долгого времени никто не был в состоянии предъявить нетривиальное решение уравнения $x^n + y^n = z^n$ или трёхмерное многообразие с «дикими» свойствами (контрпример к гипотезе Пуанкаре), математиков в поиске *доказательства* соответствующих утверждений только раззадоривал,

и совсем не напрасно. В процессе их решения с кульминацией, наступившей в работах Э. Уайлса и Г. Перельмана, соответственно, были созданы целые стройные теории, занявшие своё достойное место в здании современной математики.

Точно так же обстоит дело и с проблемой нижних оценок сложности, с той разницей, что она в настоящий момент остаётся широко открытой, хотя ряд обнадеживающих результатов и был получен в 80-е и 90-е годы XX века. По-видимому, для её полного решения потребуются некоторые, пока неизвестные идеи (впрочем, по сравнению, скажем, с теоремой Ферма или гипотезой Пуанкаре, проблема нижних оценок сложности находится в младенческом возрасте). Причину такого положения дел понять легко. Любое доказательство несуществования эффективного (скажем, полиномиального) алгоритма для данной задачи должно непременно учитывать не только все уже существующие идеи для построения такого алгоритма, но также и все потенциальные идеи, которые могут появиться в будущем: в этом, собственно, и состоит смысл теории сложности. Этот класс идей весьма широк, и большинство известных частных результатов по проблеме нижних оценок получаются как раз путём его сужения.

В заключение нашего краткого очерка следует рассказать про NP-полноту: это именно тот раздел, в котором успехи теории сложности вычислений уже оказываются весьма впечатляющими. Основы теории NP-полноты были заложены в работах американских математиков С. Кука, Р. Карпа и советского математика Л. Левина в начале 70-х годов.

Давайте ещё раз взглянем на задачу нахождения нетривиального делителя составного числа и сравним её с двумя другими задачами из данного сборника: нахождения гамильтонова цикла («От прогулок по Кёнигсбергу до реконструкции генома», стр. 13) и решения sudoku («Разгадывание sudoku», стр. 156); последнюю, конечно, надо обобщить на случай таблицы $n^2 \times n^2$. Что между ними общего?

На «философском» уровне понятно, что решение всех таких задач разбивается на два совершенно неравноценных этапа: поиск или угадывание правильного ответа и его проверка. Последнюю во всех случаях провести легко и можно поручить компьютеру или даже школьнику. Насчёт того, как правильный ответ найти, никаких общих рецептов у нас нет, а в лучшем случае есть лишь разумные советы, иногда называемые *эвристиками* (смотри, например, «Разгадывание sudoku», стр. 156). Хорошо, однако, то, что

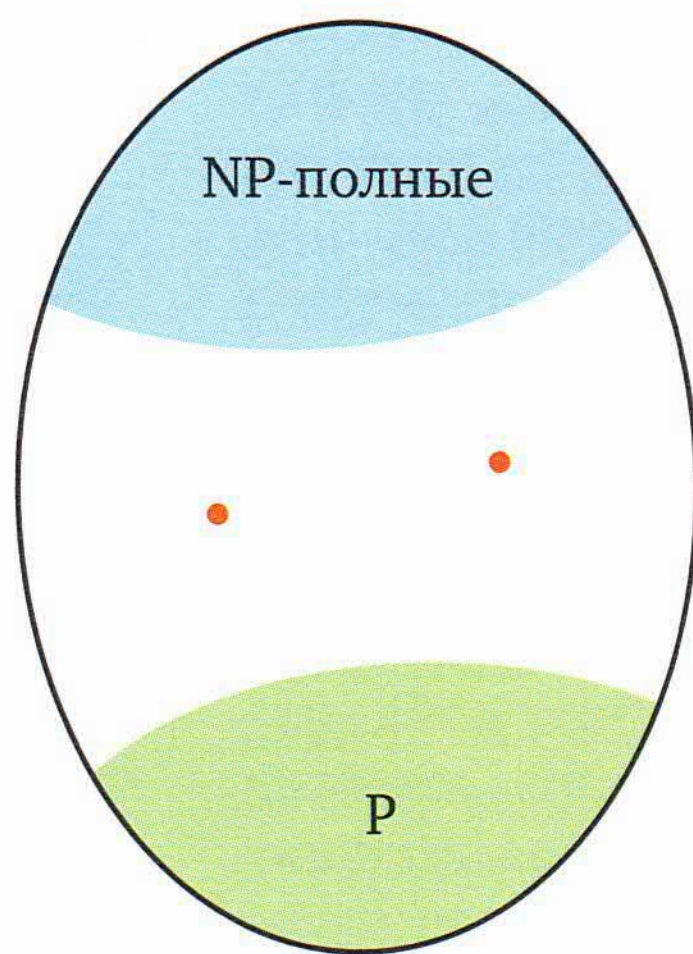
правильный ответ по крайней мере оказывается *коротким* или, более математически, его битовая длина m не превосходит полинома от битовой длины записи n самой задачи. Поэтому всегда имеется тривиальный *переборный алгоритм*, который вместо организованного поиска просто перебирает подряд все возможности, пока не натолкнётся на нужную. Его сложность в наихудшем случае порядка $2^m \sim 2^{Cn^k}$. Учитывая скорость роста экспоненциальной функции, это, конечно, не ахти, но стоит отметить, что бывают ситуации и намного хуже.

Из данного в предыдущем абзаце описания сравнительно легко сконструировать математическое определение: класс задач, в которых проверка ответа полиномиальна, т. е. лежит в классе P . Эквивалентное определение получается, если в приведённое в начале заметки описание машины Тьюринга добавить пункт о её *недетерминированности*, т. е. разрешить машине по своему усмотрению выбирать один вариант поведения из списка предложенных. Полученный таким образом класс задач называется NP , где « N » напоминает о недетерминированности. Большинство задач, которые мы обсуждали ранее, принадлежат этому классу или могут быть легко приведены к требуемому виду. Такая широкая распространённость, конечно же, не случайна. Она отражает тот факт, что NP является неплохой математической моделью любой организованной творческой деятельности, состоящей из собственно творческого акта поиска решения и (как правило быстрой и рутинной) фазы его проверки. Учитывая такое многообразие задач в NP , а priori следовало бы ожидать существование внутри этого класса богатой иерархической структуры, пытающейся сортировать задачи в соответствии с их внутренней сложностью, предположений о том, куда именно та или иная задача попадает и т. д.

Оказывается, что ничего этого не происходит. За весьма немногими исключениями, класс NP фактически распадается ровно на два больших куска. Первый кусок — это уже известный нам класс P , состоящий из всех алгоритмических задач, допускающих хотя бы один эффективный (полиномиальный) алгоритм. Иными словами, это те задачи, в которых перебор вариантов удаётся заменить эффективной процедурой, что мы, собственно, и наблюдали на примере алгоритма Евклида (другой хрестоматийный пример — задача про эйлеров цикл из статьи «От прогулок по Кёнигсбергу до реконструкции генома», стр. 13).

На противоположном полюсе находятся так называемые *NP-полные задачи*, обладающие тем свойством, что к ним полиномиально

сводится любая другая задача из класса NP. Оказывается, что и задача разгадывания sudoku и задача нахождения гамильтонова



цикла из статьи «От прогулок по Кёнигсбергу до реконструкции генома» (стр. 13) и ещё более тысячи (с учётом всех вариаций — порядка 10 000) алгоритмических задач из самых разных областей математики, компьютерных наук, естествознания, биологии, социологии и т. д. NP-полны. Таким образом, любой эффективный алгоритм для разгадывания sudoku может быть перестроен в эффективный алгоритм для разложения чисел на простые множители, построения гамильтонова цикла и массы других полезных вещей. Все такие редукции имеют ярко выраженный «модулярный характер»: полиномиальное сведение, скажем, гамильтонова цикла к sudoku разбивается на несколько сравнительно коротких переходов от одной есте-

ственной промежуточной задачи к другой. Все встречающиеся нам по дороге задачи могут также быть зачислены в NP-полные.

А вот между этими двумя полюсами нет практически ничего. Одна NP-задача, которую мы не умеем классифицировать — это разложение чисел на простые множители; имеется ещё несколько примеров такого типа, мотивированных криптографическими предположениями. Все они обладают тем свойством, что правильный ответ единственен. Примером, в котором последнее свойство не выполняется, служит задача *изоморфизма графов* (нарисованы два графа, можно ли их так «наложить» друг на друга, что они совпадут) и её разновидности. Вот, пожалуй, и все (или, по крайней мере, наиболее важные) естественные задачи, статус которых пока неизвестен. Так что с уверенностью можно сказать, что классификация переборных задач на простые (P) и максимально трудные (NP-полные) — это один из наиболее успешных классификационных проектов в истории науки.

По всем этим причинам задача о совпадении классов P и NP (известная также, как *проблема перебора*) — это одна из центральных открытых проблем современной математики. Большинство специалистов верят в то, что $P \neq NP$. Но доказательство этого факта сводится к проблеме нижних оценок для произвольно выбранной NP-полной задачи, чего математики делать пока не умеют. О популярности этой задачи свидетельствует, в частности внимание, проявляемое к ней любителями от математики — по этому крите-

рию проблема перебора, возможно, уже превзошла гипотезу Ферма. Однако и профессионалы за пределами математической логики и компьютерных наук, безусловно, отдают ей должное. Проблема перебора — одна из семи задач, за решение которой математический институт Клэя учредил престижную премию. Как известно, пока решена только одна из них (гипотеза Пуанкаре — Г. Перельман); для решения оставшихся, скорее всего, также понадобятся новые идеи и подходы, о природе которых мы в случае проблемы перебора не имеем даже приблизительного представления.

Прикладная математика и техника

Говоря о математике, надо прежде всего дать определение, что такое математика, каково её назначение и каковы её задачи.

Обычное самое общее определение: математика есть наука о величинах, точно измеренных.

Измерить какую-либо величину значит сравнить её с величиною с нею однородною, принятой за единицу, и выразить полученное отношение числом. Отсюда более частное определение: математика есть наука о числах вообще.

Надо помнить, что есть множество «величин», т. е. того, к чему *приложимы* понятия «больше» и «меньше», но величин точно не измеренных, например, ум и глупость, красота и безобразие, храбрость и трусость, находчивость и тупость и т. д. — для измерения этих величин нет единиц, эти величины не могут быть выражены числами — они не составляют предмета математики.

Понятие о числе как результате счёта относится к временам доисторическим — самые первобытные народы, которых открывали в джунглях Африки или Новой Гвинеи, не только не имевшие письменности, но находившиеся на самой низшей степени развития, всегда уже умели считать, по крайней мере небольшие числа.

Одна из первых областей, в которой потребовалось применять измерение, были земельные участки с глубочайшей древности уже тесно населённых благодатных долин Евфрата и Нила, потом потребовалось измерять объём, например, при работах каменных или земляных. Отсюда зародилось учение о свойствах пространства — *геометрия*.

Явилась надобность измерять время сперва по счёту дней, месяцев, годов, затем более точно подразделяя день на части. Устанавливается связь между временем и течением небесных светил — *астрономия*, затем связь между местом тела в пространстве и временем — учение о движении и его свойствах, всякое движение на земле требует приложения силы, постигаемой мускульным чувством — зародилась *механика*, но в древности она сперва пошла по ложному пути, намеченному Аристотелем примерно за 300 лет до нашей эры, и шла по этому пути до 1630-х годов, до Галилея, т. е. более 1900 лет.

Явления света изучались в древности, но прочие явления окружающего нас мира, т. е. теплоту, электричество, магнетизм, стали

изучать примерно 300 лет тому назад — с того времени появилась физика как наука.

Но ведь жизнь текла тысячелетиями своим чередом с её обычными потребностями и необходимостью их удовлетворения, накаплился практический опыт, который передавался преемственно из поколения в поколение, передавался от мастера к ученику, становившемуся затем мастером, появились и развились ремёсла и искусства, т. е. способы обработки природных материалов для придания им нужной формы, нужных качеств и т. д. Началась добыча и обработка металлов: меди, олова, цинка, железа, свинца, серебра, золота.

От глубочайшей древности дошли до нас сооружения, предметы искусства, утвари, оружия, инструменты и прочее, свидетельствующие о том, что за много тысячелетий до нашей эры было в значительной мере развито то, что теперь составляет необходимую область *техники* вообще, в обширном смысле этого слова.

Достаточно взглянуть на мелкую, изумительно отчётливую резьбу иероглифов на сфинксе, стоящем в Ленинграде против Академии художеств, чтобы видеть, что эта резьба в твердейшем граните могла быть исполнена лишь острым твёрдым зубилом, — теперь бы его сделали из лучшей инструментальной стали, а ведь сфинксу этому насчитывают не то 3500, не то 4000 лет. Значит, кто-то делал это зубило из какого-то металла, до сих пор не знают какого именно, кто-то добывал металлы из руды, кто-то подвергал их дальнейшей обработке, кто-то готовил из них инструменты и, значит, была развита техника целого ряда производств, когда о математике как науке и помину не было.

С глубочайшей древности идёт тот разлад между «техникой» и «математикой», который не исчез и поныне.

Математика как наука стала развиваться в школах древнегреческих философов лет за 400 до нашей эры и там получила особый отпечаток — она стала одной из главных составных частей философии, как образец точных умозаключений и точных способов получения непреложных сложнейших выводов из самых простых самоочевидных предпосылок, полагаемых в основание.

Получилась наука, в которой всё было абсолютно точно, все выводы которой были связаны в одну непрерывную логическую цепь строгими доказательствами, но эта наука оперировала над предметами *идеализированными*, так сказать воображаемыми, например: точка, прямая, плоскость и т. п. Свойства их устанавливались строго логическими рассуждениями чисто умозрительно, всякое свидетельство чувств, всякий опыт или наблюдение отвергались бесповоротно и в рассуждение безусловно не допускались.

Отсюда ясна самая сущность разлада между математикой и техникой — в технике всё основано не на чистом умозрении и отвлечённой логике, а на свидетельстве чувств: техник должен видеть, слышать, осязать, нюхать, пробовать на язык, он должен развивать все свои чувства и верить им. Для него достаточно доказательство, математиком не признаваемое: надо то-то и то-то делать так-то и так-то, потому что если так делать, то получалось и получится хорошее изделие: поступи иначе — или ничего не получишь, или получишь дрянь; попробуй и убедишься.

Таким образом, техника развивалась сама по себе своим опытом, своею преемственностью и достигла, как уже сказано, высокой степени совершенства во многих областях, гораздо раньше самого появления математики как науки, а после того техника продолжала идти и совершенствоваться независимо своим путём ещё в течение примерно двух тысячелетий. За это время математика в продолжение тысячелетнего мрака средневековья не только ничего нового не получила, но утратила и то, что имела и унаследовала от древних греков, творения которых стали вновь изучаться примерно с 1500-х годов. Одно приобретение надо отметить: около 1000 года через арабов пришла из Индии современная система начертания любого числа при помощи десяти цифр.

Между тем за тысячелетие от 500 до 1500 года мы можем проследить значительное развитие техники, хотя бы в виде тех неподражаемых готических храмов, построенных неведомыми мастерами, храмов, поражающих не только размерами, красотой форм, красотой линий, но и лёгкостью сооружения, разумным использованием материала, соблюдением даже в деталях, например в контрфорсах, истинных принципов строительной механики, которой тогда не было, но и быть не могло, так как даже правило простого сложения сил, называемое правилом параллелограмма сил, известно не было.

Это ещё более укореняло сознание, что математика в сущности есть «переливание из пустого в порожнее», ибо всё, что в ней есть, взято из её основных аксиом, которые казались до тривиальности очевидными, например, две вещи порознь равные третьей — равны между собою, целое больше своей части, и т. п. Значит, всеобъемлющий ум видел бы сразу в этих аксиомах и все их следствия, т. е. всю математику...

Наконец, наступил XVII век, Галилей был в расцвете своего гения, появились Декарт, Кеплер, Гюйгенс, Ньютон, Лейбниц. Зародилась новая наука *механика* как наука о движении и силах, и к созданному Архимедом ещё за 250 лет до нашей эры учению

о равновесии сил параллельных, к учению о центре тяжести прибавилось учение совершенно новое, шедшее вразрез с воззрениями Аристотеля. Новые вопросы потребовали и новых методов для своего решения; в математике открывается исчисление бесконечно малых или дифференциальное и интегральное исчисление, древним неизвестное.

В последней четверти этого XVII века Ньютон кладёт основание механике не только как науке математической, но вместе с тем и как науки естественной, прикладной. Механика в его руках почерпает свои начала из опыта и наблюдения, результаты коих сведены им в три основных закона или аксиомы движения; математические выводы из этих законов проверяются опять-таки опытом и наблюдениями и служат им неопроверженным подтверждением. Ньютон свои выводы прилагает сперва главным образом к изучению движения небесных тел.

С Галилея, Ньютона и Гюйгенса берёт своё начало не только механика, но и новая физика, которая стремится «по наблюдаемым явлениям найти силы природы, а затем по силам предугадывать новые явления».

В XVII столетии мы имеем гении братьев Бернулли, Эйлера, Лагранжа, Лапласа, которые, развивая созданные Ньютоном и Лейбницем новые методы математики, начинают применять их не только к изучению движения небесных светил, но и к изучению явлений земных.

Эйлер творит во всех областях математики, но при этом не пренебрегает и приложениями; так, в 1749 году он издаёт двухтомное сочинение «*Scientia Navalis*» — «Морская наука», содержащее учение о мореходных качествах корабля. Даёт теорию гидравлических турбин, определяет, какое необходимо придавать очертание зубцам зубчатых колёс, издаёт в трёх томах «Диоптрику», где устанавливает способы расчёта оптических стёкол для телескопов и микроскопов. Переводит и настолько дополняет сочинение Робинса по артиллерии, что его перевод вновь переводится с немецкого на английский язык и т. д. Всего им написано сверх 14 томов крупных сочинений, ещё 865 отдельных статей, так что полное собрание его сочинений будет заключать не 45 громадных томов, как сперва предполагалось, а 60, из них 22 уже вышли.

Авторитет Эйлера заставил парижскую Академию наук обратить внимание на кораблестроение как одну из областей, где приложение математики к изучению мореходных качеств корабля представляется плодотворным и желательным. В течение примерно 25 лет вопросы о корабле предлагаются Академией как темы

на премиальные работы. В конкурсах принимают участие выдающиеся учёные и математики того времени. Практические результаты не заставили себя долго ждать — к 1750 годам военный парусный корабль получил ту форму и развитие, которые он сохранил почти без изменений сто лет, т. е. до 1850 годов, когда ему на смену пришли паровые суда, а затем и броненосцы.

В 1770 годах Уатт изобрёл паровую машину с отдельным котлом, холодильником, золотником и прочим. Зародилась новая отрасль промышленности — *машиностроение*, где, подобно тому как в кораблестроении, простой глазомер также был недостаточен, надо было производить расчёт как основных размеров машины, так и частей её, чтобы придать им надлежащую прочность без излишней затраты материала. Математика стала постепенно проникать в технику.

Декретом Конвента от 7 вандемира III года Республики Единой и Неделимой, т. е. 29 сентября 1794 года, в Париже основывается Центральная школа общественных работ, которая через 11 месяцев декретом 15 фруктидора того же III года, т. е. 2 сентября 1795 года, переименовывается в Политехническую школу, в связи с которой образуются девять артиллерийских училищ, из них восемь полковых и одно высшее, «впредь до заключения мира», как сказано в декрете; существует же оно и поныне; и, кроме того, училища: военно-инженерное, путей сообщения, горное, топографическое, корабельных инженеров, навигационное (штурманское) и морское, т. е. устанавливается полная система технического образования.

Политехническая школа должна была давать общую подготовку по математике, физике, химии и графическому искусству, необходимую для инженеров всякой отрасли производства, а специальная подготовка окончивших или полный, или лишь первый из трёх курсов Политехнической школы возлагалась на вышеуказанные специальные школы.

С самого начала в преподаватели Политехнической школы приглашаются знаменитейшие математики — Лагранж, Монж, Прони, а Лаплас назначается главным экзаменатором по математике оканчивающих школу.

Питомцы школы быстро оправдывают себя на всех поприщах, и успехи наполеоновских войн обязаны не только едва грамотным храбрецам и героям Нею, Лефевру, Мюрату, но Бертье и Друо, и множеству инженеров, оставшихся вне вида их воинских подвигов, но строивших мосты, дороги, фабрики оружия и всякого рода снабжения, пороховые, пушечные, снарядные заводы. Про Друо, ставшего вскоре начальником артиллерии наполеоновских армий,

Лаплас говорил, что за всю свою долголетнюю деятельность в качестве экзаменатора наилучшие ответы он получил от Друо. С уверенностью можно сказать, что Лаплас пустяков не спрашивал.

Сознание пользы широкого математического образования для инженеров любой специальности начинает укореняться...

Наряду с каменными мостами потребовались мосты железные, потребовались обширные вокзалы в главных городах, для этих вокзалов специальные устройства крыш, стропил для них и вообще целый ряд железных конструкций, — опять оказалось, что глазомер недостаточен — нужен точный расчёт — математика начинает проникать в технику строительного дела.

Вместе с тем машиностроение и строительное дело предъявляют свои требования к математике и особенно к механике, которая и развивается в смысле её приложений к теории механизмов и к теории сооружений и расчётов их; одновременно развивается намеченное ещё Галилеем учение о сопротивлении материалов и создаётся новая область — *теория упругости*, требующая для решения своих задач и новых математических средств.

С другой стороны, появляющиеся вопросы физико-технические и физические также подвергаются математическому изучению: сперва теплопередача и вообще распространение тепла получает математическую обработку в руках Лапласа и особенно Фурье, создавшего и новые методы для решения вопросов в этой новой области. Затем оказывается, что эти методы применимы и для ряда других задач, казалось бы совершенно не имеющих ничего общего с теплотой, однако приводящих к тем же самым дифференциальным уравнениям.

Первая четверть XIX века даёт много примеров развития таких методов применения математики к вопросам физики, особенно в трудах Пуассона, Коши и англичанина Грина.

Упомянув Пуассона, я приведу типичный пример того, как одна его казалось бы чисто теоретическая работа через 40 лет послужила основой для важного практического применения, в громадной мере способствовавшего безопасности мореплавания.

В 1824 году в своих обширных работах по математической теории магнетизма Пуассон дал общие уравнения равновесия компасной стрелки на корабле, принимая в расчёт возмущающее влияние на компас железа, входящего в состав крепления и вооружения корабля. Уравнения эти заключали 12 постоянных коэффициентов для данного корабля, для определения которых Пуассон не указал никаких практических методов, ограничившись лишь чисто теоретической частью.

Для физиков эти уравнения интереса не представляли, для моряков были и недоступны, и непонятны; так и оставались они как бы под спудом в одной из 400 статей этого знаменитого и плодовитого автора. Лишь астроном Эри, воспользовавшись соображениями Пуассона, показал простой способ, размещая около компаса определённым образом магнит и бруски железа, производить на компас действие, обратное влиянию судового железа или, как говорят, уничтожать девиацию компаса. Но девиация, уничтоженная в одном месте, появлялась вновь при переходе корабля в другие области.

Во времена Пуассона, умершего в 1841 году, корабли были деревянные, железа на них было сравнительно мало, влияние его невелико, погрешности компаса поглощались другими погрешностями при плавании под парусами.

Но с середины 1840-х годов начало развиваться железное судостроение и паровые суда, установились срочные регулярные на них заокеанские сообщения, быстро развивающиеся, и вот в 1862 году на протяжении месяца гибнут одно за другим у берегов Ирландии два больших пассажирских парохода, державших сообщение с Америкой, причём на каждом кроме ценного груза гибнет по несколько сот человек.

Произведённое следствие обнаружило, что одной из главных причин гибели была погрешность в показаниях компаса, вследствие которой корабль шёл по ложному курсу. Общественное мнение Англии встревожилось, по требованию парламента Адмиралтейством был образован компасный комитет, в него вошли математик Арчибальд Смит, астроном Эри и капитан Эванс.

Вспомнили об уравнениях Пуассона, привели их простым преобразованием к удобному использованию — одним словом, издали практическое адмиралтейское руководство по девиации компаса, вполне доступное любому образованному моряку.

В это время в Англии строился наш первый броненосец — броненосная батарея «Первенец» — командовал ею капитан-лейтенант И. П. Белавенец, который проникся важностью учения о девиации компаса для мореплавания, особенно ввиду начинавшейся тогда у нас постройки броненосных военных судов взамен отживших свой век деревянных кораблей. По его представлению в Кронштадте была основана Компасная обсерватория и в неё определён помощником Белавенца моряк — превосходный математик — И. П. де-Коллонг.

Коллонг вскоре значительно подвинул теорию девиации компасов, воспользовавшись свойством одной кривой, открытой ещё в 1640-х годах Паскалем и называемой «улиткою Паскаля». Затем

Коллонг продолжал непрестанно работать по компасному делу, изобрёл ряд приборов для измерения магнитных сил и уничтожения девиации, усовершенствовал компас, и начиная с 1880 года на всех наших судах были приняты компасы его системы, до сих пор остающиеся лучшими в мире.

На этом типичном примере особенно ясно видно воздействие и проникновение в технику и практику отвлечённой теоретической работы. Знаменитый автор даёт теоретическое обоснование, но не вдаётся в подробности и детали, затем знающие специалисты, достаточно подготовленные, разбираются в его теории, придают ей практическую, применимую форму и вносят её результаты в жизнь, в обиход, в технику.

Я потому привёл этот пример, что в нём весь процесс закончился в сравнительно короткое время, и потому, что дело это мне хорошо известно, так как с 1884 года я в течение нескольких лет работал как ближайший помощник и ученик И. П. де-Коллонга, теорию девиации компаса и практику её уничтожения и определения изучил тогда основательно, так что и сам внёс кое-что новое в это дело, пока не перешёл на более крупное — на кораблестроение.

Другой пример. Знаменитый астроном и математик Гаусс в 1833 году устанавливает так называемую систему абсолютных мер и тем подчиняет точному, определённом, независимому от прибора и наблюдателя измерению явления магнетизма и электричества, тогда представлявших лишь чисто научный интерес. Но вот проходит 45 лет, зарождается новая техническая область *электротехника*, электрические измерения приобретают важное практическое значение, проходит ещё 45 лет, и в любом городе, а скоро и в любой деревне не найдётся дома, где не стоял бы счётчик электрической энергии.

Конечно не Гаусс делал эти счётчики, вероятно, он и не помышлял о них, но основа положена его гением.

Тот же Гаусс в 1822 году, отвечая на вопрос о построении сети географических карт, поставленный на премию датской Академией наук, дал общее его решение, и вот через 90 лет оказалось, что к совершенно подобному вопросу приводит изучение движения жидкости при обтекании тела или воздуха при обтекании крыла аэроплана, о чём мы ещё скажем ниже.

Вопрос о теплопроводности, решённый Фурье ещё в 1808 году, нашёл себе через 50 лет целиком применение в руках В. Томсона лорда Кельвина, когда проложили через Атлантический океан первый телеграфный кабель, и он сперва не действовал. Хуже того, действовал, но так, что один сигнал, например точка или тире

азбуки Морзе, передавался в виде записи бесчисленного множества знаков, продолжавшейся 8 минут времени, так что разобрать было ничего невозможно. Казалось, несколько миллионов фунтов стерлингов погребены на дне океана безвозвратно, и вот В. Томсон в уравнениях Фурье, данных в 1808 году, и Грина, данных в 1828 году, сумел прочесть, что́ надо сделать, чтобы кабель действовал, но чтобы это прочесть надо было быть Вильямом Томсоном.

Теперь способы электрических измерений несравненно проще и точнее измерений тепловых, вместе с тем холодильное дело, рефрижераторные суда получили большое развитие. Устройство на них изоляции холодильных помещений ставит такие вопросы, которые не только не поддаются математическому анализу, но даже не поддаются и непосредственному опыту, но, оказывается, их можно решить путём электрических измерений, изучая не линии теплового потока, а линии тока электричества и таким образом получить необходимые данные для расчёта. Эта работа ставится теперь в нашем Физико-математическом институте Академии Наук, причём надо помнить, что за каждым техническим расчётом лежат сотни тысяч и миллионов рублей.

Таких аналогий между вопросами совершенно разных областей, но приводящих к одинаковым дифференциальным уравнениям, можно привести множество. Казалось бы, что может быть общего между расчётами движения небесных светил под действием притяжения к Солнцу и между собою и качкою корабля на волнении, или между определением так называемых вековых неравенств в движении небесных тел и крупнейшими колебаниями валов многоцилиндрового двигателя дизеля, работающего на корабельный винт или на электрогенератор. Между тем, если написать только формулы и уравнения без слов, то нельзя отличить, какой из этих вопросов решается — уравнения одни и те же.

Вот почему инженер должен владеть общими математическими методами, приложенными к решению множества задач, тогда только он сможет решать действительно новые вопросы по своей специальности.

В настоящее время математика настолько проникла в технику всех отраслей строительного дела, всех отраслей машиностроения, кораблестроения, построения летательных аппаратов, артиллерийского дела, электротехники, оптики и прочего, что нельзя себе и вообразить ни одного сооружения, которое не было бы предварительно рассчитано.

Лаборатории и технические бюро заводов имеют в числе своих сотрудников учёных-математиков, в журналах этих лабораторий

часто наряду с исследованиями техническими печатаются исследования чисто математические сотрудников этих лабораторий, настолько ясно осознана связь между техникой и математикой как важнейшим орудием её.

Приведёнными примерами значение приложений математики для техники в достаточной мере выяснено, но математика продолжает развиваться и сама по себе по тому пути, начало которого было для неё проложено древнегреческими философами, т. е. чистое умозрение, чистая логика в применении к отвлечённым объектам, ею самою создаваемым, свойства которых и количественные соотношения между которыми она и изучает, стремясь прежде всего к абсолютной строгости и непреложности своих рассуждений и доказательств. По этому пути математика развивается за последние 50 или 60 лет гораздо больше, нежели по пути, проложенному работами Коши и Пуассона 100 лет тому назад.

Отсюда опять происходит кажущийся разлад между математикой и техникой. Математика не даёт технику то, что ему нужно, но часто это происходит потому, что техник не там ищет ответ на свои запросы, где этот ответ в скрытом виде находится.

Отсюда естественно поставить такой вопрос: как же делать технику выбор в том беспредельном материале, который ему математика открывает?

Наиболее простой ответ получится, если несколько вникнуть в вопрос.

Во всяком техническом деле важен не тот логический процесс, который привёл к какому-либо заключению или результату, а важно самое заключение или самый результат и притом выраженный «числом и мерою». Поэтому всё, что математика даёт в смысле составления уравнений, их решения и притом доведённого до конца, упрощения вычислений, применения приближённых методов решения математических вопросов — всё это техника рано или поздно использует и применит часто в вопросе, казалось бы ничего общего не имеющем с тем, для решения которого тот или иной метод был первоначально развит.

Казалось бы, в 1814 году, что может быть отвлечённее учения о функциях мнимого переменного, а через 100 лет, после того как Коши дал основания этого учения, Жуковский и Чаплыгин применили это учение к определению формы и к точному расчёту крыльев аэроплана.

Всякого рода таблицы разных функций, хорошо изученных, представляют результат громадного труда, затраченного их составителем, значит они представляют истинную ценность, истинное сокровище, избавляющее от напрасного труда все грядущие поколения;

техник должен знать о том, какие функции изучены, какие таблицы для них существуют, и иметь навык быстро разбираться в любых таблицах и уметь пользоваться ими.

Вот, совокупность этих-то знаний, охватывающих главным образом вычислительную практику всякого рода, охватывающих овладение способами составления и решения всякого рода уравнений обыкновенных алгебраических, трансцендентных, дифференциальных обыкновенных и в частных производных, разностных и т. д. с доведением этого решения до численных результатов, применение разного рода хорошо изученных и табулированных функций, начиная от тригонометрических и переходя к эллиптическим, бесселевым шаровым и т. п., — составляет обширную область прикладной математики, которая и служит основой механики и всей современной техники.

Спрашивается, неужели всему этому надо учиться в школе? Нет, не надо и невозможно, школа не может давать вполне законченного знания, её цель дать основы знания, дать общее развитие, дать необходимые навыки, одним словом, по словам великого математика Вейерштрасса в его речи при вступлении в должность ректора Берлинского университета главная задача школы *научить учиться*, и тот, кто в школе научился учиться, для того практическая деятельность всю его жизнь будет наилучшею школою.

Но надо помнить, что прикладная математика не самодовлеющая, что все свои методы, все основания для них она почерпает из той строгой логической чистой математики, которая идёт непрестанно в своём философском, строгом развитии.

Полтора года лет тому назад Правдин спрашивал Митрофанушку:

— Что ты знаешь из грамматики?

— Существительно да прилагательно.

— Скажи, дверь какое имя — существительное или прилагательное?

— Котора дверь?

— Ну вот эта.

— Эта — прилагательна, потому что она к своему месту приложена, а вот в чулане шесту неделю дверь стоит не навешена, так та покамест существительна.

Это может служить отличным пояснением разницы между математикой чистой и прикладной, только здесь не шесть недель, например, теория конических сечений была «существительной», а две тысячи лет, пока Кеплер воспользовался ею для создания точной теории движения небесных тел, а от этой теории Ньютон затем создал механику, служащую основой всей физики и техники.

Так и теперь, многие математические теории, кажущиеся отвлечёнными и приложений не имеющими, может быть, завтра найдут себе приложение совершенно неожиданное, а может быть, и через две тысячи лет, но всякая истина всегда представляет вечный вклад в сокровищницу человеческого знания, независимо от того, когда этою истиною воспользуются.

Главная задача Академии Наук и состоит не только в использовании сокровищ, уже имеющихся, но и в накоплении новых; не только в использовании процентов, но и в капитальных вложениях.

Книжная полка

Главная цель предлагаемого списка — напомнить читателю о существовании интересных книг по математике, тем более что некоторые из них уже оказались в числе полузабытых. В список включены книги, изданные в нашей стране, как более доступные широкому кругу читателей. Рекомендуемые книги — это признанная, проверенная временем классика.

Список предназначен для всех: и юные читатели, и их родители, и учителя смогут расширить и углубить свои представления о мире математики, выбрав книги в соответствии с собственными интересами, вкусами и уровнем подготовки.

Книги о предмете математической науки, её задачах и методах.

Выделим три книги, которые для многих математиков стали началом творческого пути в науке.

- Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. — М.—Л.: Гостехиздат, 1949. — [Переиздание: 1981].
- Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика?: Элементарный очерк идей и методов. — М.: ГИТТЛ, 1947. — [9-е издание, исправленное. — М.: МЦНМО, 2019].
- Радемахер Г., Тёплиц О. Числа и фигуры: Опыты математического мышления. — М.: ОНТИ, 1936. — (Библиотека математического кружка; Вып. 10). — [Переиздания: 1938, 1962, 1966, 2020].

Общую часть списка продолжает ряд изданий, подготовленных коллективами учёных.

- Математика: её содержание, методы и значение: В 3 томах. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
- Детская энциклопедия. 2-е издание. Том 2: Мир небесных тел. Числа и фигуры. — М.: Просвещение, 1964. — [Переиздание: М.: Педагогика, 1972].
- Энциклопедия для детей. Том 11: Математика. — М.: Аванта+, 2003. — [2-е издание, переработанное: М., 2011].
- Энциклопедия элементарной математики. Книги 1—5. — М.—Л.: 1951—1966.

Авторский взгляд на математику представлен в книгах, написанных профессиональными математиками.

- Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. — М.: Советское радио, 1970. — [Переиздание: М.: МЦНМО, 2001].

- Вейль Г. Симметрия. — М.: Наука, 1968. — [Переиздания: 2003, 2007].
- Вейль Г. Математическое мышление. — М.: Наука, 1989.
- Винер Н. Я — математик. — М.: Наука, 1964. — [Переиздания: 1967, 2001, 2018].
- Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.—Л.: ОНТИ, 1936. — [Переиздания: 1951, 2004].
- Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2 томах. — М.: ОНТИ, 1933—1934. — [Переиздания: 1936, 1987].
- Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии: В 2 томах. — М.—Л.: ОНТИ, 1937. — [В 1937 году вышел только 1-й том, переиздан в 1989 году; 2-й том вышел в 2003 году].
- Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966.
- Колмогоров А. Н. Математика — наука и профессия. — М.: Наука, 1988. — (Библиотечка «Квант»; Вып. 64). — [Переиздание: 2008].
- Крылов А. Н. Мои воспоминания. — 9-е издание, переработанное и дополненное. — СПб.: Политехника, 2003. — [1-е издание: М.: АН СССР, 1942].
- Поля Д. Математика и правдоподобные рассуждения. — М.: ИЛ, 1957. — [Переиздания: 1975, 2010].
- Поля Д. Как решать задачу. — М.: Учпедгиз, 1959. — [Переиздания: 1961, 1991, 2009].
- Поля Д. Математическое открытие. — М.: Наука, 1970. — [Переиздания: 1976, 2010].
- Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1983. — [Переиздание: 1990].
- Реньи А. Трилогия о математике. — М.: Мир, 1980.
- Фрейденталь Г. Математика в науке и вокруг нас. — М.: Мир, 1977.
- Харди Г. Г. Апология математика / С предисловием Ч. П. Сноу. — Ижевск: РХД, 2000. — [Переиздания: 2005, 2019].

В новом тысячелетии в нашей стране появились интересные книги, уже заслужившие признание читателей.

- Арнольд В. И. Математическое понимание природы. — 2-е издание, исправленное. — М.: МЦНМО, 2010. — [Переиздания: 2013, 2015, 2016].
- Манин Ю. И. Математика как метафора. — М.: МЦНМО, 2008. — [2-е издание, дополненное: М.: МЦНМО, 2010.]
- Успенский В. А. Предисловие к математике. — СПб.: Амфора, 2015. — [Более полная версия выходила под названием «Апология математики»].

Книжные серии в основном состоят из книг, посвящённых отдельным разделам и даже конкретным задачам математики. Прочитать все книги этих серий вряд ли возможно, но если вас интересует конкретный вопрос, то можно будет найти подходящее издание. Некоторые серии существовали достаточно долго, и удачные книги переиздавались, с дополнениями и улучшениями, тиражи доходили до сотен тысяч экземпляров.

- **Математическая мозаика.** Выходившие в издательстве «Мир» прекрасно переведённые книги по занимательной математике. Эта серия с логотипом «Круг—квадрат—треугольник» многим знакома по книгам Мартина Гарднера.
- **Популярные лекции по математике.** Брошюры этой обширной серии выходили с 1950 по 1992 год. Темы — от школьной математики до современных разделов.
- **Библиотека математического кружка.** Классическая серия, книги переведены и изданы в разных странах. Ряд книг в этой серии — тщательно составленные обширные коллекции задач, представляющие богатый мир элементарной математики.
- **Библиотечка физико-математической школы.** Серия издавалась в 1960—1970-х годах. Выделим книгу Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые».
- **Библиотечка «Квант».** В книгах этой серии говорится и о математике, и о физике, как и в статьях самого журнала «Квант».
- В серии «**Математика, кибернетика**» издательства «Знание» ежегодно выходило 12 брошюр. Диапазон тем — от истории математики до использования компьютеров.
- **Современная математика.** Выпущенные издательством «Мир» книги делились на две серии, школьного и студенческого уровней: «Популярная серия» и «Вводные курсы».
- **Библиотека «Математическое просвещение».** Серия брошюр по материалам лекций для школьников на Малом мехмате МГУ (издаётся с 1999 года).
- **Школьные математические кружки.** Современная серия книг, содержащих подробные тематические сценарии для проведения школьных математических кружков. [Нельзя не упомянуть близкую к этой серии книгу «Ленинградские математические кружки» (С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин).]

Научно-популярные математические журналы в нашей стране имеют давние и уникальные традиции. Одна из характерных черт — под одной обложкой часто бывают представлены различные предметы: математика, физика, химия, даже лингвистика. Ещё одно

традиционное свойство наших журналов — взаимодействие с читателем, одним из проявлений которого стали конкурсы по решению задач (и в детских, и во «взрослых» журналах).

Существуют (и развиваются!) журналы, рассказывающие о мире математики познавательно и интересно:

- «Квантик» — для школьников младших и средних классов,
- «Квант» — для тех, кто постарше.

Достоен внимания и архив журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики» — дореволюционного предшественника «Кванта». Ежегодные сборники «Математическое просвещение» — переходное звено от популярной математической литературы к профессиональной. Первая серия издавалась с 1934 по 1938, вторая — с 1957 по 1961, а третья — с 1997 года по настоящее время. Материалы журнала «Математика в школе» адресованы, в первую очередь, учителям.

Книги для детей и их родителей предназначены для первых путешествий ребёнка в мир математики. Они предполагают совместное, семейное обсуждение прочитанного, узанного, решённого.

Родителям, обдумывающим, как приступить к занятиям с ребёнком, рекомендуем книгу А. К. Звонкина «Малыши и математика».

Когда с ребёнком будут прочитаны книги Бориса Житкова («Что я видел», «Рассказы о технике» и др.), развивающие желание всматриваться в окружающий мир и способность анализировать его, можно приступить к решению занимательных математических задач.

Первыми источниками таких задач могут стать книги Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки» (впервые издана в 1908 году) и Б. А. Кордемского «Математическая смекалка» (впервые издана в 1954 году). Книги И. Я. Депмана «Рассказы о математике», Ф. Ф. Нагибина «Математическая шкатулка» и А. П. Савина «Математические миниатюры» — более продвинутые, в них помимо собственно задач и решений есть и их анализ, и сведения по истории математики.

Яков Исидорович Перельман написал десятки книг, первые вышли ещё до революции. Самые узнаваемые «серийные» названия — «Занимательная математика/алгебра/геометрия/физика». Популяризацией науки Перельман занимался вплоть до гибели в 1942 году в осаждённом Ленинграде, успев создать перед войной «Дом занимательной науки» — первый интерактивный музей науки.

В книгах С. П. Боброва «Волшебный двурог» и В. А. Лёвшина «Магистр рассеянных наук» (и других) математические идеи предстают в различных литературных жанрах: от бесед с читателем до приключенческих повестей.

Из зарубежных авторов отметим издававшихся в серии «Круг—квадрат—треугольник» Мартина Гарднера и Рэймонда Смаллиана. Отличительная черта книг Гарднера — диапазон разбираемых задач, от головоломок до современных методов шифрования («Математические головоломки и развлечения», «От мозаик Пенроуза к надёжным шифрам»). У Смаллиана центром занимательных сюжетов всегда служит логика («Как же называется эта книга?», «Принцесса или тигр?»).

Книги по истории математики дают общее представление об этапах развития науки и её творцах, знаменитых учёных.

- Кэджори Ф. История элементарной математики. — Одесса: Mathesis, 1910. — [2-е издание, исправленное и дополненное: Одесса, 1917].
- Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. — М.: Наука, 1964. — [Переиздания: 1969, 1978, 1983, 1990].
- Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. — 6-е издание. — М.: МЦНМО, 2018.
- Юшкевич А. П. История математики в России. — М.: Наука, 1968.

Есть множество других книг, посвящённых и истории математики в целом, и отдельным периодам (скажем, рассказывающих о математике Древнего мира или XIX века), и отдельным областям (геометрии, алгебре и т. д.).

Биографии ярких фигур математической истории — вдохновляющий источник эмоций, который может вызвать у читателя желание окунуться в математический мир. Есть как отдельные (внесерийные) книги, так и представленные в двух общеизвестных сериях.

В серии «Жизнь замечательных людей» математики представлены скромно, всего десять книг (Бирани, Э. Галуа, С. В. Ковалевская, А. Н. Крылов, Н. И. Лобачевский, А. М. Ляпунов, И. Ньютон, Б. Паскаль, Пифагор, А. Пуанкаре). Для сравнения: на памятных табличках с именами знаменитых французских учёных, расположенных по периметру Эйфелевой башни, математики — треть списка.

Издаваемая Академией наук «Научно-биографическая серия» — менее беллетризованная, больше места в биографиях занимает описание научных достижений героев. Её выпуски посвящены таким известным математикам, как У. Гамильтон, Х. Гюйгенс, Р. Декарт, А. Н. Колмогоров, Г. Лейбниц, А. А. Марков, В. А. Стеклов, П. Л. Чебышев (всего 44).

О происхождении, значении отдельных терминов и понятий можно узнать из книги Н. В. Александровой «История мате-

математических терминов» или обратившись к (англоязычному) сайту <http://etymonline.com>.

Известную фразу знаменитого физика Гиббса «Математика — это язык!» можно дополнить целой коллекцией ярких афоризмов о математике. Большая подборка содержится в книге «Математика в афоризмах, цитатах, высказываниях» (составитель Н. А. Вирченко, Киев: Вища школа, 1983).

Словари и энциклопедии — к ним можно и имеет смысл обращаться, встретив неизвестные термины, теоремы, имена из мира математики. Читателю стоит приобрести привычку к подобному методу борьбы с унылой приблизительностью понимания.

- Математическая энциклопедия: В 5 томах / Гл. ред. И. М. Виноградов. — М.: Советская энциклопедия, 1977—1985.
- Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю. В. Прохоров. — М.: Советская энциклопедия, 1988.
- Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А. П. Савин. — М.: Педагогика, 1989. — [3-е издание, исправленное и дополненное: 1997].
- Современная иллюстрированная энциклопедия. Том «Математика. Информатика». — М.: Росмэн, 2007.
- Боголюбов А. Н. Математики. Механики: Биографический справочник. — Киев: Наукова думка, 1983.

Дополнения, комментарии, литература

К некоторым сюжетам «Математической составляющей» приводятся комментарии и дополнения, содержащие обсуждение и развитие изложенного материала, а также отдельные списки книг для чтения, затрагивающих тему сюжета.

В комментариях и дополнениях, в частности, выявляется общность сюжетов, которые в тексте книги непосредственно не были связаны. Роль общего знаменателя могут сыграть и объединяющий раздел математики, и математический инструмент, применяемый в разносюжетных задачах. Одна из причин видимой разнородности раздела — желание привести информацию для разных категорий читателей, с отличающимися интересами и подготовкой.

Отдельная линия в дополнениях — это описание наглядных моделей. Такая модель и её обсуждение — самостоятельная, важная точка входа в математическую тему. А возможность «физически прикоснуться» к фактам чисто математическим для многих представит математику наукой более понятной и даже дружелюбной.

Дополнением к сюжету служит и небольшой список книг, с помощью которого читатель сможет расширить и уточнить свои представления о предмете статьи. В списке книги по возможности упорядочены: от простого к более сложному, от непосредственно связанных с сюжетом к более далёким. Уровень трудности книг почти всегда соответствует уровню занятий школьного математического кружка.

Как и в разделе «Книжная полка», предпочтение отдаётся классике, чтобы перебросить мостик между современностью и тем богатством, что выдержало испытание временем.

От «безумной» геометрии Лобачевского до GPS-навигаторов 12

- Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. — М.: ГИТТЛ, 1955. — [Переиздания: 1983, 2009].
- Гамов Г. Приключения мистера Томпкинса. — М.: Бюро «Квантум», 1993; Ижевск: РХД, 1999.
- Гарднер М. Теория относительности для миллионов. — М.: Атомиздат, 1967.
- Ландау Л. Д., Румер Ю. Б. Что такое теория относительности. — 3-е изд., доп. — М.: Советская Россия, 1975.
- Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. — Т. 2: Пространство, время, движение. — М.: Мир, 1965.

- Тейлор Э. Ф., Уилер Дж. А. Физика пространства-времени. — 2-е изд., доп. — М.: Советская Россия, 1971.
- Что такое теория относительности?: Научно-популярный фильм / Режиссёр С. Л. Райтбурт. — М.: Моснаучфильм, 1964.

От прогулок по Кёнигсбергу до реконструкции генома 13

- Компо Ф., Певзнер П. Реконструкция генома: головоломка из миллиарда кусочков // Журнал «Квант». 2014. № 3. Стр. 2—12.
- Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. — Киров: АСА, 1994. — [Главы «Графы-1» и «Графы-2»].
- Оре О. Графы и их применение. — М.: Мир, 1965.

Распространение звуковых волн 14

- Гюйгенс Х. Трактат о свете. — М.—Л.: ОНТИ, 1935.
- Веселовский И. Н. Христиан Гюйгенс. — М.: Учпедгиз, 1959.
- Соловьёв Ю. Христиан Гюйгенс // Журнал «Квант». 2012. № 4. Стр. 2—5.
- Брэгг У. Мир света. Мир звука. — М.: Наука, 1967.
- Берест Ю. Ю., Веселов А. П. Принцип Гюйгенса и интегрируемость // Успехи математических наук. 1994. Т. 49. Вып. 6. Стр. 7—78. — [Обзор для специалистов].

Математика интернета 16

- Райгородский А. М. Математические модели интернета // Журнал «Квант». 2012. № 4. Стр. 12—16.
- Райгородский А., Литвак Н. Кому нужна математика?: Понятная книга о том, как устроен цифровой мир. — М.: МИФ, 2017.
- Оре О. Графы и их применение. — М.: Мир, 1965.

Математика транспортных потоков 18

- Гасников А., Дорн Ю., Нурминский Е., Шамрай Н. Автомобильные пробки: когда рациональность ведёт к коллапсу // Журнал «Квант». 2013. № 1. Стр. 13—18. — [В частности, разбирается парадокс Брайеса: введение в эксплуатацию новой дороги иногда не улучшает, а ухудшает транспортную ситуацию].
- Гасников А. В. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / А. В. Гасников, С. Л. Кленов, Е. А. Нурминский, Я. А. Холодов, Н. Б. Шамрай — М.: МЦНМО, 2013.
- Вучик В. Р. Транспорт в городах, удобных для жизни. — М.: Территория будущего, 2011. — [Оригинал: Vuchic V. R. Transportation for Livable Cities, 1999].

Компьютерная томография	20
<ul style="list-style-type: none"> • Бухштабер В. М., Гиндикин С. Г. От принципа Кавальери к томографу // Журнал «Природа». 1983. № 6. Стр. 12—24. 	
Обнаружение разладки	22
<ul style="list-style-type: none"> • Ширяев А. Н. Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений. — М.: МЦНМО, 2014. 	
Оптимальное управление	26
<ul style="list-style-type: none"> • Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. — М.: Наука, 1986. — (Библиотечка «Квант»; Вып. 56). — [Переиздания: М.: МЦНМО, 2006, 2017]. • Протасов В. Ю. Максимумы и минимумы в геометрии. — М.: МЦНМО, 2012. — (Библиотека «Математическое просвещение»; Вып. 31). 	
Математические модели механики	28
<ul style="list-style-type: none"> • Чёрный Г. Г. Слово о вечно новой механике. — М.: Знание, 2011. • Кирпичёв В. Л. Беседы о механике. — СПб.: Издание К. Л. Риккера, 1907. — [Переиздания: 1933, 1950, 1951, 2008]. 	
Уравнения электродинамики	30
<ul style="list-style-type: none"> • Уиттекер Э. История теории эфира и электричества. — Ижевск: РХД, 2001. 	
Графен	32
<ul style="list-style-type: none"> • Katsnelson M. I. Graphene: Carbon in Two Dimensions. — Cambridge University Press, 2012. — [Монография для специалистов]. 	
О применениях математики в криптографии	36
<ul style="list-style-type: none"> • Дориченко С. А., Яценко В. В. 25 этюдов о шифрах. — М.: ТЕИС, 1994. • Введение в криптографию / Под ред. В. В. Яценко. — 4-е изд. — М.: МЦНМО, 2012. 	
Квантовая информатика	38
<ul style="list-style-type: none"> • Бор Н. Атомная физика и человеческое познание. — М.: ИЛ, 1961. 	
Математика — язык описания возможностей	40
<ul style="list-style-type: none"> • Манин Ю. И. Математика как метафора. — 2-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2010. 	
Инструментарий инженера	42
<ul style="list-style-type: none"> • Крылов А. Н. Мои воспоминания. — 9-е изд., перераб. и доп. — СПб.: Политехника, 2003. — [1-е изд.: М.: АН СССР, 1942]. 	

■ В некоторые светоотражающие покрытия, например, на дорожных и автомобильных номерных знаках, на одежде, «встроен» другой тип катафота. Эти покрытия содержат мелкие шарики, проникая в которые свет отражается от «задней стенки» шарика, а затем выходит из него наружу параллельно тому направлению, откуда пришёл. По сути маршрут аналогичен тому, который проходит световой луч в капле дождя при возникновении радуги (см. «Радуга», стр. 118), с той лишь разницей, что из водяной капли свет выходит под углом в 41° — 42° к приходящему солнечному, а в катафоте — параллельно исходному направлению.

■ Интересные впечатления дарит угловой отражатель, сделанный из трёх относительно больших зеркал. Если, перемещаясь, смотреть на модель, то можно обнаружить, что отражение следит за вами. А если, стоя перед отражателем, по очереди закрывать глаза, то обнаружится, что каждый раз отражение открытого глаза смотрит прямо на вас и всегда из перекрестия плоскостей зеркал.

- Алёшкина Е. Ю. Лазерная локация Луны // Журнал «Природа». 2002. № 9. Стр. 57—66.
- Передвижная лаборатория на Луне «Луноход-1». — Т. 2. — М.: Наука, 1978.

■ Древние греки занимались изучением эллипса, гиперболы и параболы, рассматривая их как конические сечения. Аполлоний (262 до н. э. — 190 до н. э., родом из Перги, но работавший в Александрии, современник Архимеда) написал труд «Конические сечения» в восьми книгах, половина из которых дошла до наших дней только в средневековых арабских переводах.

Аполлоний рассматривал фокусы эллипса и гиперболы, хотя у него и не было специального термина для этих точек, знал их свойства, включая оптические.

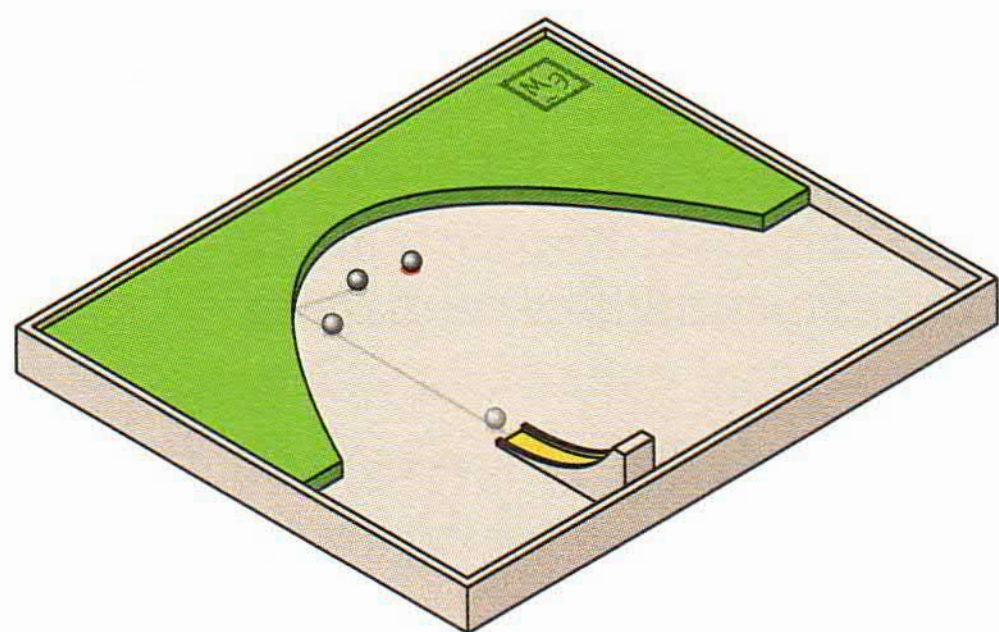
Диокл, младший современник Аполлония, в сочинении «О зажигательных зеркалах» приводит оптическое свойство параболы, видимо, основываясь на результатах учёных круга Архимеда. Это сочинение также сохранилось лишь благодаря арабским переводам, в которых параболоид вращения назывался «зажигательным зеркалом», а фокус параболы — «местом зажигания».

При издании латинских переводов арабских математических текстов «место зажигания» не могло не превратиться в латинское *focus* — «очаг, огонь». Как термин «фокус» был введён Иоганном

Кеплером в сочинении «Оптическая часть астрономии» («*Astronomiae pars optica*», 1604), причём не только для параболы, но и для эллипса и гиперболы.

■ Оптическое свойство параболы предстанет как экспериментальный факт, если изготовить параболический бильярд.

В этой модели изогнутый бортик представляет параболу, на сукне отмечен фокус — точка, в которую надо поставить шарик-мишень. Основной шарик будет скатываться с подвижной горки, которую



всегда размещают так, чтобы направление скатывающегося шарика было параллельно оси параболы (например, можно сдвигать горку вдоль прямой стенки бильярда, расположенной перпендикулярно оси параболы). Шарик, скатываясь с горки, после отражения от бортика всегда будет попадать в шарик, размещённый в фокусе параболы!

При самостоятельном изготовлении модели следует учесть, что бортик — это эквидистанта параболы, её сдвиг в каждой точке по нормали к параболе на расстояние, равное радиусу шарика (в идеальной геометрической модели от параболы отражается центр шарика, точка). Радиус шарика должен быть не слишком мал, чтобы сглаживать возможные погрешности.

Качество изготовленной модели можно оценить, если провести эксперимент, убрав шарик-мишень. Скатывающийся с горки шарик после первого отражения от бортика должен пройти через отмеченный фокус, а после второго — покатиться параллельно оси параболы.

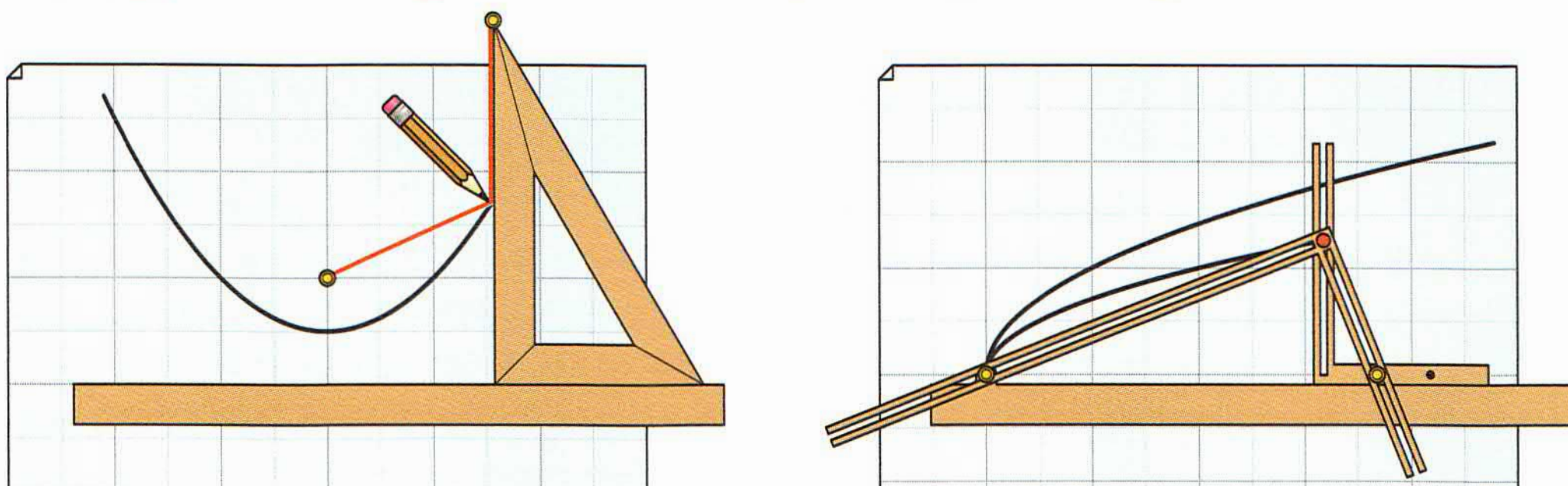
■ Геометрическое определение позволяет нарисовать параболу с данным фокусом и данной директрисой.

Вдоль директрисы положим линейку, в фокусе кнопкой закрепим конец нити. Второй конец нити закрепляется в вершине угольника, катет которого приложен к линейке. Если прижать нить ко второму катету карандашом, сохраняя её натянутой при скольжении угольника вдоль линейки, то проведённая линия будет параболой.

Устройства, вычерчивающие параболы, называются параболографами. Изящную конструкцию придумал в XVII веке итальянский математик Бонавентура Кавальери (известный как предшественник создателей интегрального исчисления).

Устройство состоит из трёх связанных деталей: неподвижной относительно листа линейки (горизонталь) и двух жёстких прямых углов. У первого угла горизонтальная сторона скользит вдоль линейки,

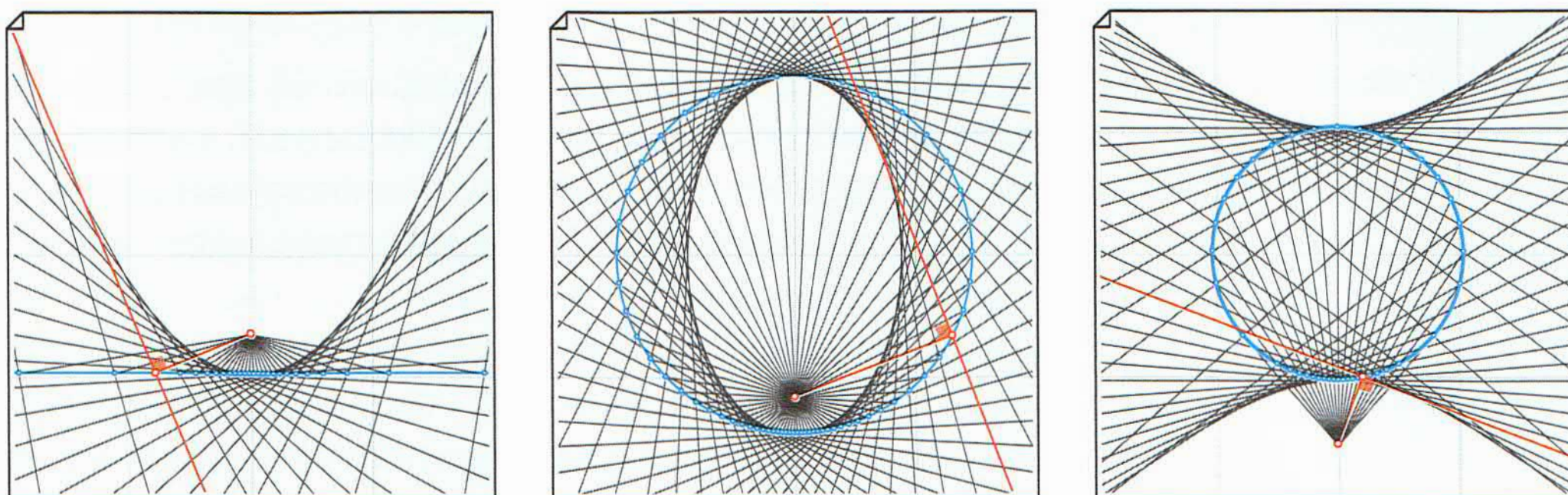
а по его вертикальной стороне скользит вершина (с грифелем) второго угла. При этом в каждый момент времени стороны второго угла проходят через штифты: один закреплён на неподвижной линейке, а другой — на горизонтальной стороне подвижного угла.



То, что линия, проведённая грифелем, будет параболой, следует из известного свойства прямоугольного треугольника: квадрат длины высоты, опущенной на гипотенузу, равен произведению длин отрезков, на которые её делит высота. Параметр параболы регулируется перемещением штифта на горизонтальной стороне первого угла.

■ Параболу можно «изготовить», проведя серию опытов с бумажным листом — в результате вы получите не нарисованную, но «видимую» линию, которой касаются многочисленные прямые.

На листе бумаги нарисуйте прямую и отметьте точку, не лежащую на этой прямой (фокус будущей параболы). Через выбранную точку на прямой проведите перпендикуляр к отрезку, соединяющему эту точку с отмеченной. Перпендикуляр можно даже не проводить карандашом, а определить на глаз и перегнуть по нему лист бумаги. Прделав процедуру для нескольких точек на прямой, вы увидите параболу, как границу области, «окружённой» линиями сгиба.

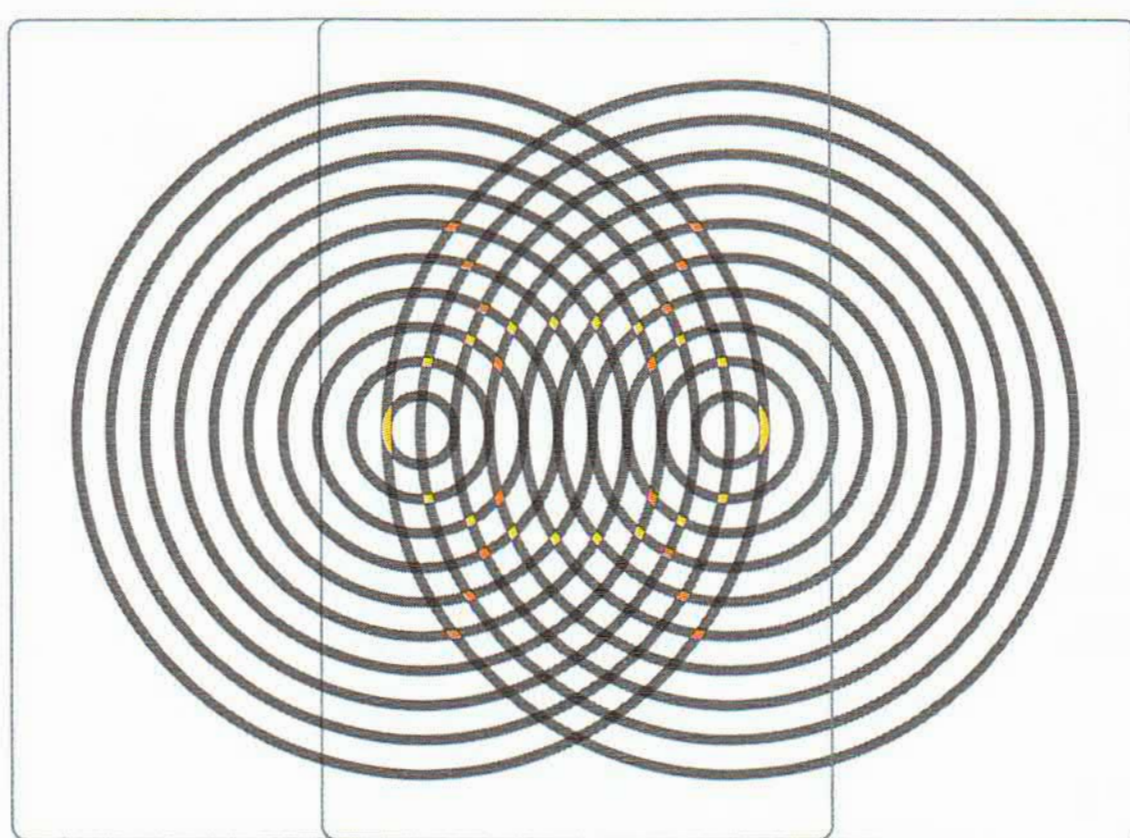
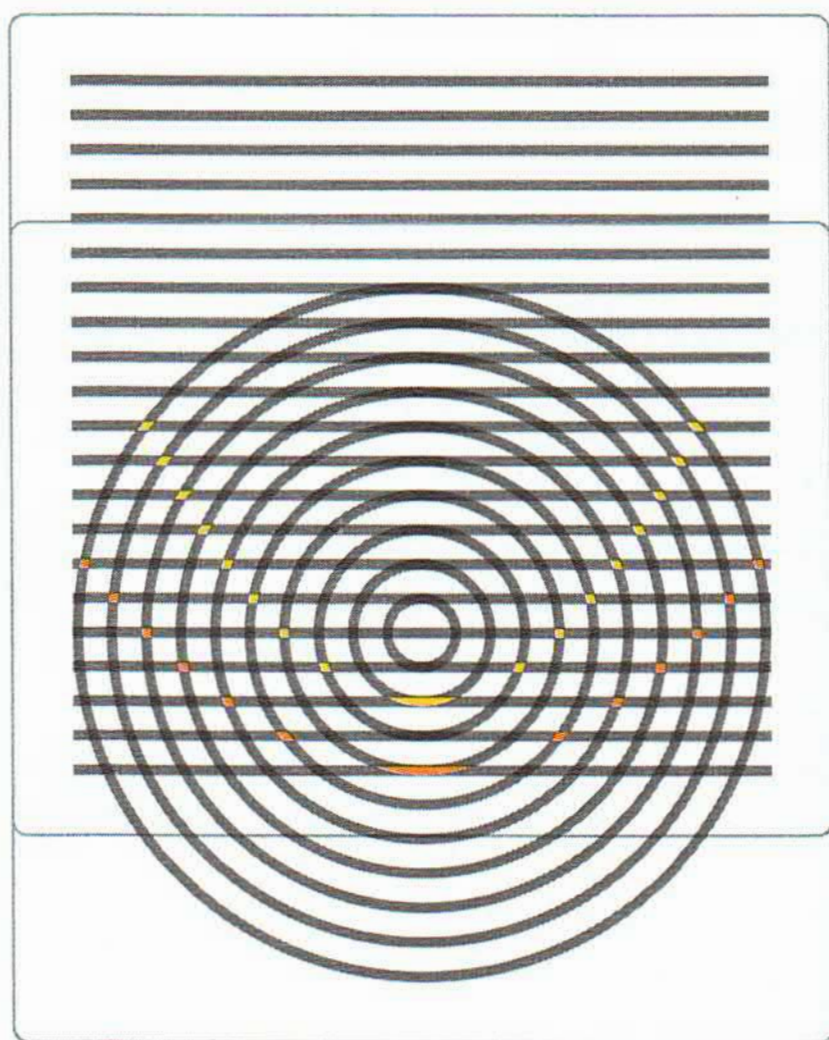


Как огибающую семейства линий (см. Болтянский В. Г. «Огибающая») можно получить и другие конические сечения (см. комментарий

к статье «Шуховские башни», стр. 322), только вместо начальной прямой нужно взять окружность. Если точка (фокус) внутри окружности, то получится эллипс (см. «Дробление камней в почках», стр. 48); если снаружи — гипербола (см. «Шуховские башни», стр. 88).

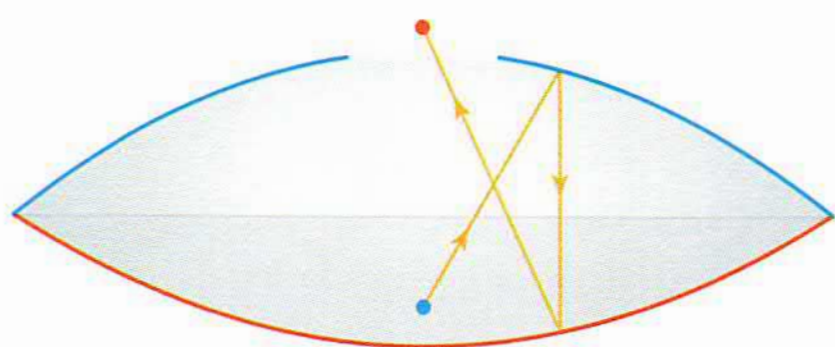
■ Все конические сечения (эллипс, параболу, гиперболу) можно получить в виде муара — дополнительного геометрического узора, образующегося при наложении двух изображений.

Возьмите «прозрачку» и на принтере напечатайте прямолинейные полосы на фиксированном расстоянии между соседними. На другом листе напечатайте круговые полосы (концентрические окружности) той же ширины и с тем же расстоянием между соседними.



Если наложить эти листы друг на друга так, чтобы одна из прямых проходила через центр окружностей, то вы увидите семейство парабол. А если наложить две одинаковые «круговые» прозрачки так, чтобы расстояние между центрами кругов было кратно расстоянию между окружностями, то можно увидеть эллипсы и пересекающие их гиперболы.

■ Читатель мог встречать впечатляющую игрушку: на крышке «летающей тарелки» вы видите объект, осязаемо-объёмный, пытаетесь его взять, и... пальцы встречают пустоту. Это иллюзорный объект, а его «появление» — результат оптического свойства параболы.



Игрушка состоит из двух соосных параболоидов вращения, чаши которых обращены друг к другу, шапочка верхней чаши срезана. На нижней чаше, в фокусе верхнего параболоида находится объект; после отражений в зеркальных стенках параболоидов в фокусе нижнего формируется изображение.

■ Исаак Ньютон заметил, что при вращении цилиндрического сосуда поверхность налитой в него жидкости принимает форму параболоида, и объяснил это явление с помощью найденных им самим законов.

В наше время этот эффект используют при изготовлении больших параболических зеркал для телескопов — этот способ быстрее и дешевле, чем классическая шлифовка. А иногда создают и «временные» телескопы с жидким зеркалом: сосуд с ртутью вращают только во время проведения наблюдений.

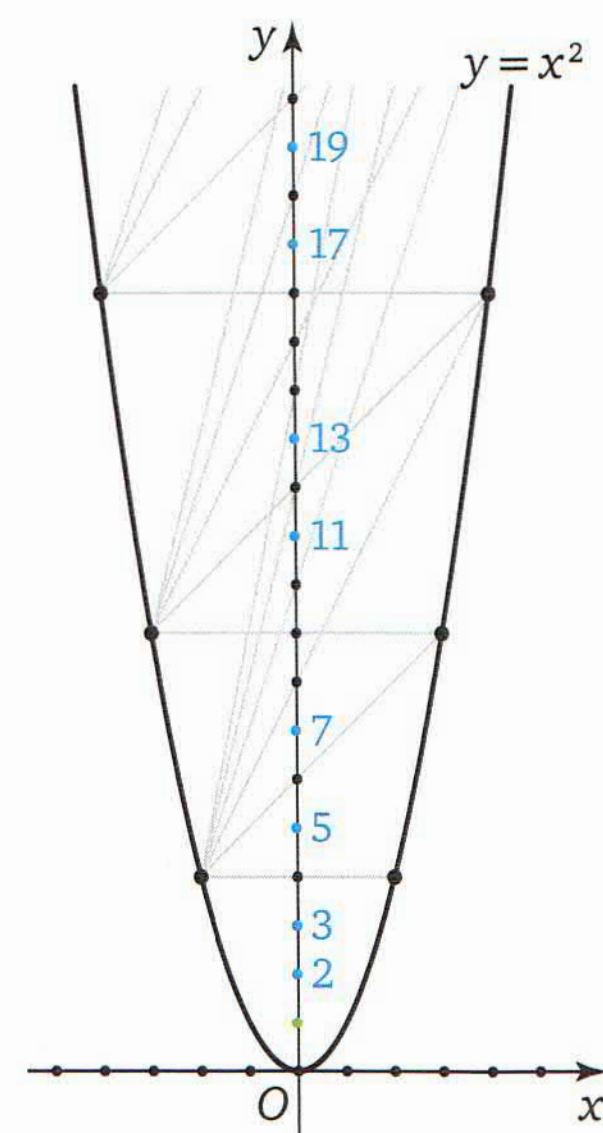
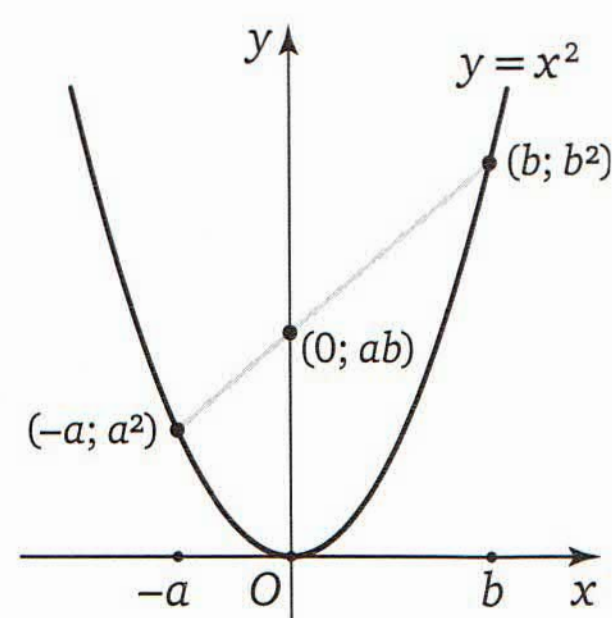
■ «Параболическими» являются такие альпийские и арктические цветы, как прострел альпийский, беквичия ледниковая, полярный мак. Благодаря оптическому свойству параболы у таких цветов ускоряется созревание семян. Ещё одно полезное для цветов следствие их параболичности — привлечение насекомых, которые любят «понежиться» в чаше цветка, а это влияет на опыление.

■ Если на параболе $y = x^2$ по разные стороны от оси Oy взять точки $(-a; a^2)$ и $(b; b^2)$, то соединяющий их отрезок пересечёт ось Oy в точке $(0; ab)$. Первым это отметил Август Мёбиус, имя которого носит знаменитая односторонняя лента.

Можно взглянуть на этот факт и с другой стороны: через точку $(0; N)$, где $N = ab$ — составное число, проходит хорда параболы описанного вида (a и b — натуральные числа, отличные от 1). А через точку вида $(0; p)$, где p — простое число, не проходит ни одна подобная хорда.

Это замечание можно превратить в алгоритм, позволяющий найти все простые числа до некоторого n : «параболическое решето», отсеивающее все составные числа.

- Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые. — 2-е изд. — М.: Наука, 1978. — [Ко 2-му изданию книга была значительно переработана и дополнена, с тех пор переиздавалась несколько раз].
- Маркушевич А. И. Замечательные кривые. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1952. — (Популярные лекции по математике; Вып. 4).
- Савин А. Морские границы // Журнал «Квант». 1994. № 4. Стр. 32—33.
- Розенфельд Б. А. Аполлоний Пергский. — М.: МЦНМО, 2004.



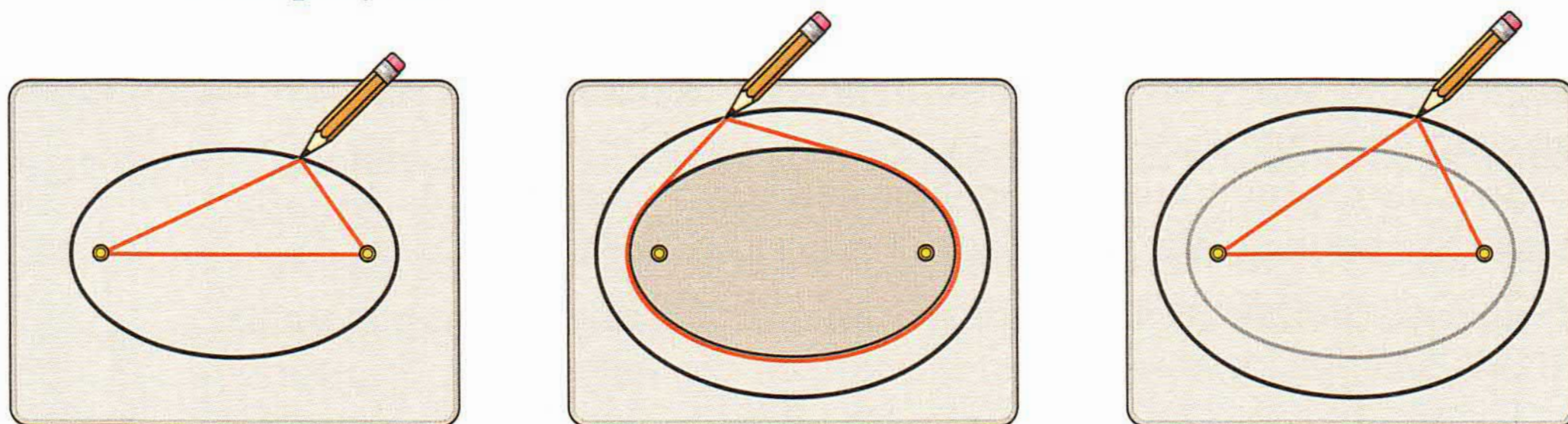
- Moore P. D. Tundra. — N.Y.: Facts on File, 2008. — [Информация о северных цветах].
- Параболическая антенна // Математические этюды. — <http://www.etudes.ru/ru/etudes/parabolic-antenna/>
- Конические сечения: парабола // Математические этюды. — <http://www.etudes.ru/ru/models/#conic-sections-parabola>

Дробление камней в почках 48

■ Построение эллипса с помощью нити открывает дорогу к построению софокусных эллипсов и «дарит» любопытные факты из жизни этих кривых.

Взяв нить со связанными концами, охватывающую фокусы, и натянув её с помощью карандаша, нарисуем эллипс. Нити разной длины дадут целое семейство софокусных эллипсов. Но можно охватывать не отрезок, соединяющий фокусы, а один из уже полученных эллипсов.

Нарисовав эллипс, изготовим его «физическую» копию из достаточно толстого материала, а затем совместим копию с оригиналом. Возьмём нитяную петлю, которой можно охватить эллипс, и, оттянув её карандашом, проведём овальную линию. Оказывается, это тоже эллипс, причём софокусный исходному. Утверждение можно проверить экспериментально, подобрав длину петли, охватывающей фокусы.

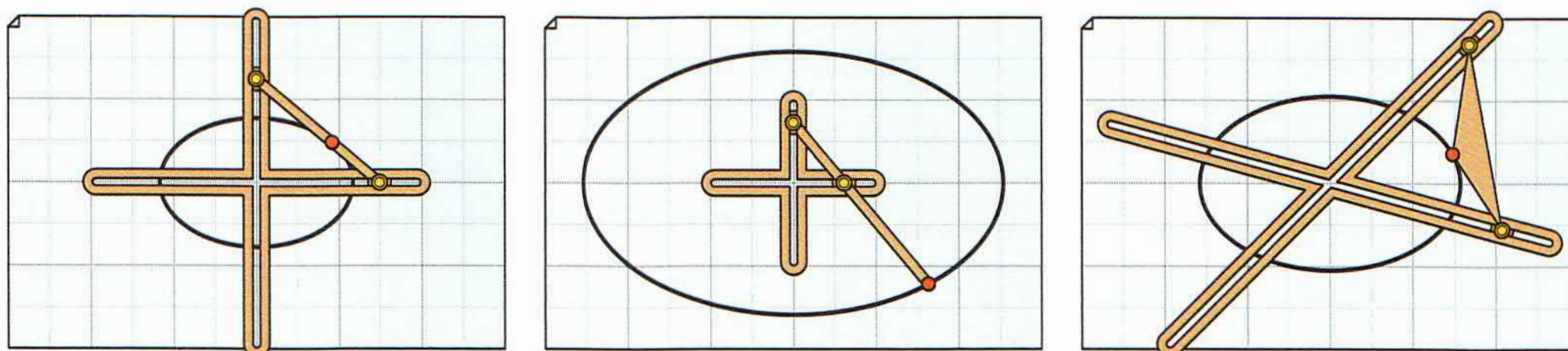


Эту теорему в XIX веке доказал ирландец Чарльз Грейвс, епископ и математик. В книге Феликса Клейна «Высшая геометрия» один из параграфов называется «Построение из нитей Грейвса и Штауде».

Доказательство теоремы Грейвса можно прочитать в книге Клейна. Отметим, что оно не является элементарным, причина в том, что в каждый момент нить как линия состоит из двух отрезков, касательных к эллипсу, и дуги эллипса. Удивительно, но дуга эллипса — непростой объект, её длина выражается сложной формулой (используются так называемые эллиптические интегралы).

■ Эллипсограф — устройство для вычерчивания эллипсов — можно встретить уже в работах Леонардо да Винчи. Такие механизмы несложно изготовить и в домашних условиях.

Простейшая идея: точка отрезка, концы которого скользят по двум перпендикулярным прямым, описывает эллипс. Модификация: точка выбирается на продолжении отрезка.



Более редкая идея. Две вершины треугольника скользят по двум пересекающимся прямым (не обязательно перпендикулярным) — траектория третьей вершины будет эллипсом.

■ О происхождении и значении термина «фокус», об эллипсе как огибающей семейства прямых и о том, как получить эллипс в виде муарового узора, см. комментарии к статье «Параболическая антенна» (стр. 297). Про конические сечения см. комментарии к статье «Шуховские башни» (стр. 322).

- Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые. — 2-е изд. — М.: Наука, 1978. — [Ко 2-му изданию книга была значительно переработана и дополнена, с тех пор переиздавалась несколько раз].
- Маркушевич А. И. Замечательные кривые. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1952. — (Популярные лекции по математике; Вып. 4).
- Эллипс // Журнал «Квант». 1990. № 5. Стр. 40—41.

Выбор короткой очереди 50

- Райгородский А., Литвак Н. Кому нужна математика?: Понятная книга о том, как устроен цифровой мир. — М.: МИФ, 2017.

Точность теста 51

■ Приведём некоторые понятия теории вероятностей, чтобы можно было представить в виде формул изложенное в статье. Обозначения: если A — какое-то событие, то \bar{A} — противоположное событие (A не произошло); AB — произведение событий A и B (т. е. произошли и A , и B).

Условная вероятность события A при условии, что произошло событие B , определяется равенством $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Условная вероятность говорит о степени зависимости A от B .

Событие A можно разделить на непересекающиеся части в зависимости от события B : AB и $A\bar{B}$. Отсюда получается формула полной вероятности:

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}).$$

Эта формула часто оказывается полезной, позволяет найти вероятность $P(A)$ «по частям», если проще найти $P(AB)$ и $P(A\bar{B})$.

Формула Байеса является простым следствием формулы полной вероятности (знаменатель правой части):

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}.$$

Если событие B хронологически происходило раньше, чем A , то у условных вероятностей $P(A|B)$ и $P(A|\bar{B})$ есть понятный временной смысл. Формула Байеса представляет вероятностные характеристики «старого» события B с учётом «новых» данных по событию A .

■ Чтобы найти условную вероятность того, что пациент болен, если тест положительный, нужно воспользоваться формулой Байеса.

В примере, рассмотренном в статье, событие A — тест положителен, B — пациент болен. Считаются известными величины: $P(A|B) = 0,98$; $P(B) = 0,05$; $P(A|\bar{B}) = 0,1$. Тогда вероятность наличия заболевания при положительном результате теста находится по формуле

$$P(B|A) = \frac{0,98 \cdot 0,05}{0,98 \cdot 0,05 + 0,1 \cdot 0,95} \approx 0,34 \quad (< 0,98).$$

Таким образом, вероятность того, что пациент здоров, хотя тест положительный, равна 0,66.

■ Вот любопытный жизненный пример применения формулы полной вероятности. Предположим, что студент перед экзаменом успел выучить только 23 билета из 25. Зависит ли вероятность вытянуть «хороший», выученный билет от того, каким по порядку он тянет билет?

Пусть A означает, что студенту достался «хороший» билет. Если студент берёт билет первым, то $P(A) = \frac{23}{25}$. А если первым берёт билет одноклассник, то определим событие B : один из «хороших» билетов достался ему. Если студент тянет билет вторым, то формула полной вероятности позволяет найти и в этом случае вероятность выбора «хорошего» билета (события A):

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) = \\ &= \frac{22}{24} \cdot \frac{23}{25} + \frac{23}{24} \cdot \frac{2}{25} = \frac{23 \cdot (22 + 2)}{24 \cdot 25} = \frac{23}{25}. \end{aligned}$$

Поясним часть выкладок. Например, $P(A|B) = \frac{22}{24}$, так как если B произошло, то остались 24 билета, среди них «хороших» — 22. Аналогично находим, что $P(A|\bar{B}) = \frac{23}{24}$.

Как видим, вероятности совпали. Можно показать, что результат будет тот же, если студент тянет билет третьим, четвёртым и т. д. Даже в случае, когда число сдающих экзамен равно числу билетов и студент берёт билет последним, а билет остался только один — всё равно $P(A) = \frac{23}{25}$. Получается, что исторически сложившаяся процедура проведения экзаменов — устойчива и «справедлива»!

История с двумя невыученными билетами описана Львом Толстым в повести «Юность». Герой повести, Николай Иртеньев, идёт на экзамен по математике, не выучив только два билета: «Теория сочетаний» и «Бином Ньютона»...

Бином Ньютона сыграл особую роль и в жизни самого Толстого. Лев Николаевич рассказывал: «Я всегда любил математику. Но ужасно учился в своё время. Ведь я выдержал университетский экзамен только потому, что перед самым экзаменом подготовил бином Ньютона, да и то ничего не понимал...» (Цингер А. В. У Толстых // О Толстом: Международный Толстовский альманах / Сост. П. А. Сергеев. — М.: Книга, 1909. — Стр. 375).

- Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. — М.: Наука, 1971.
- Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1982. — (Библиотечка «Квант»; Вып. 23).

Кривая поворота 52

■ Инженеру-строителю непросто рассчитать параметры дороги в форме клотоиды — это сложная вычислительная задача. Кроме того, приходится учитывать всевозможные внешние обстоятельства. Например, это могут быть ограничения на длину переходного участка (с прямолинейного отрезка на дугу окружности). Поэтому на практике, и в автодорожном деле, и при сооружении железных дорог, часто используют кубическую параболу, хорошо приближающую клотоиду ($y = ax^3$ — пример кубической параболы).

■ Замечательные кривые находят множество применений. Клотоида, «герой» поворотов автодорог, впервые была рассмотрена Якобом Бернулли в связи с задачей о форме упругой пластины. Позднее кривую изучал Эйлер, так что часто её называют спиралью Эйлера. А ещё клотоида называется спиралью Корню, в честь французского

физика, использовавшего её для решения задач физической оптики. Относительно недавно эта кривая даже стала гвоздём аттракциона: в 1970-е годы в Германии сконструировали американские горки с мёртвой петлёй, часть которой — дуга клотоиды. В отличие от прежних конструкций здесь решена проблема безопасности: посетители не рискуют получить травму, что объясняется гладкостью прохождения виражей.

- Цеглинский К. Железнодорожный путь в кривых. — М.: Т-во типо-литографии В. Чичерин, 1903.

Колёсные пары железнодорожных составов 53

■ Приведём некоторые технические детали.

Масса одной колёсной пары равна 1000 кг. Если же пара ведущая, то на ней имеется ещё шестерёнка для соединения с двигателем, и тогда её масса составляет почти полторы тонны.

По стратегическим соображениям ширина железнодорожных путей совпадает с шириной путей метрополитена. Поэтому колёсные пары в железнодорожных составах и в поездах метро одинаковы.

- Цеглинский К. Железнодорожный путь в кривых. — М.: Т-во типо-литографии В. Чичерин, 1903.
- Виргинский В. С. История техники железнодорожного транспорта. — Вып. 1. — М.: Трансжелдориздат, 1938. — [Глава VII «Техническое развитие железнодорожного пути»].
- Видеозапись рассказа Р. Фейнмана из цикла «Fun to Imagine». — BBC, 1983.

Поворот передних колёс автомобиля 54

■ Механизм рулевой трапеции на основе шарнирной равнобокой трапеции часто называют четырёхугольником Жанто в честь придумавшего его мастера. Но в этом простом механизме даже теоретически нельзя добиться идеального результата: чтобы при повороте передних колёс точка пересечения продолжения их осей всё время находилась на продолжении задней оси.

С достаточной для практических нужд точностью это достигается: стороны трапеции Жанто подбираются так, чтобы точка пересечения передних осей находилась «рядом» с прямой задней осью. Теорию четырёхугольника Жанто изложил профессор Московского университета Болеслав Корнелиевич Млодзеевский в небольшой работе «К теории управления в автомобилях» (Вестник инженеров, 1917, № 2, стр. 37—41).

- Геометрия поворота // Математические этюды. — <http://www.etudes.ru/ru/etudes/steering-geometry/>

■ Параметрические уравнения винтовой линии — это удобные технически и наглядные формулы. Если взять прямой круговой цилиндр, заданный в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, то можно проверить, что уравнения

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ht$$

будут задавать винтовую линию. Действительно, эта линия будет лежать на поверхности цилиндра, так как

$$x^2 + y^2 = (a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 = a^2.$$

Проекция точки $(a \cos t; a \sin t; ht)$ на плоскость Oxy имеет координаты $(a \cos t; a \sin t; 0)$. Это означает, что проекция «бежит» по окружности, t можно считать углом поворота вектора $(x; y)$ вокруг точки O , скорость этого вращения постоянна. Формула $z = ht$ «сообщает», что и движение вдоль оси Oz происходит с постоянной скоростью.

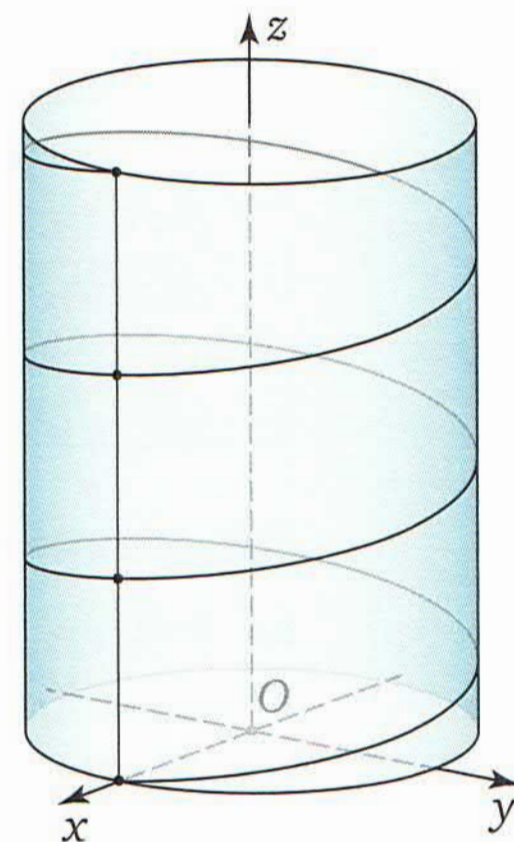
Обратите внимание на то, что в уравнении цилиндра отсутствует переменная z , благодаря этому окружность $x^2 + y^2 = a^2$ из плоскости Oxy скользит по «бесконечному лифту» вдоль оси Oz .

■ Для винтовой линии можно дать эквивалентное геометрическое определение: это линия на поверхности цилиндра, которая пересекает все образующие цилиндра под равными углами.

■ Прямую и окружность можно рассматривать как вырожденные, предельные случаи винтовой линии, что следует и из определений винтовой линии, и из её уравнений. Как и в «общем» случае, отрезок может скользить по прямой, а дуга — по своей окружности. Это давно знают оружейники: клинок и ножны в плоском случае могут быть только двух видов — или прямолинейными, или дугами одной окружности.

■ Представление о винтовой линии как о диагонали прямоугольной плёнки, намотанной на цилиндр, приводит к интересным практическим выводам. Например, кратчайшая линия, соединяющая две точки на поверхности цилиндра, — дуга винтовой линии. В предельных случаях это отрезок образующей (если точки лежат на одной образующей) или дуга окружности (если точки лежат на одной окружности).

- Люстерник Л. А. Кратчайшие линии. — М.: ГИТТЛ, 1955. — (Популярные лекции по математике; Вып. 19).



■ В некоторых моделях автомобилей «дворники» движутся навстречу друг другу (то сходятся, то расходятся). Предлагаем читателю самостоятельно разработать схему такого механизма, а затем сравнить придуманное с существующими техническими решениями.

- Артоболевский И. И. Механизмы в современной технике: В 7 т. — Т. 1: Элементы механизмов. Простейшие рычажные и шарнирно-рычажные механизмы. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука, 1979.
- Шарнирные механизмы // Математические этюды. — <http://www.etudes.ru/ru/etudes/windscreen-wiper/>
- Механизмы П. Л. Чебышева. — <http://tcheb.ru>

■ Как связано расстояние до горизонта с изменением высоты точки наблюдения? Формула $d \approx \sqrt{2Rh}$ даёт ответ: чтобы увеличить расстояние d вдвое, высоту h надо увеличить в четыре раза!

■ В формуле $d \approx \sqrt{2Rh}$ нам пришлось извлекать квадратный корень. Конечно, читатель может взять смартфон со встроенным калькулятором, но, во-первых, полезно задуматься, а как же решает эту задачу калькулятор, а во-вторых, стоит ощутить умственную свободу, независимость от «всезнающего» гаджета.

Существует алгоритм, сводящий извлечение корня к более простым операциям — сложению, умножению и делению чисел. Для извлечения корня из числа $a > 0$ рассмотрим последовательность

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right),$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, а в качестве x_0 можно взять любое положительное число. Последовательность x_0, x_1, x_2, \dots очень быстро сходится к \sqrt{a} : точность приближения возрастает вдвое после каждого шага.

Например, при вычислении $\sqrt{0,32}$ можно взять $x_0 = 0,5$. Тогда

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(0,5 + \frac{0,32}{0,5} \right) = 0,57, \quad x_2 = \frac{1}{2} \left(0,57 + \frac{0,32}{0,57} \right) \approx 0,5657.$$

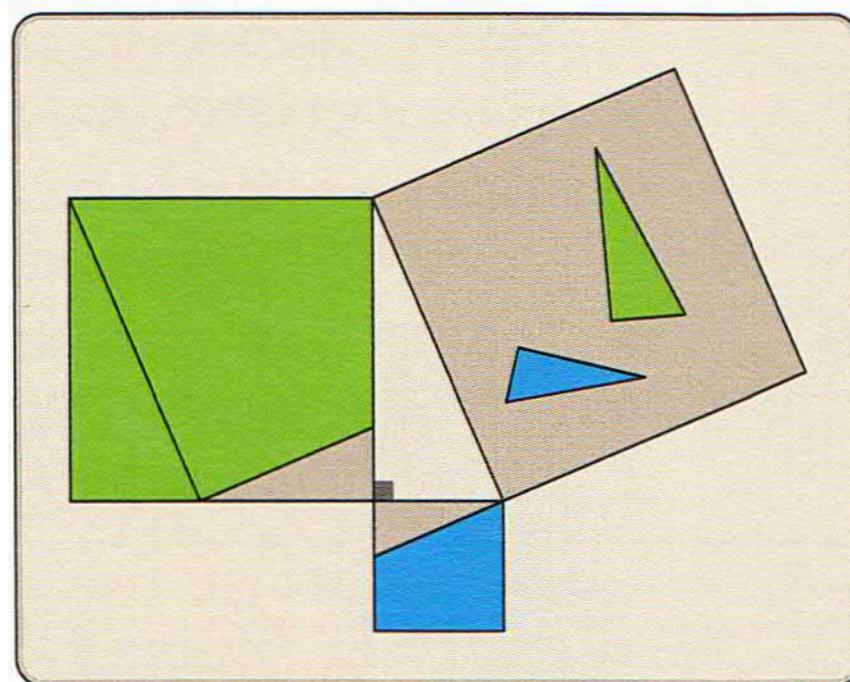
Уже на втором шаге мы получили ответ, верный в третьем знаке после запятой ($\sqrt{0,32} = 0,56568\dots$)!

Для знакомых с понятием производной поясним: у функции $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$ производная $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2} < \frac{1}{2}$, поэтому функция f «сжимает» окрестность точки \sqrt{a} более чем вдвое (в математике такие отображения и называются сжимающими).

■ Теорему Пифагора можно запомнить и усвоить значительно лучше, если к обычному геометрическому доказательству добавить преодоление трудностей в решении головоломки, конструкция которой основана на этой теореме. Заметим, что формула $a^2 + b^2 = c^2$, связывающая стороны прямоугольного треугольника, выражает равенство площадей: площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

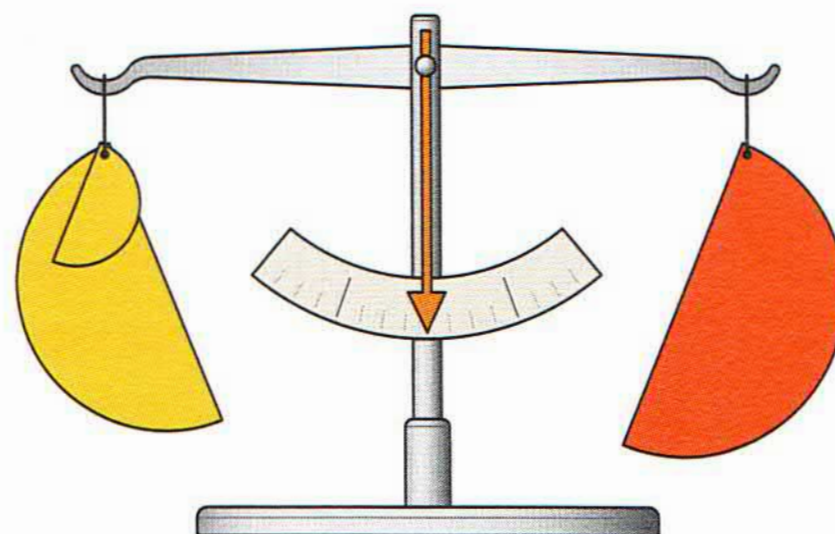
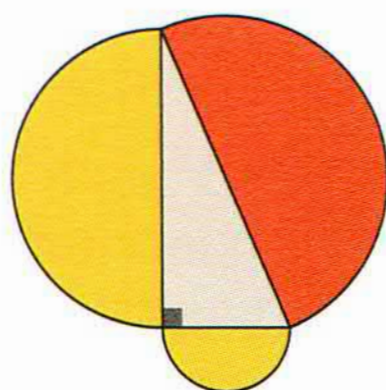
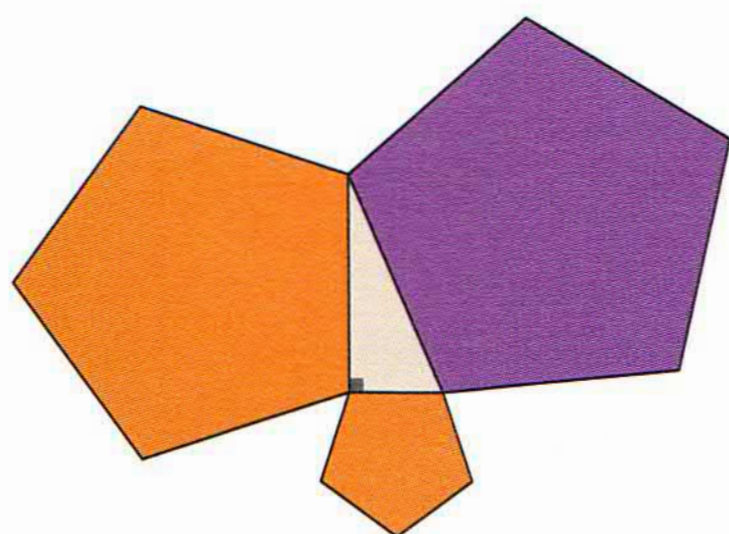
Планиметрическая теорема Бойаи—Гервина утверждает, что два равновеликих многоугольника (т. е. имеющих равные площади) равноставлены. Последнее означает, что любой из них можно разрезать на несколько многоугольников так, что из этих частей можно сложить второй многоугольник.

Применительно к конструкции в теореме Пифагора получаем, что квадраты, построенные на катетах, можно разрезать на части-многоугольники, из которых «складывается» квадрат, построенный на гипотенузе. Подобных разбиений множество, но самое экономное только одно, наименьшее число частей равно 5. Обратите внимание на то, что такое разбиение возможно для произвольного прямоугольного треугольника.



Головоломку проще всего изготовить из двух листов толстого картона: один будет служить основанием, на другом вырезаются три квадрата, затем листы склеиваются. Два меньших квадрата разрезаются на части. Задание — сложить из кусочков маленьких квадратов большой, без пустот и наложений элементов.

Ещё один тип учебных пособий, иллюстрирующих теорему Пифагора, связан со взвешиванием «изготовленных» геометрических фигур.



Чтобы теорема Пифагора стала утверждением о равенстве площадей, на сторонах прямоугольного треугольника были построены квадраты. Но если их заменить однотипными подобными правильными

многоугольниками или полукругами, то сумма площадей на катетах также будет равна площади фигуры на гипотенузе. Например, для полукругов равенство площадей

$$\frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 = \frac{\pi}{8}c^2$$

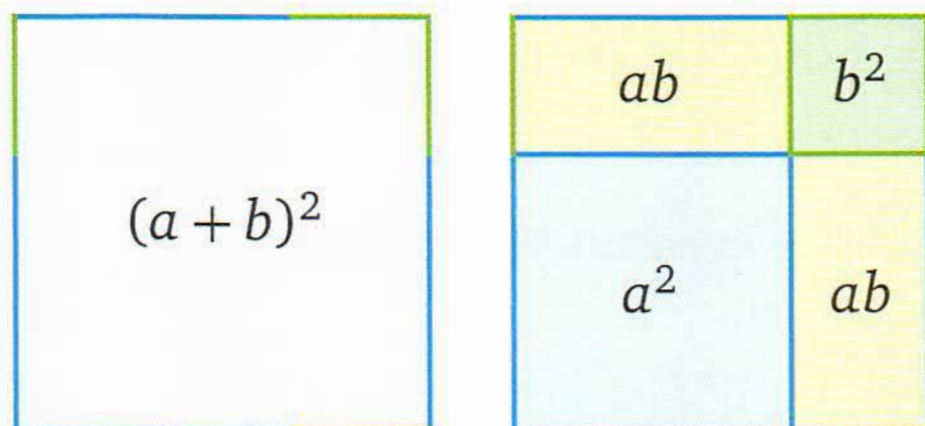
получается из теоремы Пифагора умножением элементов формулы на число $\frac{\pi}{8}$.

А вот если взять трёх «подобных» слонов, стоящих на сторонах треугольника и «вписанных» в квадраты, то готовой формулы для площадей таких фигур нет, но из подобия фигур можно вывести, что по площади каждая фигура занимает в своём квадрате одну и ту же часть:

$$S_a + S_b = ka^2 + kb^2 = kc^2 = S_c.$$

Можно проверить справедливость этих выводов опытным путём, взвесив на весах (например, простейших рычажных) эти фигуры, и убедиться, что $S_a + S_b = S_c$. Причём начать можно с самих квадратов со сторонами a , b и c .

■ Иногда алгебраические формулы удаётся столь наглядно представить геометрически, что всё «доказательство» заключается в рисунке с подписью «Смотри!» (в стиле древних индийских математиков).



Объяснить геометрически можно и использованную в статье формулу «сокращённого умножения» для квадрата суммы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Жан-Жак Руссо в «Исповеди» писал:

« Когда я в первый раз обнаружил при помощи вычисления, что квадрат бинома равен сумме квадратов его членов и их удвоенного произведения, я, несмотря на правильность произведённого мною умножения, не хотел этому верить до тех пор, пока не начертил фигуры. »

- Перельман Я. И. Занимательная геометрия на вольном воздухе и дома. — Л.: Время, 1925. — [Подходит и любое издание книги Я. И. Перельмана «Занимательная геометрия»].
- Литцман В. Теорема Пифагора. — Одесса: Mathesis, 1912. — [Переиздания: 1935, 1960].
- Интерактивная головоломка «Теорема Пифагора» // Математические этюды. — <http://www.etudes.ru/ru/etudes/pythagorean-theorem/>

■ На практике авиакомпания не всегда удаётся выбрать «геодезический» маршрут между двумя городами. Приходится учитывать и другие многочисленные условия и обстоятельства, постоянные и меняющиеся: наличие запретных для полёта зон; особые правила полёта над океаном и правила для самолётов с двумя двигателями (регламентируется максимальная удалённость маршрута от аэропортов); стоимость диспетчерского обслуживания при пересечении воздушного пространства той или иной страны; загруженность воздушных перекрёстков; погодные условия.

■ Можно ощутить, насколько реальный маршрут из Москвы в Петропавловск-Камчатский забирается на север, если отметить на карте города, над которыми он пролегает: Ярославль, Котлас, Сыктывкар, Ухта, Салехард, Норильск, Магадан.

■ Кривизна поверхности Земли рассматривается с точки зрения геометрии в статье «Искривлённые миры» (стр. 222). В статье «Картографические проекции» (стр. 136) рассказано о способах отображения земной поверхности на плоских картах.

■ В полётах самолётов есть математическая составляющая, в жизни пилотов — профессиональная и эмоциональная составляющие. Яркие рассказы об этом мире оставили профессиональные лётчики. Антуан де Сент-Экзюпери, которого все знают как автора «Маленького принца», написал роман «Южный почтовый». Василий Васильевич Ершов, много лет летавший в небе Восточной Сибири, написал о «лётной» жизни ряд книг, название одной из них — «Раздумья ездового пса».

- Люстерник Л. А. Кратчайшие линии. — М.: ГИТТЛ, 1955. — (Популярные лекции по математике; Вып. 19).

■ Почему матросу, намотавшему канат несколько раз вокруг кнехта, удаётся подтянуть к пристани многотонный корабль?

Дело в том, что сила трения каната о цилиндры тумбы и число витков вокруг них увеличивают «силу» матроса экспоненциально (см. книгу: Шубин М. А. Математический анализ для решения физических задач). Но сила трения определяется материалом, от поведения на пристани не зависит, а вот число витков — величина, зависящая от мастерства и сноровки моряка. При трёх

оборотах каната и при типовом значении коэффициента трения сила, с которой матрос тянет канат, увеличивается на несколько порядков, примерно в 500 раз. Если усилие, прикладываемое матросом, соответствует весу в 10 кг, то канат будет тянуть судно с силой, соответствующей 5000 кг. Просто представьте грузовик в 5 тонн!

■ Исаак Ньютон писал Готфриду Вильгельму Лейбницу (переписка двух главных создателей анализа бесконечно малых шла через секретаря Лондонского Королевского общества Генри Ольденбурга):

«Сущность этих действий, которую, впрочем, довольно легко усмотреть, я (ввиду того, что не могу привести здесь его объяснения) лучше передам в следующем скрытом виде: 6accdæ13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx.»

В приведённой анаграмме сообщается, сколько раз в зашифрованном тексте встречаются буквы алфавита. Запись вида «ба» говорит, что буква «а» встречается 6 раз; сочетание «æ» упоминается отдельно; «и» и «v» в те времена на письме не различали. Зашифрованная латинская фраза: «Data æquatione quocunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, et vice versa».

Владимир Игоревич Арнольд в своей книге «Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений» писал:

«В переводе на современный математический язык это означает: «Полезно решать дифференциальные уравнения.»»

Классическим подтверждением этих слов является обнаружение в 1846 году Нептуна — восьмой и самой дальней от Земли планеты Солнечной системы. Математик Леверье определил параметры орбиты ещё не открытой планеты, и благодаря его расчётам в определённое время в указанном направлении она была обнаружена астрономом Галле. Франсуа Араго, в то время директор Парижской обсерватории, так оценил это событие:

«Астрономы иногда случайно находят видимую в телескоп движущуюся точку — планету. Леверье открыл новую планету, ни разу не взглянув на небо: он увидел её на кончике пера. Он вывел существование планеты силой одного лишь расчёта.» (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. 23, juillet—décembre 1846, p. 660.)

- Арнольд В. И. Математическое понимание природы. — М.: МЦНМО, 2010. — [Очерк «Задача Лидова о прилунении ракет»].
- Дворянинов С., Краутер З., Протасов В. Сколько времени длится причаливание? // Журнал «Квант». 2017. № 11. Стр. 2—9.

Складывание карт 65

- *Nishiyama Yu.* Miura folding: applying origami to space exploration // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2012. V. 79. N. 2. P. 269—279.

Кратчайший путь 66

■ Радиально-кольцевая планировка Москвы сложилась исторически: город разрастался вокруг Кремля «вековыми кольцами», во внешний мир уходили магистральные дороги в виде лучей, получавшие свои названия по тем городам, монастырям и даже странам, к которым они вели. Например, Тверская улица шла к Твери (некогда — сопернице Москвы), а позднее стала началом главной дороги к Северной столице, Санкт-Петербургу. Пречистенка вела к Новодевичьему монастырю, где хранилась икона Пречистой Божией Матери Смоленской, а Большая Ордынка — в Золотую Орду.

Главные кольцевые дороги старой Москвы — Бульварное кольцо и Садовое кольцо — возникли на месте снесённых стен и укреплений, утративших военное значение: стен Белого города и Земляного вала соответственно.

Ещё один пример радиально-кольцевой планировки в нашей стране — Софийская сторона Новгорода. В Европе многие столицы возникали на месте старых крепостей и сохранили порождённую этим обстоятельством радиальную структуру, яркие образцы — Вена и Париж.

С появлением метро радиально-кольцевые структуры стали уходить и под землю. И если в Москве схема метрополитена стала проекцией линий наземных дорог, то в других случаях радиально-кольцевые схемы метро возникали вне связи с тем, что происходило «наверху», пример — метро в Мадриде.

■ Радиян — это центральный угол, опирающийся на дугу окружности, длина которой равна её радиусу. Происхождение термина «радиан» связано с радиусом круга; *radius* в латыни — спица в колесе, луч. В математической литературе термин «радиан» появился только в XIX веке, хотя сам способ измерения углов был известен и ранее. Например, радианное измерение углов использовал Леонард Эйлер, выводя знаменитую формулу $e^{i\pi} + 1 = 0$. В данном сюжете само определение радиана становится инструментом решения задачи о пешеходной прогулке от «Маяковской» до «Курской» по разным маршрутам.

■ В статье анализировались маршруты, соединяющие точки, лежащие на одной «городской» окружности. Но аналогичные выводы можно получить и для любых двух точек в городе с радиально-кольцевой планировкой.

■ Слово «градус» к нам пришло из латыни, а туда попало из работ вавилонских жрецов. Изучая движение Солнца, они делили его путь на 360 градусов — шагов в движении по кругу (180 днём и 180 ночью). Всё это связано и с применявшейся в Месопотамии шестидесятеричной системой. В Европе градус как научный термин появился в XVI веке.

Так что если в вашем смартфоне есть шагомер, можете называть его «градусником».

■ Читатель может проверить результаты собственных вычислений на самых глубоких станциях двух столиц: 86 м — «Адмиралтейская» в Санкт-Петербурге, 73 м — «Парк Победы» в Москве.

- Как мы строили метро. — М.: Полиграфкнига, 1935.
- Катцен И. Метро Москвы. — М.: Московский рабочий, 1947.

■ В шахматах расстояние между полями измеряется длиной и формой «шага» фигуры. Так, король может двигаться по вертикалям, горизонталям и диагоналям, за один шаг — на одну клетку. Поля, на которые можно попасть, сделав не более определённого числа ходов, — это «шар» относительно такого расстояния, но этот «шар» имеет форму квадрата.

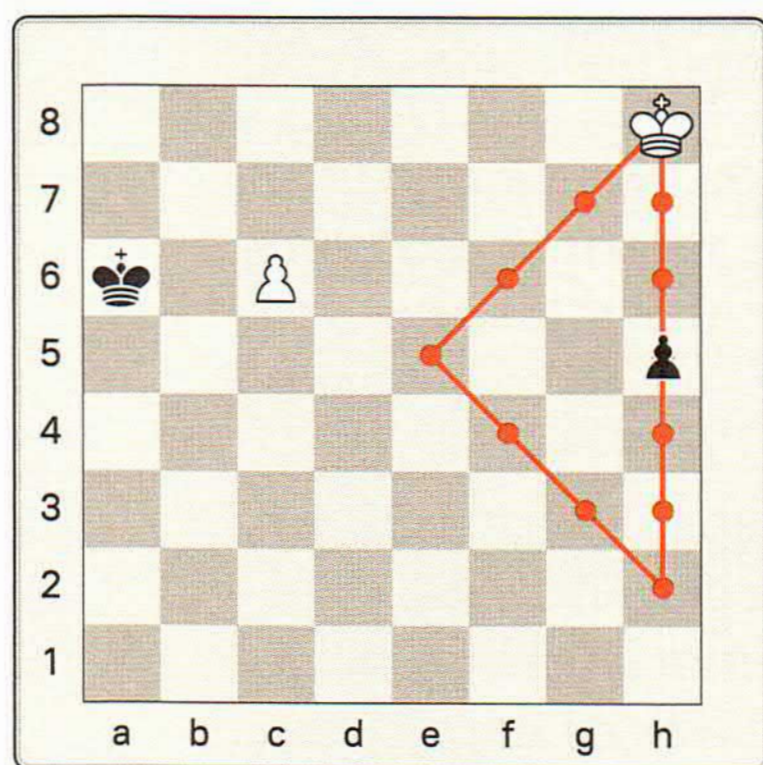
На этом непривычном, парадоксальном с бытовой точки зрения обстоятельстве основан знаменитый этюд чешского гроссмейстера

Рихарда Рети, в котором задание «Ничья» кажется недостижимым результатом для белых. (В шахматных этюдах обычно начинают белые.)

В данном случае добиться ничьей белые смогут только в двух случаях: 1) если белый король догонит и съест чёрную пешку; 2) если белый король чудесным образом окажется рядом со своей пешкой и поможет ей «своевременно» превратиться в ферзя.

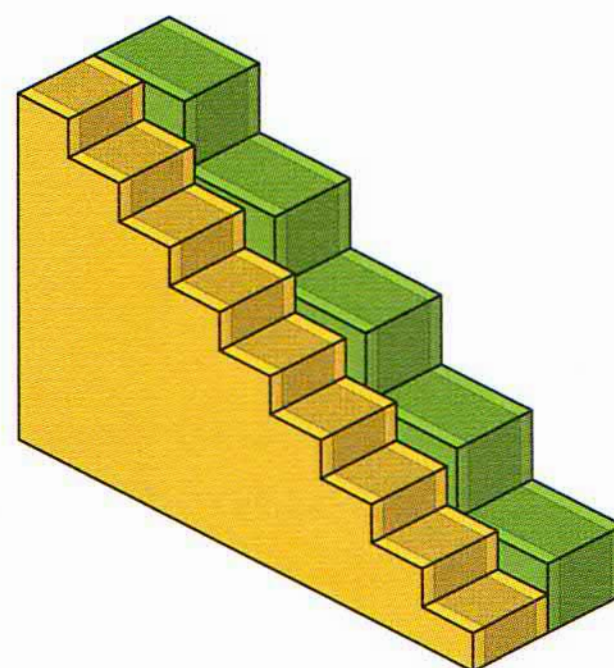
Геометрическая основа решения — то, что путь белого короля $h8 \rightarrow e5 \rightarrow h2$ имеет ту же «длину» (число ходов), что и «прямой» отрезок $h8-h2$. А достигнув поля $e5$, король ста-

новится не только догоняющим чёрную пешку, но и проводником, защитником собственной пешки на поле $c6$. И в зависимости от ходов чёрных фигур, может быть реализован первый или второй



вариант достижения ничьей. (Отметим, что в одном из разветвлений белому королю с поля f6 приходится сразу отправляться через е6 на помощь своей пешке.)

■ «Расстояние городских кварталов» можно встретить и внутри домов — от дачных домиков до музеев. Размеры ступеней лестничного марша, соединяющего фиксированные точки на площадках, можно выбрать разными (строится «ступенчатая гипотенуза» прямоугольного треугольника). Но длина ковровой дорожки, закреплённой на ступенях лестницы, будет одинаковой независимо от размеров ступенек: сумма длин вертикальных участков ковра равна длине вертикального катета (расстояние по вертикали между площадками), горизонтальных — горизонтального. Это иллюстрация неоднозначного выбора кратчайшего пути в манхэттенской метрике, а ещё — классическая задача для детей.



- Шрейдер Ю. А. Что такое расстояние? — М.: ГИФМЛ, 1963. — (Популярные лекции по математике; Вып. 38).
- Скворцов В. А. Примеры метрических пространств. — М.: МЦНМО, 2002. — (Библиотека «Математическое просвещение»; Вып. 16).

Формат А4 70

■ Знание отношения сторон в формате А и десятичной записи числа $\sqrt{2}$ облегчает выполнение стандартных офисных операций. Например, как на копировальном аппарате перевести лист А4 в лист А3? Коэффициент подобия этих листов равен $\sqrt{2}$, для решения задачи копирования можно взять приближённое значение $\sqrt{2} \approx 1,4$ и выставить на ксероксе коэффициент увеличения, равный 140%. А если надо «превратить» лист А4 в лист А5, то коэффициент уменьшения будет равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Замечательно, что его «рабочее»

значение легко найти и без технических средств: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$. Значит, на ксероксе нужно выставить показатель 70%.

■ Среди форматов серий «А», «В» и «С» первый — самый «правильный» с точки зрения приближения ключевого числа $\sqrt{2}$ рациональными дробями.

Цепная дробь (см. статью «Високосное летосчисление», стр. 160, и список литературы к сюжету, стр. 345) числа $\sqrt{2}$ бесконечна,

её элементы — двойки:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

Приведём первые подходящие дроби разложения:

$$1, \quad 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12},$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{41}{29}, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} = \frac{99}{70}.$$

Значение $\frac{41}{29} = 1,41379\dots$ — неплохое рациональное приближение числа $\sqrt{2} = 1,41421\dots$, оно фактически определяет базовый лист A0: его размеры 1189×841 мм соответствуют пропорции $\frac{41}{29} = \frac{1189}{841}$.

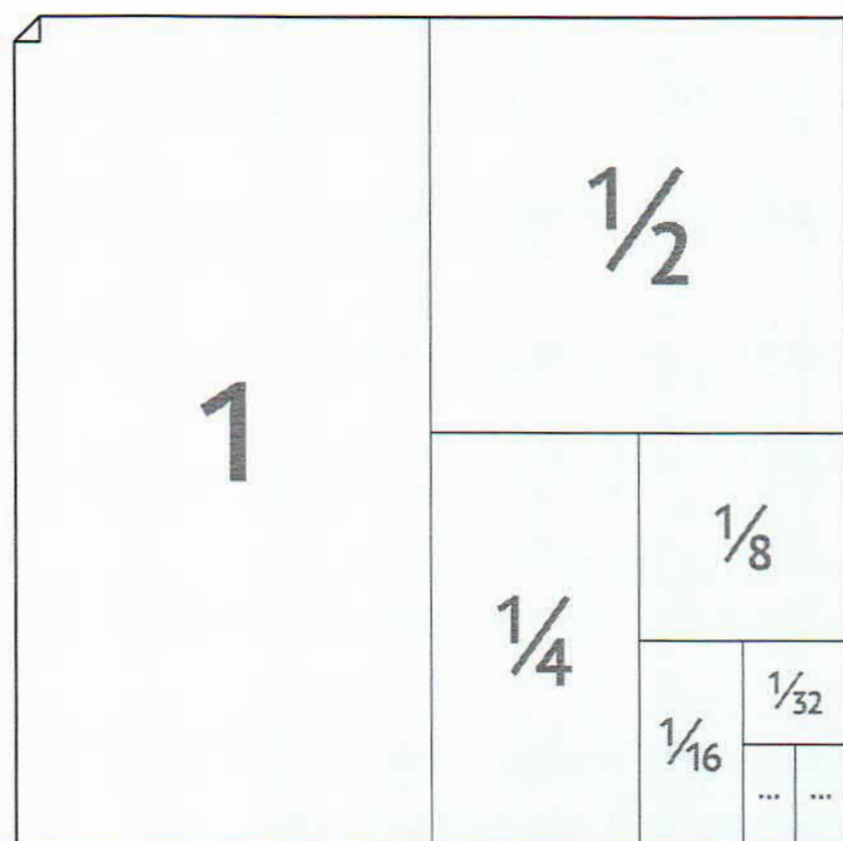
Производные размеры листов серии «А» получаются последовательно делением большей стороны пополам: 841×594 мм (A1), 594×420 мм (A2), 420×297 мм (A3), 297×210 мм (A4). Видно, что «основой» форматов A2 и A4 является лучшее приближение числа $\sqrt{2}$, чем у A0: $\frac{99}{70} = \frac{594}{420} = \frac{297}{210}$, дробь $\frac{99}{70} = 1,41428\dots$ отличается от $\sqrt{2}$

только в пятом знаке после запятой в десятичном разложении.

■ Рисунок, на котором были представлены форматы, можно использовать и для геометрической иллюстрации того, почему сумма бесконечной геометрической прогрессии (см. «Практическая бесконечность», стр. 94)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots$$

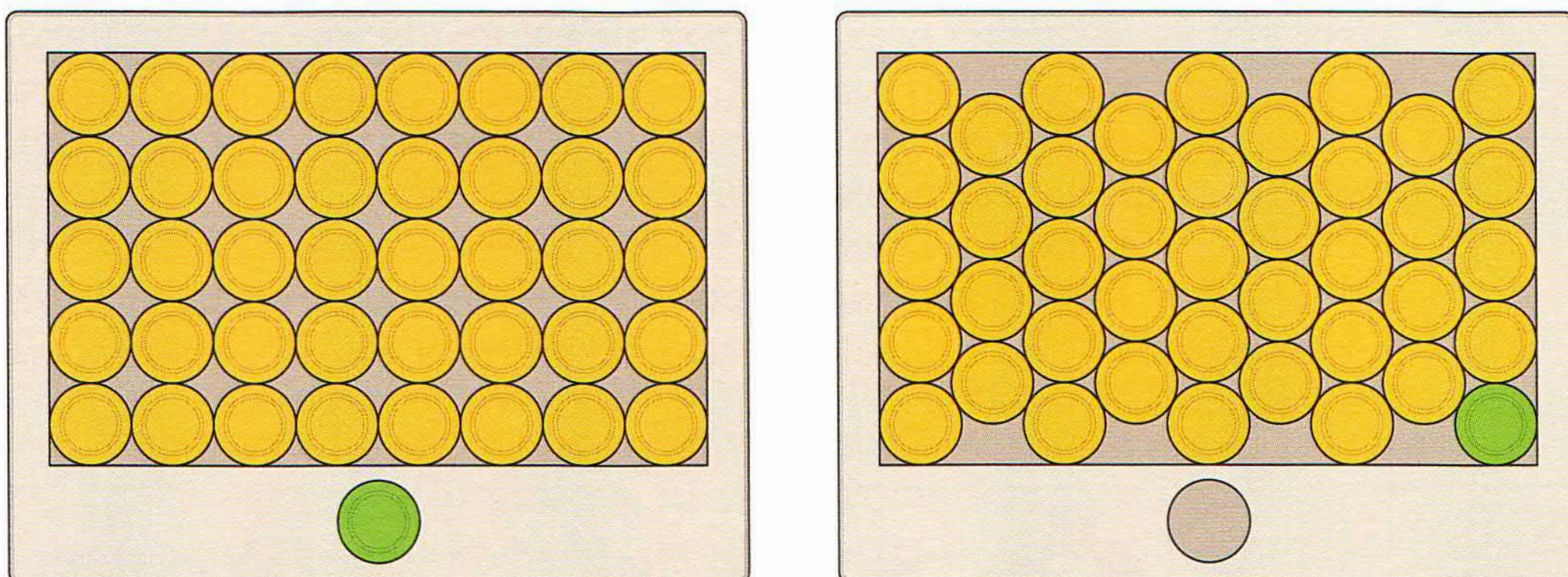
равна 2. Пропорции листа в этом случае роли не играют.



- Немировский Е. Л. Большая книга о книге. — М.: Время, 2010.
- Гиленсон П. Г. Справочник технического редактора. — М.: Книга, 1972.
- Гиленсон П. Г. Справочник художественного и технического редакторов. — М.: Книга, 1988.
- Книга: Энциклопедия / Глав. ред. В. М. Жарков. — М.: Большая Российская энциклопедия, 1999.

■ Гексагональная упаковка кругов на плоскости является плотнейшей. Это «знают» пчёлы, это знание можно воплотить и в головоломке, задание которой кажется невыполнимым.

На прямоугольном поле, ограниченном невысокой рамкой, расположены вплотную друг к другу 40 одинаковых кружков (шайб), их центры образуют квадратную решётку. Оказывается, можно переложить кружки так, чтобы внутри рамки уместился 41 кружок!



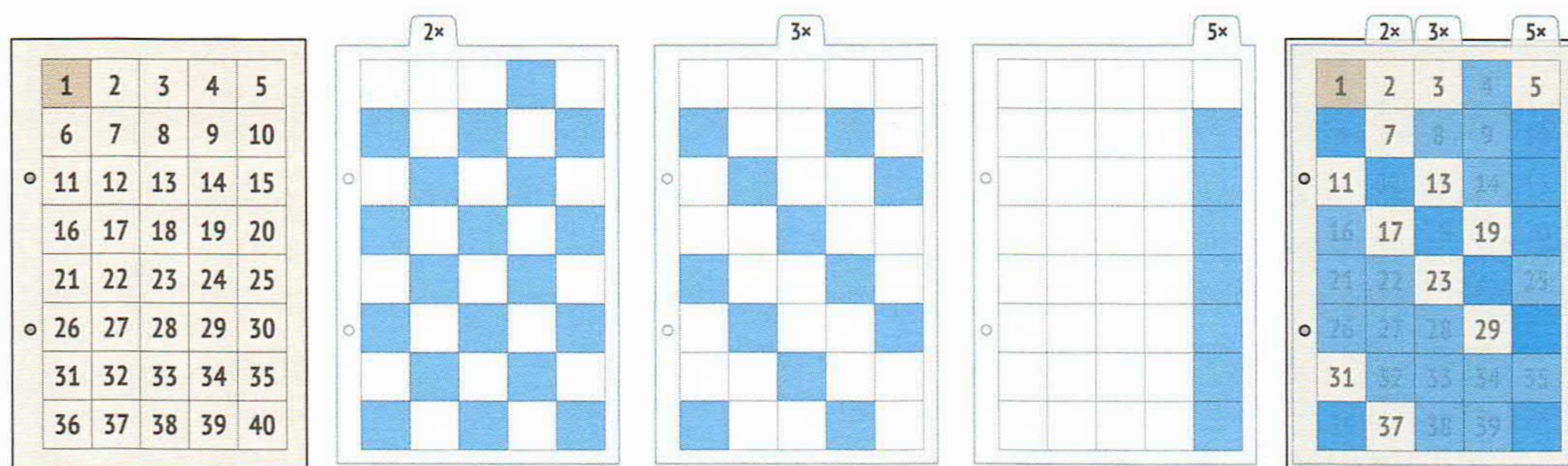
Кружки можно вырезать из картона, а можно использовать и готовые варианты — монеты, пуговицы и т. п. Поле и рамку можно изготовить из фанеры, листа пластика, даже из плотного картона. Сначала надо определить размеры поля, соответствующего каре из кружков 5×8 , а затем наклеить прямоугольное обрамление, рамку. (Поле 5×8 — наименьшее прямоугольное, в котором возможно провести «уплотнение», разместить ещё один кружок.)

- Фейеш Тот Л. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. — М.: ГИФМЛ, 1958.
- Вейль Г. Симметрия. — М.: Наука, 1968. — [Стр. 107—110].

- Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966. — [Глава 11 «Золотое сечение и филлотаксис», стр. 236—252].
- Воробьёв Н. Н. Числа Фибоначчи. — 4-е изд., доп. — М.: Наука, 1978. — (Популярные лекции по математике; Вып. 6).
- Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика: Основание информатики. — М.: Мир, 1998. — [2-е изд.: М.: Мир, Бином, 2009]. — [§ 6.6 «Числа Фибоначчи»]
- Петухов С. В. Биомеханика, бионика и симметрия. — М.: Наука, 1981.

■ Простые числа в современных европейских языках (германских и романских) называются *primes*, что происходит от их наименования у Евклида — *protos* (первый, начальный). А в русском языке появляется слово «простое», добавляющее оттенок неразложимости, цельности — в духе основной теоремы арифметики.

■ Греческий учёный Эратосфен в III веке до н. э. придумал способ, алгоритм нахождения всех простых чисел, не превосходящих некоторого фиксированного числа N . Выпишем все натуральные числа от 2 до N . Вычеркнем в списке все числа, кратные 2 (кроме самой двойки); наименьшее невычеркнутое число после 2 — это 3, следующее простое число. Оставляем тройку и вычёркиваем числа, кратные 3, и т. д. Если такие действия проделать для всех чисел, не превосходящих \sqrt{N} , то незачёркнутыми останутся все простые числа и только они.



Описанный процесс можно механизировать, сделать наглядным. Напечатайте на листе бумаги числа от 1 до $N = nt$ в виде таблицы размера $n \times t$. На первой прозрачке на местах чётных чисел (кроме 2) напечатайте закрашенные области. На второй — то же с числами, кратными 3 (кроме самой тройки), и т. д. Если создать

достаточно большой набор таких прозрачек, то при наложении их на основную таблицу все простые числа будут видны (пройдут через сито, решето отбора), а все составные — скрыты.

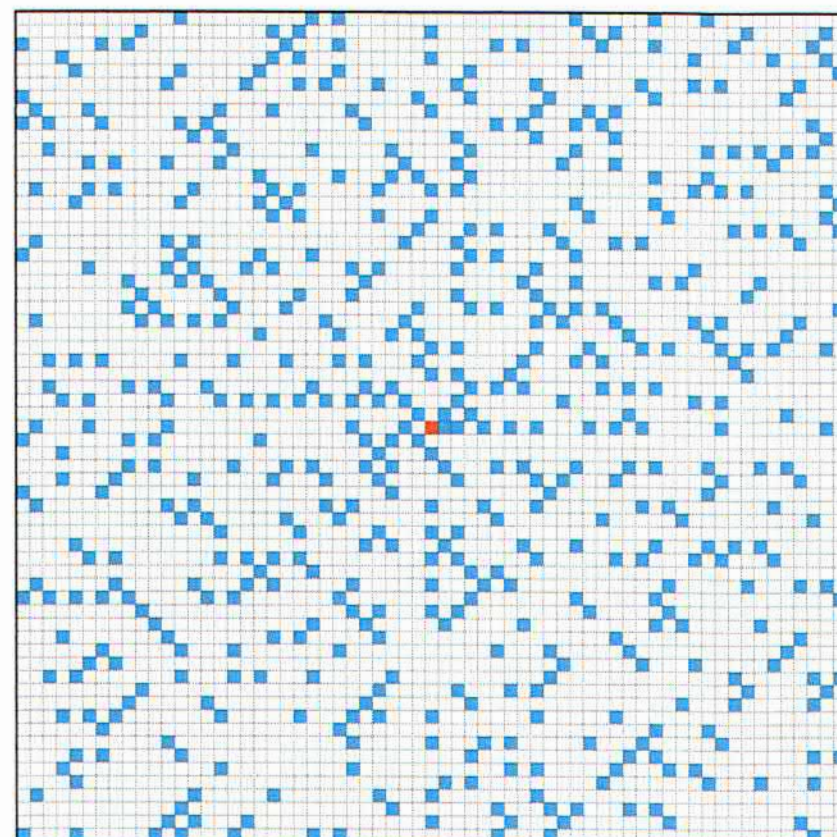
На каждом листе-прозрачке закрашенные клетки будут встречаться через одинаковое число шагов, а вот вид и расположение образуемых ими линий зависят от количества столбцов в таблице.

■ Скатерть Улама — попытка придать множеству простых чисел геометрический облик.

Возьмём клетчатый лист и занумеруем все клетки по спирали: какой-то центральной клетке дадим номер 1, клетке справа — 2, клетке над ней — 3 и т. д., двигаясь вокруг клетки «1».

Если закрасить клетки, номера которых — простые числа, то получится затейливый точечный узор, который и называется скатертью Улама, в честь

17	16	15	14	13
18	5	4	3	12
19	6	1	2	11
20	7	8	9	10
21	22	23	24	...



впервые нарисовавшего его математика Станислава Улама.

Бросается в глаза, что часть точек выстраивается в линии двух типов, параллельно диагоналям «скатерти».

■ Множество простых чисел устроено замысловато, но можно описать его «в целом»: указать многочлен с целыми коэффициентами от многих переменных, множество всех положительных значений которого при натуральных значениях переменных есть в точности множество всех простых чисел. Первые такие многочлены были построены в начале 1970-х годов, на сегодняшний день минимальное количество переменных — 10 (результаты Ю. В. Матиясевича, одного из авторов этой книги).

Измерение штангенциркулем 82

- Оглоблин А. Н. Инструменты для измерения длин, диаметров, углов и конусов. — Л.: Ленинградское газетно-журнальное и книжное изд-во, 1945.

Фигуры постоянной ширины 84

■ На плоскости у фигур постоянной ширины d одинаковый периметр, равный πd , как у окружности диаметра d (теорема Барбье). А площадь может быть разной: наименьшая — у треугольника Рёло, наибольшая — у круга.

В трёхмерном пространстве можно выделить класс тел постоянной ширины, только обхват фигуры производится не параллельными прямыми (как в двумерном случае), а параллельными плоскостями. Примеры: шар и тело, получающееся при вращении треугольника Рёло вокруг оси симметрии. У этих фигур при одинаковой ширине площадь поверхности разная, т. е. у теоремы Барбье аналога нет. Остались и нерешённые задачи, например: среди тел постоянной ширины d найти тела с наименьшей поверхностью и наименьшего объёма.

■ Было отмечено, что круг имеет наибольшую площадь среди фигур заданной постоянной ширины. Но исторически раньше появились и были изучены изопериметрические задачи, в которых надо найти фигуру наибольшей площади при заданном периметре и при заданных ограничениях на форму границы (популярное изложение см. в книгах: Тихомиров В. М. «Рассказы о максимумах и минимумах» и Протасов В. Ю. «Максимумы и минимумы в геометрии»). Если ограничений нет, то это круг. А если частью границы является отрезок, длина которого не учитывается как часть периметра, то это полукруг (задача Дидоны). Из изучения подобных задач родилась целая математическая дисциплина — вариационное исчисление.

Задача Дидоны названа так в честь легендарной финикийской царевны, основательницы Карфагена. Бежавшая из города Тир царевна остановилась на берегу современного Туниса и на встрече с местными вождями попросила их продать немного земли. Те «дружелюбно» ответили, что Дидона может взять столько земли, сколько можно покрыть шкурой быка, на которой они сидят. Однако Дидона разрешила шкуру на тонкие ремни, связала их и огородила большой участок на берегу моря. Основанная крепость Карфагена носила название Бирса, что означало «шкура». В «Энеиде» римского поэта Вергилия приплывший в Карфаген Эней слышит такой рассказ:

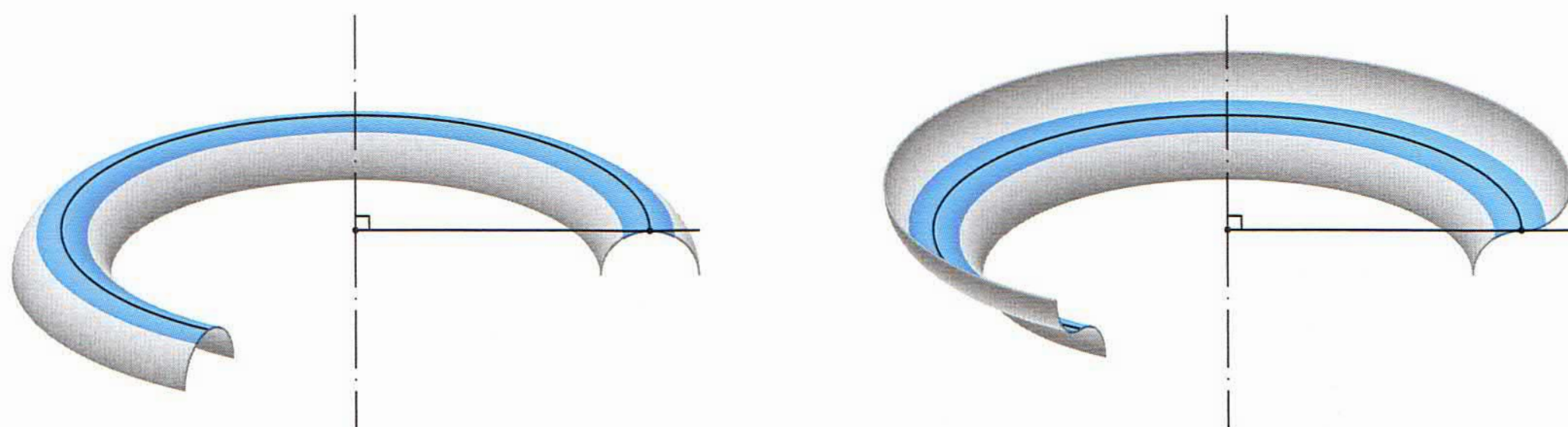
« В эти приплыли места, где теперь ты могучие видишь
Стены, где ныне встаёт Карфагена новая крепость.
Здесь купили клочок земли, сколько можно одною
Шкурой быка охватить (потому и название Бирса). »

- Яглом И. М., Болтянский В. Г. Выпуклые фигуры. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1951. — (Библиотека математического кружка; Вып. 4).
- Радемахер Г., Тёплиц О. Числа и фигуры: Опыт математического мышления. — М.: ОНТИ, 1936. — (Библиотека математического кружка; Вып. 10). — [Переиздания: 1938, 1962, 1966, 2020]. — [§ 25 «Кривые постоянной ширины»].
- Кривые (фигуры) постоянной ширины // Математические этюды. — <http://www.etudes.ru/ru/etudes/#constant-width-curves>

■ Приведём критерий того, что полоска поверхности вращения является жёсткой — не допускает непрерывного изгиба.

Тор (поверхность бублика) можно представлять как результат вращения вокруг вертикальной оси небольшой окружности, находящейся в одной плоскости с осью на некотором расстоянии от неё.

Если вращать только верхнюю половинку окружности, то получится закраина питьевого стаканчика (желобок) — жёсткая поверхность, не допускающая непрерывного изгиба. А если вращать дугу, касательные к которой ни в одной точке не перпендикулярны оси вращения, то получится изгибаемая поверхность.



Наличие касательной, перпендикулярной оси, — критерий жёсткости поверхности вращения, какой бы узкой она ни была. Причём можно рассматривать и более сложный, не обязательно «круговой» профиль. Дуги кривой (не обязательно окружности) могут подходить с разных сторон к перпендикулярной касательной, поверхность всё равно получится жёсткой. Такие пояса жёсткости есть в верхней и нижней частях любой алюминиевой банки для напитков.

■ Ещё со школьной скамьи многие знают фамилию Алексея Васильевича Погорелова — автора одного из школьных учебников геометрии. Алексей Васильевич был академиком Академии наук СССР, область его научных интересов — внешняя и внутренняя геометрия поверхностей, теория упругих оболочек. По теории изгибаемых поверхностей А. В. Погорелов написал несколько монографий: «Изгибание поверхностей и устойчивость оболочек», «Внешняя геометрия выпуклых поверхностей», «Геометрическая теория устойчивости оболочек».

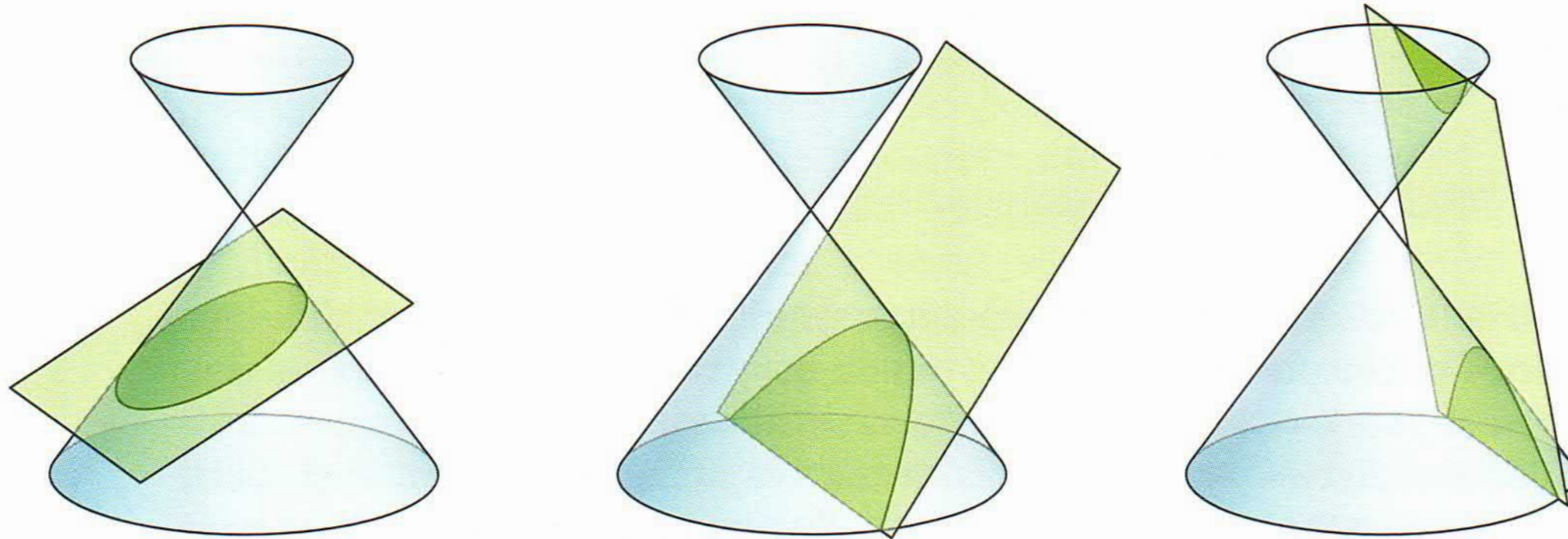
- Александров А. Д. Кривые и поверхности // Математика: её содержание, методы и значение. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — Т. 2. — Гл. VII. — [§ 4 «Внутренняя геометрия и изгибание поверхностей», стр. 128—144].
- Фоменко В. Т. Изгибание поверхностей // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 5. Стр. 122—127.



■ Гипербола — не такой уж редкий «гость» и встречается даже в быту. Например, на шестигранном карандаше, очинённом с помощью стандартной точилки, пересечение конуса, окружающего грифель, с шестиугольной призмой — венчик из дуг шести гипербол.

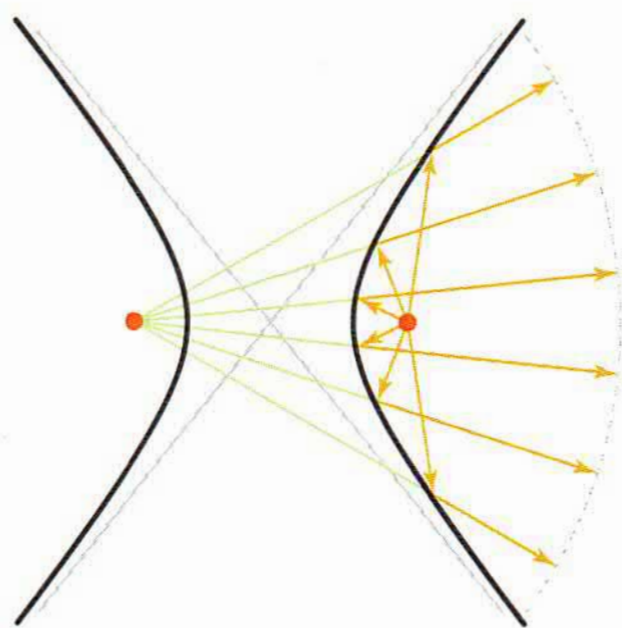
Это следует из определения гиперболы как конического сечения — так называется пересечение прямого кругового конуса (двустороннего, симметричного относительно вершины) с плоскостью.

Если плоскость пересекает все образующие конуса, то она пересекается только с одной его «половиной», получается эллипс (окружность). Парабола возникает, когда секущая плоскость параллельна ровно одной образующей (как следствие — пересекается только с одной половиной). Если секущая плоскость пересекает обе половины конуса (иначе говоря, параллельна двум образующим), то это гипербола.



В частности, так происходит, если плоскость параллельна оси конуса (в примере — грифелю карандаша).

■ Оптические свойства эллипса и параболы оказались весьма полезными рабочими инструментами (см. «Дробление камней в почках», стр. 48 и «Параболическая антенна», стр. 46). У гипер-



болы тоже есть оптическое свойство: лучи, вышедшие из одного фокуса гиперболы, после отражения от гиперболического зеркала (ближайшая ветвь гиперболы) уходят по направлению вектора, идущего от второго фокуса к точке отражения. Передний фронт отражённых лучей будет окружностью с центром во втором фокусе (это непосредственно следует из геометрического определения гиперболы). На оптическом свойстве гиперболы основана оптическая схема Ричи—

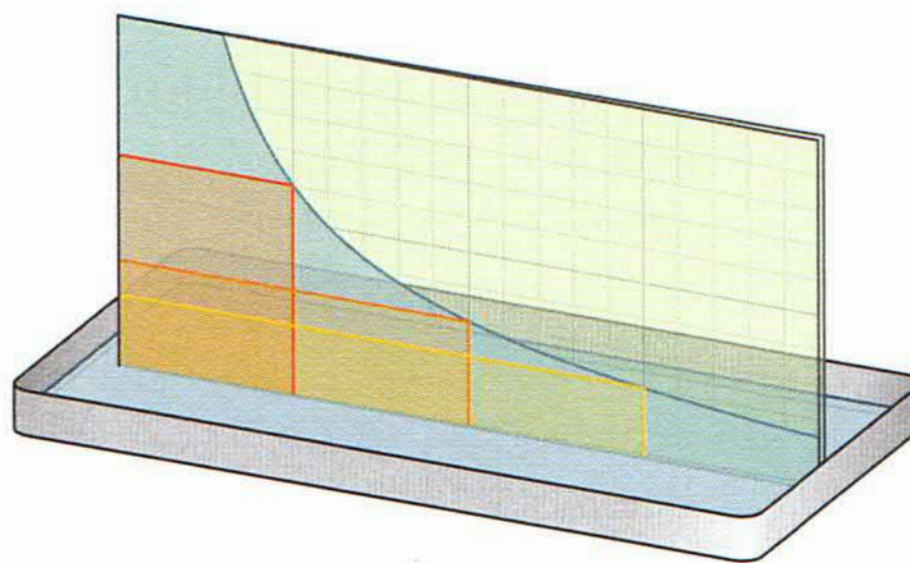
Кретьена рефлекторных телескопов с гиперболическими зеркалами. К этому типу относится большинство научно-исследовательских

телескопов. Наиболее известные примеры: космический Hubble; наземный VLT (Very Large Telescope) — система телескопов на горе Серро-Параналь в Чили с самыми большими в мире монолитными зеркалами (диаметр каждого — 8,2 метра, толщина — 177 мм, масса — 22 тонны).

Наличие особой «оптической» точки — фокуса — характеристическое свойство конических сечений. Исходящие из фокуса лучи после отражения от линии превращаются в сходящийся, расходящийся или параллельный пучок, в зависимости от того, чем является зеркало — эллипсом, гиперболой или параболой.

■ Гиперболу в домашних условиях могут «нарисовать» силы поверхностного натяжения.

В ванночку с водой поставьте две прямоугольные стеклянные пластинки в виде слегка приоткрытой книги. Начните медленно закрывать «книгу»: вода между пластинками поднимется, а её уровень будет снижаться по знаковой кривой — гиперболе (начинающей с некоторым отступом от «корешка»). Если предварительно на одном стёклышке нарисовать мелкую квадратную сетку, то можно проверить, что получилась именно гипербола: площади прямоугольников под линией будут одинаковыми.



Физическое объяснение описанного эксперимента читатель может получить самостоятельно, а может найти в журнале «Квант» (№ 11 за 1973 год, стр. 32, 33).

■ Прочность гиперболоидных конструкций обоснована инженерными расчётами и проверена на практике. В первоначальном плане В. Г. Шухова по возведению башни в Москве предполагалось, что башня будет выше Эйфелевой на 50 метров, но при этом вчетверо легче! Несминаемость тумб такой конструкции испытана в цирках: лёгкие, ажурные тумбы выдерживают даже слонов. Одно из неземных применений — крепления, соединяющие ступени космических ракет: это тоже решётки из образующих однополостного гиперболоида.

■ Первая в мире гиперболоидная конструкция уцелела и стоит сейчас в селе Полибино Липецкой области. После завершения работы Всероссийской выставки в Нижнем Новгороде башню Шухова выкупил меценат Юрий Нечаев-Мальцов и установил в своём имении.

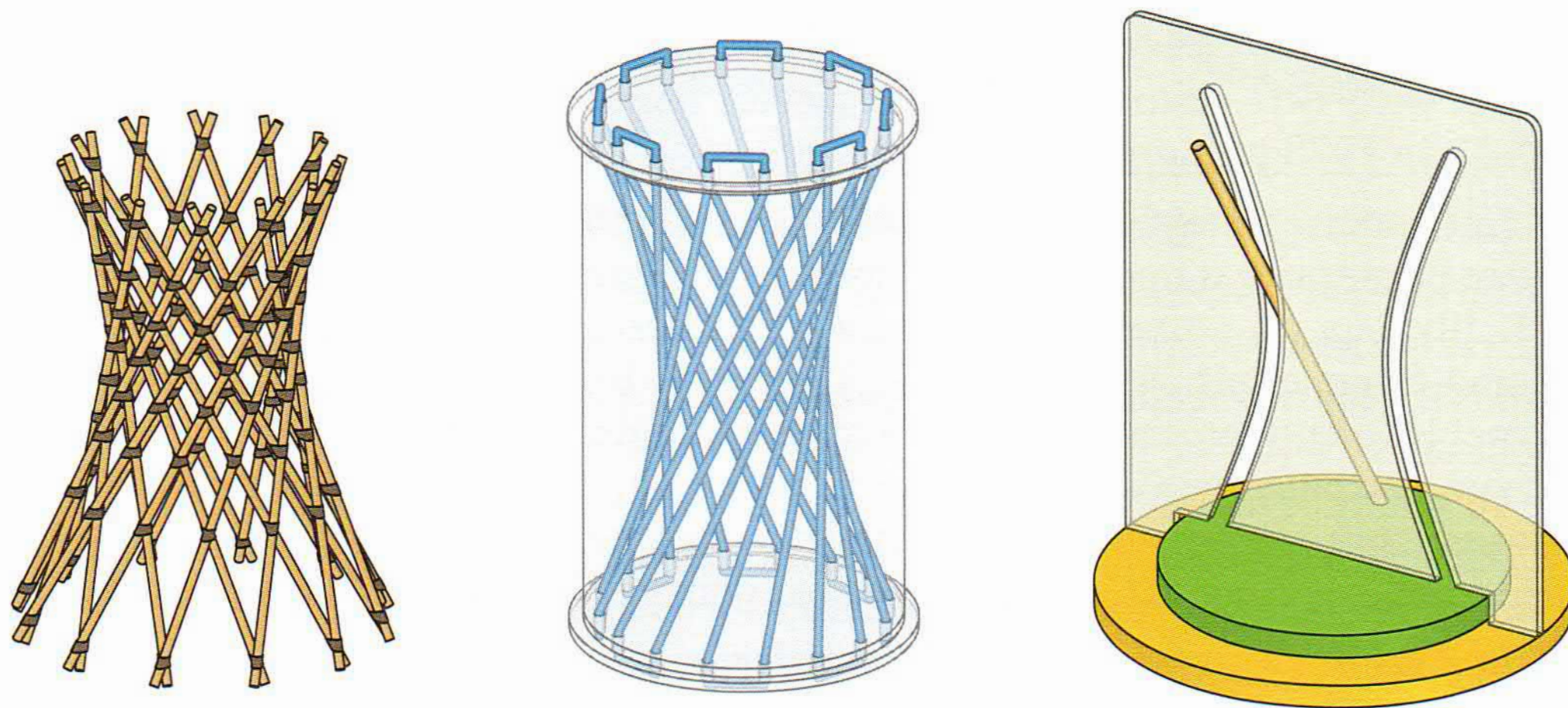
Кроме башни на Шаболовке, в Москве и её окрестностях сохранились гиперболоидные водонапорные башни в Лобне (микрорайон Луговая) и в посёлке Николина Гора.

В Нижегородской области сохранилась (и отреставрирована) одна из двух 128-метровых опор каскада линии электропередачи НиГРЭС (недалеко от города Дзержинска). Также гиперболоидные конструкции Шухова можно увидеть в деревне Ляхово, в городе Выкса, да и в самом Нижнем Новгороде (район Кóпосово, улица КИМа).

Большой Станислав-Адзигольский маяк под Херсоном является самой высокой гиперболоидной секцией среди спроектированных Шуховым. До сих пор это самый высокий маяк Украины.

Сохранившиеся гиперболоиды Шухова можно увидеть и в других городах: Белая Церковь (Украина), Борисов (Республика Беларусь), Бухара (Республика Узбекистан), Вологда, Казань, Конотоп (Украина), Коханово (Республика Беларусь), Краснодар, Кукмор, Николаев (Украина), Петушки, Черкассы (Украина).

■ Настольную модель гиперболоидной башни Шухова можно сделать своими руками. Тонкие деревянные палочки (например, шпажки для шашлыка) и соединительные кольца (резиновые или пластиковые) — вот всё, что вам понадобится. Правда, придётся поэкспериментировать, продумывая последовательность сборки. Можно изготовить и симметричный вариант, и вариант, в котором центр гиперболоида не совпадает с серединой модели. В данной модели представлены оба семейства образующих — в точности как в конструкциях Шухова. Все модели можно «раздувать», получая гиперболоиды разных размеров.



Модель однополостного гиперболоида, в которой образующие — это резиновые нити, а не жёсткие палочки, также проста в изготовлении. Прозрачный полый цилиндр и его основания сделаны из пластика. Через равномерно расположенные на краях оснований небольшие отверстия челночно пропускается резиновая нить, которая притягивает

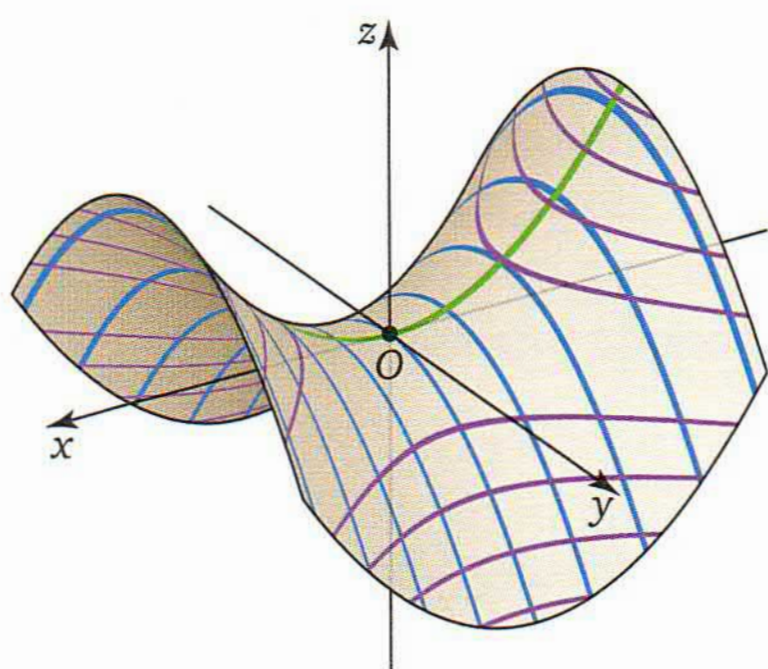
основания, но позволяет вращать их вокруг оси цилиндра. При вращении оснований нити растягиваются и превращаются в образующие одного семейства, возникает контур гиперболоида.

В самой эффектной модели прямолинейная спица закреплена наклонно на вращающемся основании. При вращении основания вокруг центра спица проходит беспрепятственно через прорезы в форме двух ветвей гиперболы, сделанные в неподвижной стенке. В этой модели подчёркнуто то, что однополостный гиперболоид — поверхность вращения, которую можно получить, вращая вокруг оси и гиперболу, и одну из образующих (прямую, скрещивающуюся с осью).

■ О происхождении и значении термина «фокус», о гиперболе как огибающей семейства прямых и о том, как получить гиперболу в виде муарового узора, см. комментарии к статье «Параболическая антенна» (стр. 297).

- *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л.* Прямые и кривые. — 2-е изд. — М.: Наука, 1978. — [Ко 2-му изданию книга была значительно переработана и дополнена, с тех пор переиздавалась несколько раз].
- *Маркушевич А. И.* Замечательные кривые. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1952. — (Популярные лекции по математике; Вып. 4).
- *Арнольд В. И.* Математическое понимание природы. — М.: МЦНМО, 2010. — [Сюжет «Резонансы в Шуховской башне, в уравнении Соболева и в баках вращающихся ракет», стр. 131].
- *В. Г. Шухов: 1853—1939: Искусство конструкции.* — М.: Мир, 1994.
- *Металлические конструкции академика В. Г. Шухова.* — М.: Недра, 1990.
- *Шухова Е. М.* Владимир Григорьевич Шухов: Первый инженер России. — М.: МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2003.
- *В. Г. Шухов — выдающийся инженер и учёный* // Труды объединённой научной сессии АН СССР, посвящённой научному и инженерному творчеству почётного академика В. Г. Шухова. — М.: Наука, 1984.
- *Виноградова Т., Авдеев С.* Код Шухова. — Нижний Новгород: Покровка-7, 2013.
- *Зеленова С. В., Виноградова Т. П., Коротаева Д. И., Ометова Г. Н.* В. Г. Шухов: нижегородские проекты. Территория уникальных объектов. — Нижний Новгород: Литера, 2016.
- *Архив РАН. Фонд Владимира Григорьевича Шухова.* № 1508.
- *Ажурная башня* // Математические этюды. — <http://www.etudes.ru/ru/etudes/shukhov-tower/>. — [Реконструкция строительства башни на Шаболовке].
- *Конические сечения: гипербола* // Математические этюды. — <http://www.etudes.ru/ru/models/#conic-sections-hyperbola>

■ В «правильной» системе координат уравнение гиперболического параболоида имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$. Это уравнение можно рас-



сматривать как выраженное формулой наглядное описание гиперболического параболоида, приведённое в статье.

Рассмотрев сечение плоскостью $y=0$, читатель «увидит» неподвижную параболу, а в сечении $x=0$ — параболу, которая скользит вдоль неподвижной. В сечениях плоскостями $z=\text{const}$ ($\neq 0$) получаются гиперболы. Про параболы и гиперболы см. «Параболическая антенна» (стр. 46) и «Шуховские башни» (стр. 88).

- Чипсы: гиперболический параболоид // Математические этюды. — <http://www.etudes.ru/ru/models/conic-sections-crisps-hyperbolic-paraboloid/>
- Седловая поверхность: гиперболический параболоид // Математические этюды. — <http://www.etudes.ru/ru/models/conic-sections-saddle-hyperbolic-paraboloid/>

Ломтик пиццы 91

■ Понятие кривизны встречается в нескольких сюжетах книги, геометрический взгляд на это понятие — тема статьи «Искривлённые миры» (стр. 222).

- Асламазов Л. Г., Варламов А. А. Удивительная физика. — Новое изд., испр. и доп. — М.: Добросвет, МЦНМО, 2017. — [Глава 23 «Физика пиццы»].

Объём шкурки апельсина 92

■ См. комментарий к следующему сюжету.

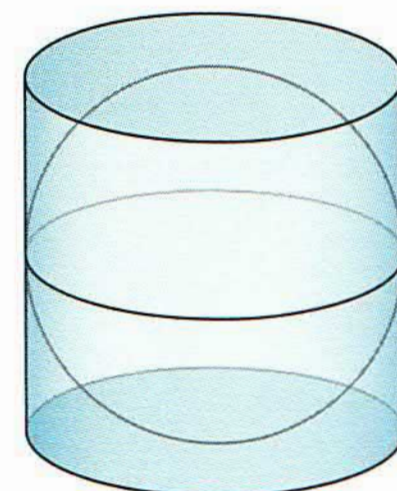
■ Вычисление объёма и площади поверхности шара — результат Архимеда, который он считал своим высшим достижением. В сочинении «О шаре и цилиндре» Архимед писал:

« Архимед Досифея приветствует! Незадолго перед сим я препроводил к тебе некоторые предметы моих исследований, вместе с найденными мною доказательствами [...] Ныне я кончил и другие некоторые мне на мысль пришедшие теоремы, из коих достопримечательнейшие суть сии: [...] Цилиндр, имеющий основанием наибольший круг шара, а высоту, равную поперечнику оно́го, есть полуторный шара;

и его поверхность есть полуторная же поверхности шара. Свойства сии без сомнения существовали в сказанных фигурах, но доселе не были ещё замечены никем из занимавшихся Геометрией... »

В формулах результат Архимеда для шара радиуса R и описанного вокруг него кругового цилиндра имеет следующий вид:

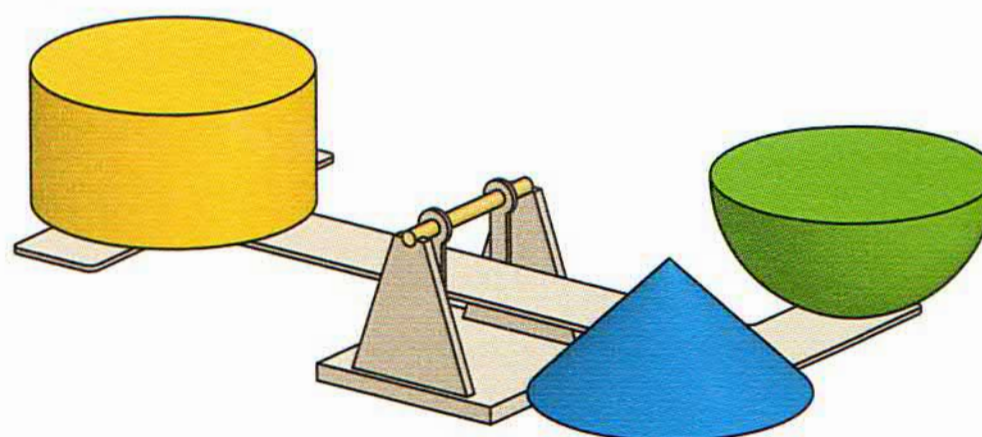
$$\begin{aligned} V_{\text{шара}} &= \frac{4}{3}\pi R^3 & \left(= \frac{2}{3}V_{\text{цилиндра}} = \frac{2}{3} \cdot 2\pi R^3 \right), \\ S_{\text{шара}} &= 4\pi R^2 & \left(= \frac{2}{3}S_{\text{цилиндра}} = \frac{2}{3} \cdot 6\pi R^2 \right). \end{aligned}$$



К моменту появления работы Архимеда и объём, и площадь цилиндра были уже известны.

Шар, вписанный в цилиндр, был изображён на надгробном памятнике у могилы учёного. Зная об этом, Цицерон, во время службы на Сицилии, смог найти могилу Архимеда и описал её в сочинении «Тускуланские беседы».

Идеи Архимеда можно продемонстрировать на модели, называемой «весы Архимеда». Рычажные весы будут в состоянии равновесия, если на равных расстояниях от подвеса установить: конус и половину шара — с одной стороны, цилиндр — с другой (все фигуры одинаковой высоты; радиусы оснований конуса и цилиндра равны радиусу шара).



В каждом сечении плоскостью, параллельной основаниям фигур, площадь сечения цилиндра равна сумме площадей сечений конуса и «южной» половины шара. Из этого равенства площадей следует равенство объёмов (так называемый принцип Кавальери).

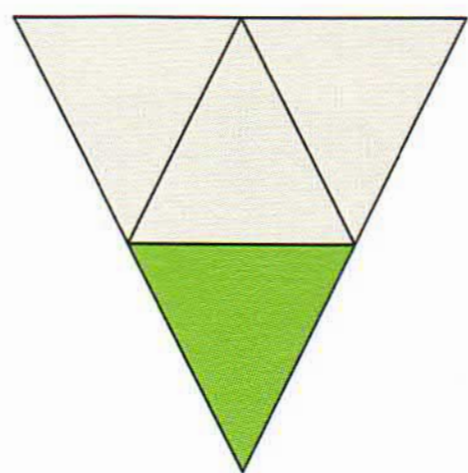
Получается удивительная вещь: уравновесить две простые по форме гирьки — конус и цилиндр — удаётся с помощью более сложной — половины шара.

Конический фужер 93

■ Сюжеты «Объём шкурки апельсина» (стр. 92) и «Конический фужер» удивляют и показывают, как легко впасть в заблуждение в геометрических оценках. Корень подобных ошибок в том, что наш разум, оценивая величины предметов, в первую очередь воспринимает и фиксирует их линейные размеры, а не объёмы.

Поясним примером на плоскости (двумерное пространство). Если в треугольнике провести все три средние линии, то он разделится

на четыре одинаковых треугольника. Маленькие треугольники подобны исходному, все стороны уменьшаются в 2 раза; а отношение



площадей равно $\frac{1}{4}$, квадрату коэффициента подобия.

В трёхмерном пространстве всё аналогично: например, отношение объёмов шара радиуса R и шара радиуса $2R$ равно $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

В примере с фужером на среднем рисунке заполненная жидкостью часть бокала конус, подобный «большому» конусу фужера, но все его линейные размеры (высота, длина окружности основания и т. п.) вдвое меньше. Поэтому отношение объёмов равно кубу коэффициента подобия — $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, т. е. $\frac{1}{8}$.

Практическая бесконечность 94

■ В Европе в круг математических знаний легенда о происхождении шахмат попала в XVII веке, когда Джон Валлис (математик, криптограф и один из основателей Лондонского Королевского общества) опубликовал перевод сочинения арабского историка ас-Сафада (XIV век).

В последующие века история про Сессу и Шерама распространилась по всей Европе; например, великий Леонард Эйлер в книге «Элементы алгебры» приводит задачу о практической оценке необходимого количества зёрен.

■ Ещё один интересный пример растущей геометрической прогрессии — последовательность частот нот равномерно темперированного строя (см. «Музыкальный строй», стр. 96). Здесь знаменатель прогрессии $q = \sqrt[12]{2} \approx 1,06$ близок к 1, но клавиш достаточно много — в клавиатуре стандартного рояля их 88. И за эти 88 шагов пробегается интервал, охватывающий более 7 октав ($88 = 7 \cdot 12 + 4$) и представляющий почти весь диапазон звуков, комфортных для человеческого уха.

С числом 88 читатель может встретиться в этой книге и в сюжете «Созвездия» (стр. 116): именно на такое число созвездий астрономы поделили звёздное небо.

Музыкальный строй 96

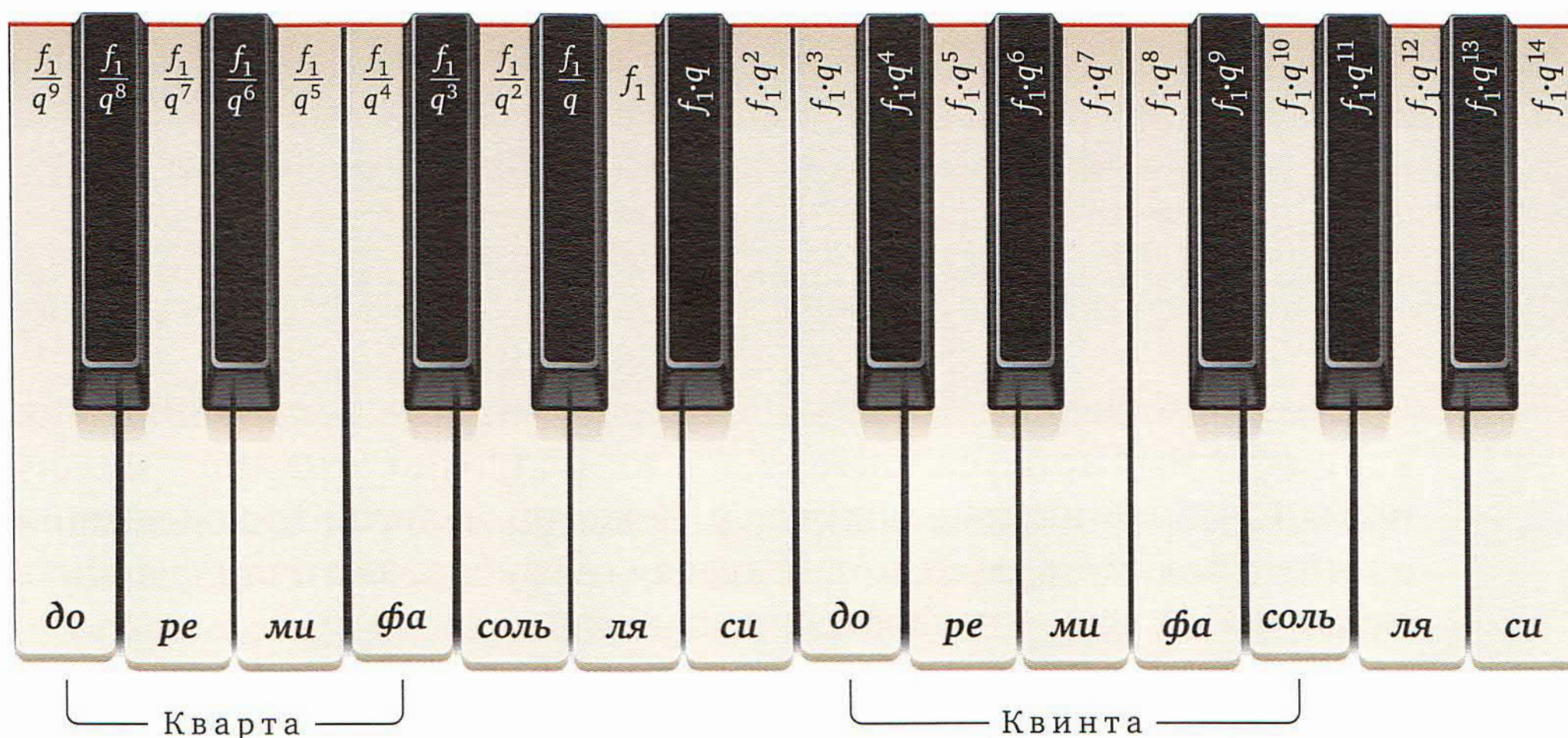
■ К построению музыкального строя как последовательности частот можно подойти аксиоматически, указав набор желательных свойств:

1) вместе с каждой частотой f в строй входят частоты $2f$ и $\frac{1}{2}f$ (от каждой ноты можно построить октаву и вверх, и вниз);

2) любую мелодию можно сдвигать на произвольное число ступеней без искажений.

Оказывается, сформулированная задача имеет единственное решение — равномерно темперированный строй. Математически это означает, что набор частот $\{f_n\}$ является геометрической прогрессией.

■ Равномерно темперированный строй совершенен не во всех отношениях. Один из самых заметных недостатков — отсутствие всех чистых интервалов, кроме октавы — периода (см. «Чистые интервалы», стр. 98). Например, здесь нет ни чистой квинты (двух звуков, отношение частот которых равно $3/2$), ни чистой кварты ($4/3$).



Квинту образуют ноты «до» и «соль», отношение частот равно q^7 (в силу равномерности строя интервал можно строить от любой ноты). Напомним, что в октаве за 12 шагов частота повышается в два раза, $q^{12} = 2$, т. е. знаменатель прогрессии $q = \sqrt[12]{2} = 2^{1/12}$. Поэтому квинта не является чистой: $2^{7/12} \neq \frac{3}{2}$. Аналогично, кварта в равномерно темперированном строе не является чистой, $2^{5/12} \neq \frac{4}{3}$. В обоих случаях всё сводится к тому, что $2^m \neq 3^n$ ни при каких натуральных m и n .

■ Деление октавы именно на 12 ступеней (шагов) оптимально с точки зрения приближения чистых интервалов (см. «Чистые интервалы», стр. 98). Это можно вывести, используя цепные дроби. В статье «Високосное летосчисление» (стр. 160, комментарии и литература — стр. 345) цепные дроби показали свою эффективность в задаче нахождения наилучшего календаря.

Для чистой квинты разложение в цепную дробь имеет вид

$$\log_2 \frac{3}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \dots}}}}}$$

(Выбор числа 2 как основания логарифма связан с отношением частот двух звуков, образующих октаву.)

Первые подходящие дроби этого разложения:

$$0, \quad \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{3}{5},$$

$$\frac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{7}{12}, \quad \frac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}} = \frac{24}{41}.$$

Среди приведённых подходящих дробей есть и канонический вариант: выбирается октава из 12 нот, «расстояние» между нотами, образующими квинту, — 7 шагов. Другие приближения проигрывают: пара «5 нот, 3 шага» — грубая, неточная; делить октаву на 41 шаг — неудобно практически.

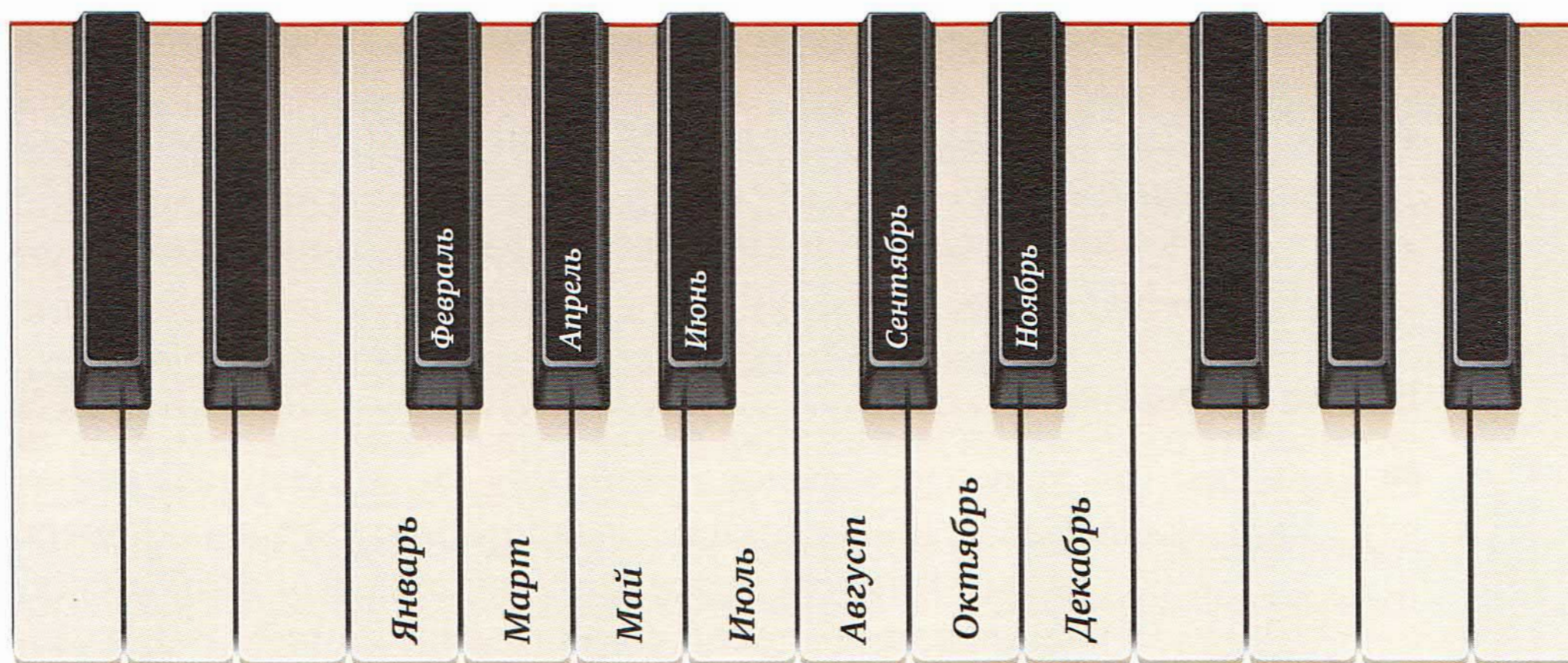
Значение квинты, подсказанной цепными дробями, близко к чистой квинте: $q^7 = (\sqrt[12]{2})^7 \approx 1,4983 \approx \frac{3}{2}$. Чистая кварта $\frac{4}{3} = 1,33333\dots$ также хорошо приближается значением кварты $q^5 = (\sqrt[12]{2})^5 \approx 1,3348$.

■ Сколько в году длинных месяцев (длиной 31 день)? Как запомнить чередование длинных и коротких месяцев? На оба вопроса можно ответить, взглянув на костяшки рук.

Неожиданным является представление месяцев как белых и чёрных клавиш пианино или рояля (Концевич М. Равномерные расположения // Журнал «Квант». 1985. № 7. Стр. 51, 52, 59). Если каждому месяцу, начиная с января, сопоставить ноту, двигаясь последовательно от белой клавиши «фа» (январь — это «фа», февраль — «фа-диез» и т. д.), то длинные месяцы будут связаны с длинными (белыми) клавишами, короткие — с короткими (чёрными). Получается, что «костяшки» клавиатуры также помогут определить чередование месяцев.

Совпадение чередований длинных и коротких месяцев, длинных и коротких клавиш — неслучайно. Октава из 12 нот — период музыкального строя, год, состоящий из 12 месяцев, — тоже период.

В обоих случаях возникает «окружность», на которой белые и чёрные клавиши, длинные и короткие месяцы распределены правильно, равномерно. Если определить равномерность разумно-математически, то оказывается, что при любых натуральных n и k равномерное распределение на окружности n белых и k чёрных точек — единственное (с точностью до поворота окружности). В наших примерах (октава и год) $n = 7$ и $k = 5$.



- Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. — М.—Л.: Гостехиздат, 1949. — [Параграфы «Решётка целых чисел» и «Темперированная гамма рояля»].
- Шилов Г. Е. Простая гамма. Устройство музыкальной шкалы. — М.: Физматлит, 1963. — (Популярные лекции по математике; Вып. 37).
- Варга Б., Димень Ю., Лопариц Э. Язык, музыка, математика. — М.: Мир, 1981.
- Волошинов А. В. Математика и искусство. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 2000.
- Джинс Дж. Наука и музыка. — М.: Институт компьютерных исследований, 2011.
- Способин И. В. Элементарная теория музыки. — М.: Музгиз, 1963.
- Loy G. Musimathics: the mathematical foundations of music. — V. 1, 2. — MIT Press, 2006, 2007.

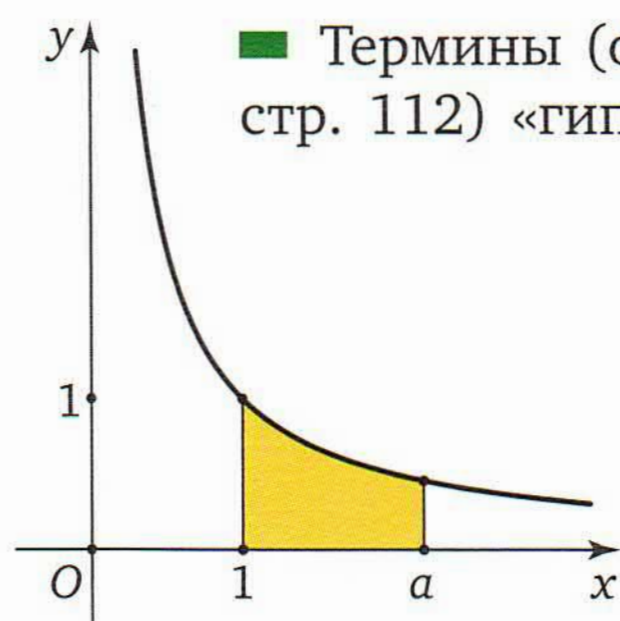
Чистые интервалы 98

■ Развитие идеи разбиения звука на гармоники (функции вида $\sin nx$, $\cos nx$) привело в XVIII веке к возникновению новой математической дисциплины — гармонического анализа. Для решения различных задач основным методом нахождения периодических решений стало разложение искомой функции в тригонометрический ряд.

В гармоническом анализе одно из базовых утверждений — то, что при разложении «хорошей» функции в тригонометрический ряд (называемый в этом случае рядом Фурье) в гармониках $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ коэффициенты a_n и b_n стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отмеченное уменьшение амплитуд (громкостей) у обертонов с ростом номера наглядно иллюстрирует приведённое утверждение, которое называется леммой Римана о коэффициентах Фурье.

- Волошинов А. В. Математика и искусство. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 2000.
- Джинс Дж. Наука и музыка. — М.: Институт компьютерных исследований, 2011.
- Loy G. Musimathics: the mathematical foundations of music. — V. 1, 2. — MIT Press, 2006, 2007.

Шкала ощущений 102



■ Термины (об этимологии слова «термин» см. «Полярный день», стр. 112) «гипербола» и «логарифм», разрозненно встречающиеся и в школьном курсе математики, и в этой книге, оказываются тесно связанными, причём наглядно-геометрически. Площадь криволинейной трапеции под гиперболой $y = \frac{1}{x}$ на участке от $x = 1$ до $x = a$ равна $\ln a$ (обозначение натурального логарифма, основание которого — число e).

Дело в том, что эта площадь равна определённому интегралу $\int_1^a \frac{dx}{x}$, а поскольку $\frac{1}{x}$ — производная функции $y = \ln x$ (при $x > 0$), то

$$\int_1^a \frac{dx}{x} = \ln a - \ln 1 = \ln a.$$

Представление о логарифмах как о площадях можно найти в книге А. И. Маркушевича «Площади и логарифмы» (Серия «Популярные лекции по математике»; Вып. 9).

- Абельсон И. Б. Рождение логарифмов. — М.—Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.
- Панов Д. Ю. Счётная линейка. — 25-е изд. — М.: Наука, 1982.
- Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. — Т. 2: Пространство, время, движение. — М.: Мир, 1965. — [§ 4 «Приближённое вычисление иррациональных чисел», с. 112—117].

- Клюкин И. И. Удивительный мир звука. — Л.: Судостроение, 1986.
- Брэгг У. Мир света. Мир звука. — М.: Наука, 1967.
- Логарифмическая линейка // Математические этюды. — <http://www.etudes.ru/ru/etudes/slide-rule/>

Ориентация в трёхмерном мире 106

■ В статье были отмечены проблемы, возникающие при описании вращений в трёхмерном пространстве тремя параметрами. Кватернионы предлагают четыре параметра, и этого достаточно для практических применений. Но математически корректным кватернионное представление не является: одному повороту соответствует два кватерниона — нет однозначности. Только в середине XX века было доказано, что пяти параметров достаточно для корректной параметризации вращений в трёхмерном пространстве.

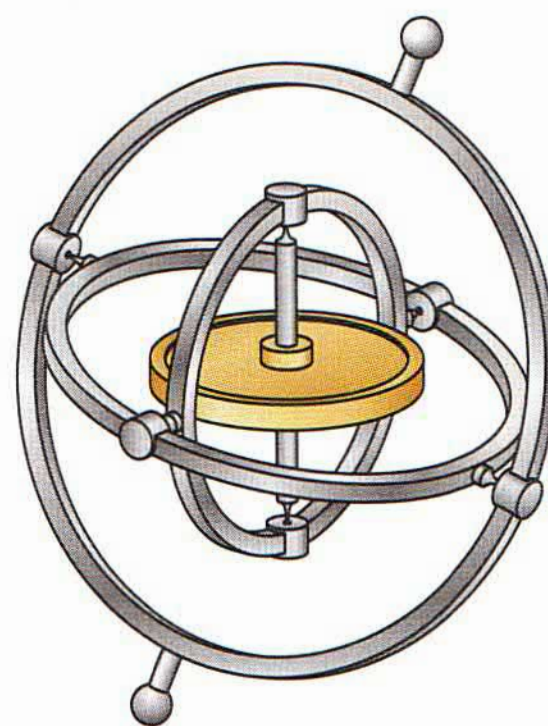
■ Для решения задач управления движением используют гироскопы (соединение древнегреческих слов *γῦρος* — круглый и *σκοπέω* — смотрю). В классическом гироскопе двумя основными составляющими являются карданов подвес и закреплённый в нём быстро вращающийся маховик (скорость может составлять и 500 оборотов в секунду).

Согласно одной из теорем Эйлера, раскрученный маховик стремится сохранить направление оси вращения. Именно поэтому сохранять равновесие на движущемся велосипеде проще, чем на неподвижном, а при большой скорости можно даже не держаться за руль. Почувствовать теорему позволяет известный опыт. Раскрутив колесо, насаженное на длинную ось со втулками, и взявшись за них, вы ощутите, что попытка изменить положение оси вызовет сопротивление колеса, оно будет «упираться».

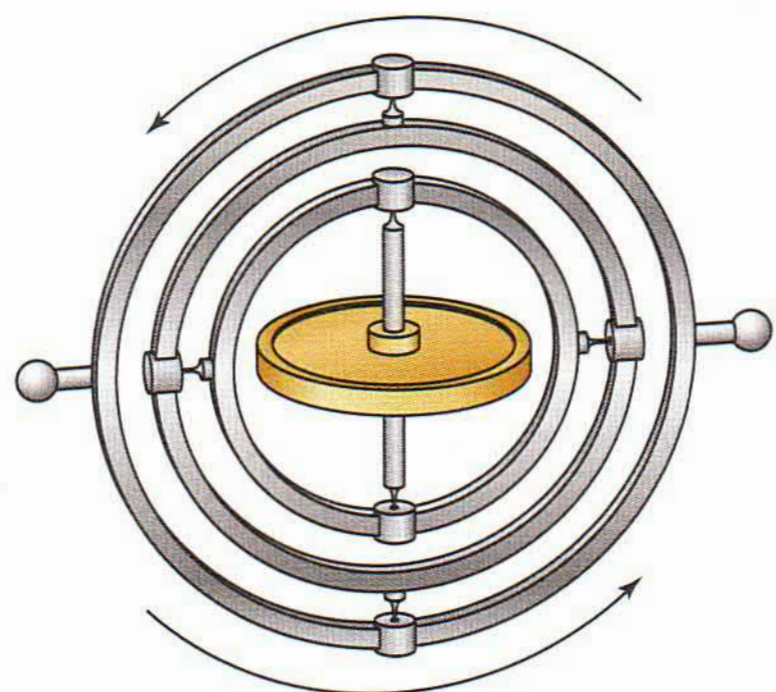
Карданов подвес — это три вложенные друг в друга рамки-кольца, соединённые осями: внешняя рамка крепится осью к движущемуся аппарату, а ось маховика крепится к внутренней рамке. Такой подвес позволяет раскрученному маховику сохранять направление оси вращения при любых движениях аппарата.

Ориентацию корабля, самолёта или космического аппарата определяют по положению объекта относительно «неподвижной» оси вращения гироскопа. Информация складывается из трёх параметров — углов между осью маховика и осями рамок.

Упомянутая в статье опасность «складывания рамок» соответствует ситуации, когда внутренняя и внешняя рамки карданова подвеса оказываются в одной плоскости. Их оси в такой момент



тоже совпадают, и у конструкции теряется одна степень свободы. Ось гироскопа оказывается в плоскости внешней рамки и не сможет сохранять направление при некоторых движениях объекта. Например, при вращении аппарата в плоскости сложенных рамок при-



дётся повернуться и оси маховика — будет утрачена способность сравнивать текущую ориентацию с начальной (стартовой).

Проблема «складывания рамок» проявилась и в лунной миссии «Аполлон-11». Во время полёта возникла ситуация, близкая к критической, и хотя всё обошлось, после возвращения один из астронавтов в шутку попросил у коллеги из ЦУПа четвёртый параметр: «Как насчёт того, чтобы подарить мне на Рождество четвёртую рамку?».

- Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. — М.: МЦНМО, 2014.
- Конвей Дж., Смит Д. О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях. — М.: МЦНМО, 2019.
- Полак Л. С. Уильям Гамильтон: 1805—1865. — М.: Наука, 1993.
- Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела. — М.: Наука, 1973. — [Для специалистов в области систем управления движением летательных аппаратов].

Спутниковая навигация 110

- Яценков В. С. Основы спутниковой навигации: системы GPS-NAVSTAR и ГЛОНАСС. — М.: Горячая линия—Телеком, 2005.
- Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Wasle E. GNSS — Global Navigation Satellite Systems. — Wien—N.Y.: Springer, 2008.

Полярный день 112

■ Заход Солнца не означает наступления темноты, да и светлеть начинает ещё до восхода Солнца. Этот период, «отнятый» у ночи, — сумерки. Главная причина возникновения сумерек — подсветка атмосферы находящимся за горизонтом Солнцем.

Для практических дел сумерки делят на три периода: гражданские; навигационные, или морские; астрономические. Границы зон формально определяются углом нахождения центра Солнца под горизонтом: до 6° , от 6° до 12° , от 12° до 18° . Названия периодов соответствуют делам, которые ещё доступны в это время.

В гражданские сумерки можно выполнять на открытом воздухе любую работу; в конце этого периода включается искусственное освещение, гражданская жизнь замирает. В морские сумерки можно заниматься «без подсветки» некоторыми профессиональными делами; например, капитан плывущего вдоль берега корабля видит очертания предметов на берегу, но сами они обесцвечиваются. В астрономические сумерки только небо подсвечено, а затем исчезают и следы зари, на небе появляются звёзды — наступает рабочее время астрономов.

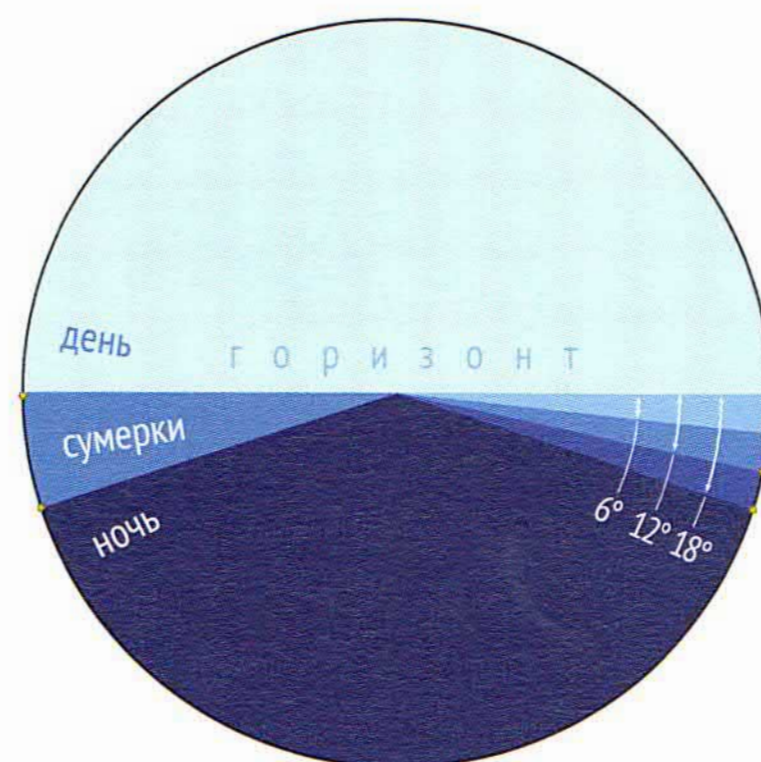
■ Белые ночи — это явление, когда вечерние гражданские сумерки переходят сразу в утренние, и это время суток — самое тёмное. Время белых ночей — летний период, в который светлое время круглосуточно, хотя Солнце и заходит за горизонт. В Северном полушарии это явление наблюдается летом в широтах несколько севернее 60° (эта граница определяется вычитанием из широты Северного полярного круга $66^\circ 34'$ углового размера зоны гражданских сумерек, равного 6°).

В нашей стране белые ночи ассоциируются с Санкт-Петербургом, хотя его широта — $59^\circ 57'$ — немного меньше «необходимой». Следствие такого «недобора» — то, что даже в летнее солнцестояние в Петербурге белая ночь прерывается более тёмной частью почти на 2 часа.

На карте легко найти территории, крупные города, в которых можно наблюдать белые ночи, но не бывает полярного дня. Например, в России это города Надым ($65^\circ 32'$), Печора ($65^\circ 07'$), Архангельск ($64^\circ 33'$), Якутск ($62^\circ 02'$), Петрозаводск ($61^\circ 48'$).

■ График зависимости длины светового дня от номера дня в году (скажем, для Москвы) подсказывает, что вблизи дней солнцестояния длительность дня меняется мало, почти застывает. Математически это объясняется тем, что в точке максимума или минимума производная функции — скорость её изменения — равна нулю, а в окрестности такой точки — мала (см. комментарий к статье «Радуга», стр. 336). А вот весной и осенью, вблизи дней равноденствия, изменения длительности дня наибольшие.

- Сурдин В. Г. Астрономия. Популярные лекции. — 2-е изд., расш. — М.: МЦНМО, 2019.
- Зверева С. В. В мире солнечного света. — Л.: Гидрометеиздат, 1988.
- Миннарт М. Свет и цвет в природе. — М.: ГИФМЛ, 1958.
- Розенберг Г. В. Сумерки. — М.: ГИФМЛ, 1963.



■ На небесной сфере созвездий — 88, а областей на карте — 89. Числа не совпадают, поскольку созвездие Змея состоит из двух отделённых друг от друга кусков. К этому привело разделение исторического созвездия Змееносец на две части: собственно Змееносец и Змея. Туловище Змеи прежний Змееносец держал в руках, видимыми были голова и хвост, они и стали двумя частями нового созвездия.

- Сурдин В. Г. *Астрономия. Популярные лекции.* — 2-е изд., расш. — М.: МЦНМО, 2019.
- Сурдин В. Г. *Разведка далёких планет.* — 4-е изд., доп. — М.: Физматлит, 2017.

■ Рене Декарт был не только великим математиком и философом, но и естествоиспытателем, ставившим остроумные эксперименты, требовавшие изобретательности и упорства.

В знаменитом труде «Рассуждение о методе» Декарт сформулировал принципы научного исследования и применил их к изучению явлений природы, в частности радуги. Понимая, что элементы радуги возникают в каждой капле воды, Декарт, как он пишет, решил «создать очень большую каплю», для чего «наполнил водой большой стеклянный сосуд, вполне круглый и вполне прозрачный». Наблюдая с разных точек прохождение солнечных лучей через сосуд Декарт обнаружил, что под углом 42° к направлению падающих лучей капля-сосуд излучает ярко-красный свет, т. е. капля становится «фонариком», который в сторону источника света излучает красные лучи по образующим конуса с углом полураствора 42° .

Обнаружив эффект экспериментально, Декарт объяснил его, опираясь на проделанные расчёты. Углы выхода лучей из капли он вычислил с помощью закона преломления. В силу симметрии движение солнечного луча (точнее, его монохромных составляющих) внутри капли зависит только от расстояния между падающим лучом и её центром. Технически удобно проводить анализ, используя параметр $k = \frac{\text{расстояние}}{\text{радиус}}$. Коэффициенты преломления монохромных лучей различны, поэтому выделим у каждого падающего луча одну компоненту, — например, красную.

Сначала Декарт провёл расчёты для k от 0 до 1 с шагом 0,1. Затем, обнаружив, что наибольшие значения угла выхода получаются при $k = 0,8$ и $k = 0,9$, прошёл интервал $[0,8; 0,9]$ с шагом 0,01.

Результат оказался тот же, что и в эксперименте: наибольший угол — примерно 42° , достигается это значение при $k = 0,86$. Более точно, при увеличении k от 0 до 0,86 угол возрастает от 0° до 42° , а при дальнейшем увеличении k от 0,86 до 1 угол начинает уменьшаться.

На основе составленной им таблицы Декарт заключил, что «имеется гораздо больше» лучей в окрестности значения 42° , чем при меньших значениях. А вне конуса (вершина — капля, ось — направление падающих лучей) полураствора 42° вообще нет выходящих из капли красных лучей.

■ Объясним почему выходящие из капли красные лучи группируются около экстремального угла 42° и, как следствие, почему столь велика энергия (яркость) этого пучка лучей.

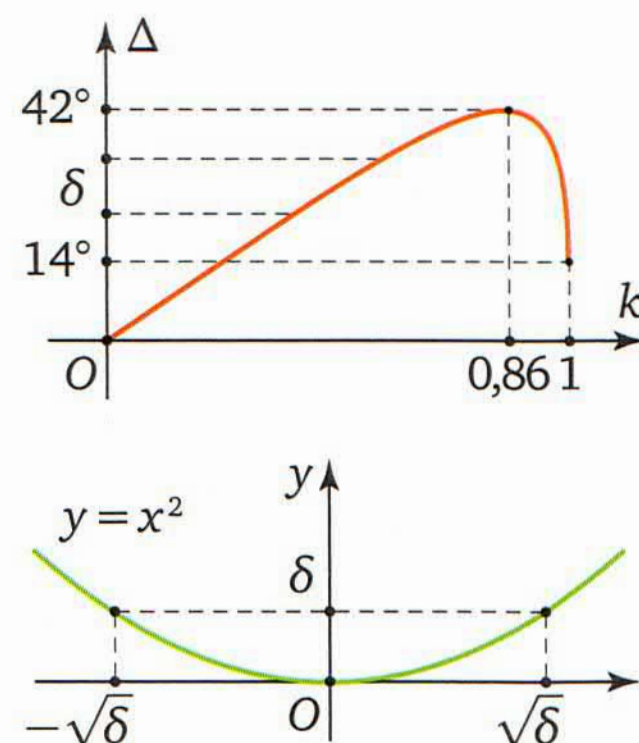
Угол выхода луча в зависимости от параметра k представлен на графике (здесь, как и в предыдущем комментарии, k — это дробь, числителем которой является расстояние между падающим лучом и центром капли, а в знаменателе — её радиус).

Поток падающих лучей по параметру k распределён равномерно, поэтому график «говорит», что на наклонных участках количество выходящих лучей, находящихся в каком-то угловом интервале, пропорционально δ — его длине.

Но в «шапочке» кривой, в окрестности максимального значения $\Delta_{\max} = 42^\circ$ соотношения другие. В окрестности точки экстремального значения функция замирает, её значения почти не меняются.

Приблизжённый вид «шапочки» — перевёрнутая парабола (знающие формулу Тейлора сразу это поймут). Для наглядности рассмотрим обычную параболу $y = x^2$.

В полосе $0 < y < \delta$ лежат значения функции от аргумента $x \in (-\sqrt{\delta}; \sqrt{\delta})$. Если δ много меньше, чем 1, то величина $\sqrt{\delta}$ значительно больше, чем δ (например: если $\delta = 0,01$, то $\sqrt{\delta} = 0,1$). Возвращаясь к «шапочке», получаем, что энергия данного пучка угловой ширины δ будет пропорциональна $\sqrt{\delta}$, а не δ , как на наклонных участках. Эти лучи и создают ярко светящуюся точку — точку радуги.



- Арнольд В. И. Математическое понимание природы. — М.: МЦНМО, 2010. — [Сюжет «Радуга»].
- Панов А. Радуга Декарта—Ньютона—Юнга // Журнал «Квант». 2016. № 3. Стр. 10—14; № 4. Стр. 8—12.
- Тарасов Л. В., Тарасова А. Н. Беседы о преломлении света. — М.: Наука, 1982. — (Библиотечка «Квант»; Вып. 18).

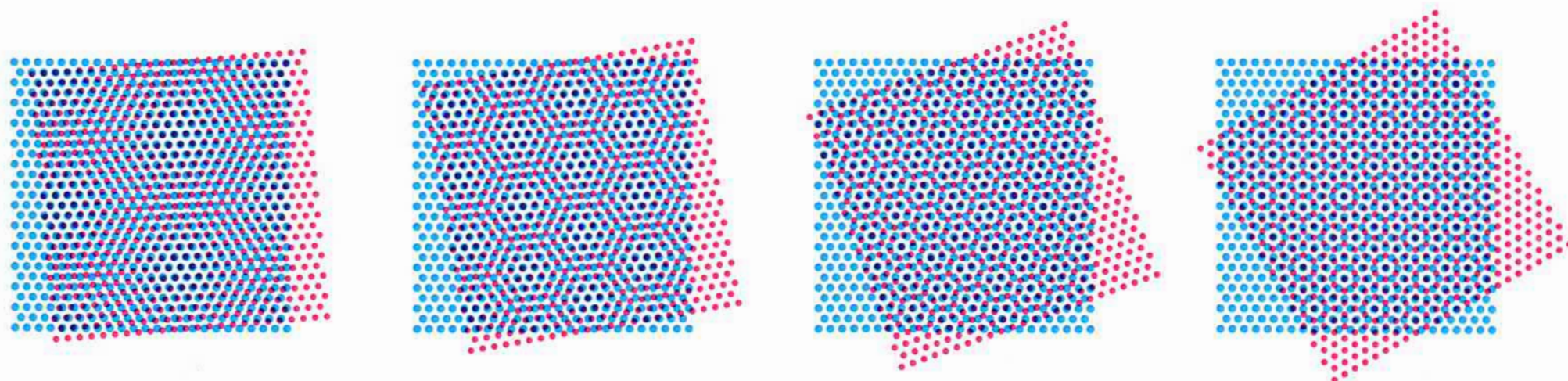
- Нуссенцвейг Х. Теория радуги // Успехи физических наук. 1978. Т. 125. Стр. 527—547.
- Миннарт М. Свет и цвет в природе. — М.: ГИФМЛ, 1958.
- Зверева С. В. В мире солнечного света. — Л.: Гидрометеиздат, 1988.
- Декарт Р. О радуге // Декарт Р. Рассуждения о методе. С приложениями: Диоптрика. Метеоры. Геометрия. — М.: Изд-во АН СССР, 1953. — Стр. 264—280.
- Ньютон И. Оптика, или Трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света. — 2-е изд. — М.: ГИТТЛ, 1954.

Цветовые пространства 122

■ На каждую из четырёх одноцветных печатных форм краска наносится по узлам одинаковых решёток, чаще — треугольных. Если бы решётки были совершенно одинаково расположены, то и печать была бы совершенной. Но небольшие смещения, в частности повороты, на практике неизбежны.

Именно регулярность, правильность решёток приводит к появлению муара — постороннего геометрического узора. Причина — поворот матриц друг относительно друга. Парадокс в том, что самый сильный муар наблюдается при малых угловых смещениях, а при значительных — муаровый узор настолько мелкий, что незаметен.

Если угол поворота двух решёток меньше 3° , то последствия фатальны. Динамику изменения муара вплоть до исчезновения можно оценить, сравнивая результаты при повороте одной из двух форм на 5, 10, 20 и 30 градусов.



Предварительный поворот самих решёток на формах на достаточно большой угол справляется с заметным муаром. Но периодичность решёток вносит ограничения на величину этого угла: например, треугольная решётка при повороте на 60° переходит в себя. В этом случае при четырёхкрасочной печати — четырьмя формами — угол поворота не может превышать 15° .

- Брэгг У. Мир света. Мир звука. — М.: Наука, 1967.
- Ивенс Р. М. Введение в теорию цвета. — М.: Мир, 1964.

- Джадд Д., Вышецки Г. Цвет в науке и технике. — М.: Мир, 1978.
- Гуревич М. М. Цвет и его измерение. — М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
- Миннарт М. Свет и цвет в природе. — М.: ГИФМЛ, 1958.

Масштабирование изображений 128

■ Определение преобразования гомотетии с центром O и коэффициентом гомотетии $k > 0$: точка A переходит в такую точку A_1 на луче OA , что $OA_1 = kOA$. Можно определить гомотетию и при отрицательном значении k .

Преобразование гомотетии с центром O и коэффициентом $k = -1$ — это центральная симметрия: точка A переходит в такую точку A_1 , что O — середина отрезка AA_1 . При произвольном отрицательном k гомотетия с центром O определяется как композиция гомотетии с положительным коэффициентом $|k|$ и центральной симметрии с центром O .

■ Преобразования подобия можно применять не только к плоским изображениям, но и к трёхмерным объектам. Пример из литературной классики: у Джонатана Свифта попавший в Лилипутию Гулливер обнаруживает, что очутился в мире, в котором все размеры (рост жителей, высота деревьев и домов) в 12 раз меньше привычных, но пропорции те же.

- Яглом И. М. Геометрические преобразования. — Т. I: Движения и преобразования подобия. — М.: ГИТТЛ, 1955. — (Библиотека математического кружка; Вып. 7).

Невозможные фигуры 129

- Рутерсвард О. Невозможные фигуры. — М.: Стройиздат, 1990.

Орнаменты 130

■ Понятие группы — одно из самых часто используемых и полезных в математике. Внешне группы могут быть самыми разными. Целые числа образуют группу относительно операции сложения, в роли единицы — ноль. Все положительные числа — это группа относительно операции умножения, единицей является число 1. Геометрический пример — группа движений (встречалась в данном сюжете и в статье «Геометрическая кристаллография», стр. 214). В комбинаторике важна группа перестановок какого-либо множества — всевозможные взаимно однозначные отображения этого множества на себя.

■ Приведём детальное объяснение того, что типов периодических бордюров только 7. Это следует из таблицы умножения для движений в группе бордюра. Создавая таблицу, необходимо учесть, что симметрия относительно горизонтальной прямой только одна, а для описания остальных движений придётся использовать числовой параметр.

Введём прямоугольную систему координат Oxy , в которой ось Ox — средняя линия бордюра. Будем использовать следующие обозначения: H — симметрия относительно оси Ox ; V_a — симметрия относительно вертикальной прямой $x = a$; R_a — центральная симметрия относительно точки $(a; 0)$; T_a — параллельный перенос на a

вдоль оси Ox (при $a > 0$ — вправо); G_a — скользящая симметрия, композиция H и T_a .

\circ	H	V_a	R_a	T_a	G_a
H	I	R_a	V_a	G_a	T_a
V_b	R_b	$T_{2(b-a)}$	$G_{2(b-a)}$	$V_{b-a/2}$	$R_{b-a/2}$
R_b	V_b	$G_{2(b-a)}$	$T_{2(b-a)}$	$R_{b-a/2}$	$V_{b-a/2}$
T_b	G_b	$V_{a+b/2}$	$R_{a+b/2}$	T_{a+b}	G_{a+b}
G_b	T_b	$R_{a+b/2}$	$V_{a+b/2}$	G_{a+b}	T_{a+b}

Результаты композиций, т. е. попарных умножений таких преобразований, можно представить в виде таблицы. Напомним, что при умножении преобразований важен их порядок. В таблице произведений первым выполняется преобразование из выбранного столбца, а затем — из строки.

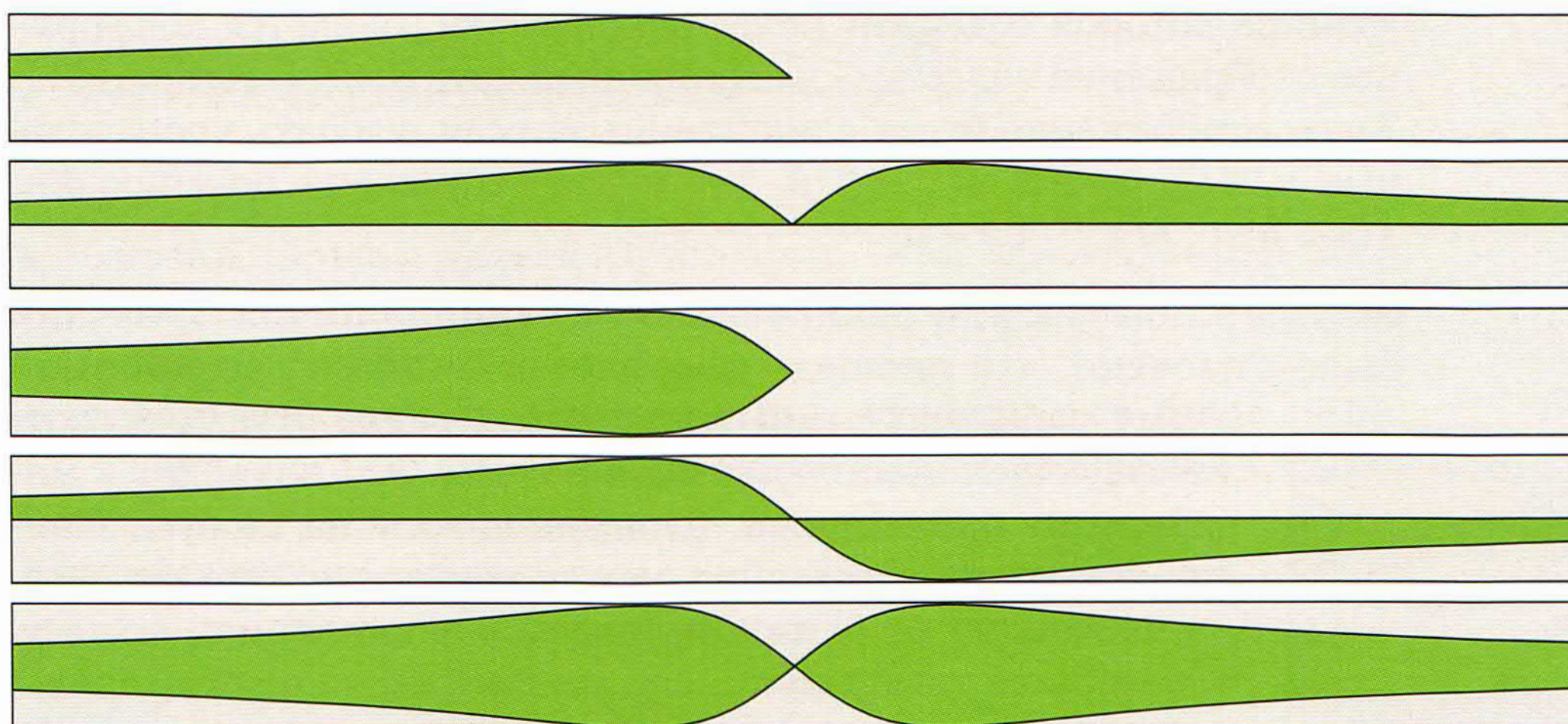
Воспользуемся приведёнными данными для анализа структуры группы движений бордюра. Напомним, что наличие в группе параллельных переносов необходимо. Формально, из четырёх остальных видов преобразований H , V , R и G в группе могут отсутствовать все четыре вида, присутствовать только один, только два или только три (в разных сочетаниях), все четыре. Всего получается $2^4 = 16$ вариантов.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
T	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
H		*				*	*	*				*	*	*		*
V			*			*			*	*		*	*		*	*
R				*			*		*		*	*		*	*	*
G					*			*		*	*		*	*	*	*

Но из таблицы умножения вытекает, что реализуются не все формально возможные варианты. Например, вариант, представленный в шестом столбце, невозможен, так как вместе с двумя осевыми симметриями в группу должно входить и их произведение — центральная

симметрия. В итоге остаются только семь комбинаций преобразований и, соответственно, семь разновидностей бордюров.

■ В архитектуре и в отделке мебели встречаются бордюрные узоры, не являющиеся периодическими. В классических бордюрах базовый прямоугольник порождает повторяющуюся картинку. Но можно получить «бесконечно» длинную ленту простым растяжением, неограниченным удлинением прямоугольника, с сохранением имеющихся симметрий. По числу типов прямоугольных узоров появятся ещё пять типов бордюров — с неперiodическими узорами. В каждом таком узоре сохраняется группа движений начального прямоугольника: тривиальная, с одной симметрией, с тремя. Среди этих движений нет переноса — обязательного элемента в группах классических бордюров, поэтому пятёрку неперiodических узоров обычно не включают в классификацию бордюров.

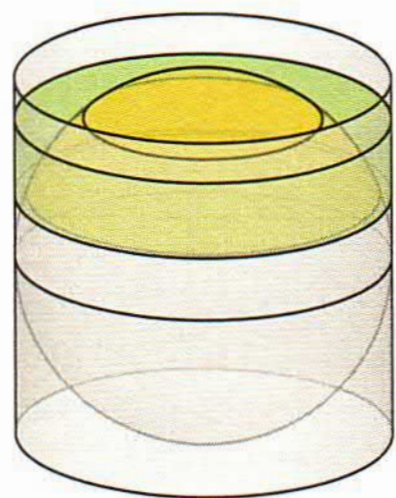


- Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966. — [Глава 4 «Двумерная кристаллография»].
- Вейль Г. Симметрия. — М.: Наука, 1968. — [Третья лекция «Орнаментальная симметрия», стр. 107—137].
- Мальцев А. И. Группы и другие алгебраические системы // Математика: её содержание, методы и значение. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — Т. 3. — Гл. XX. — [§ 4 «Фёдоровские группы»].
- Шубников А. В, Концик В. А. Симметрия в науке и искусстве. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1972.
- Schattschneider D. Enumerating Symmetry Types of Rectangle and Frieze Patterns: How Sherlock Might Have Done It // Understanding Geometry for a Changing World. — National Council of Teachers of Mathematics, 2009. — P. 17—32.

■ Равноугольные проекции в каждой точке сохраняют углы между проходящими через неё путями и масштаб по всем направлениям. А для страны, изображение которой на глобусе является односвязной областью (т. е. граница состоит из одного «куска», является связной кривой), такая проекция приобретает дополнительные настройки. Знаменитую теорему Бернхарда Римана из комплексного анализа о конформных (сохраняющих углы) отображениях можно перефразировать на картографическом языке: для любой «односвязной» страны можно подобрать равноугольную проекцию так, что плоская карта страны будет кругом, а её столица — центром этого круга.

Для интересующихся теорией функций комплексного переменного приведём полную формулировку теоремы Римана. Для любой односвязной области G в расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, граница которой содержит более одной точки, найдётся конформное отображение области G на единичный круг $B_1(0) = \{w: |w| < 1\}$. Такое отображение будет единственным, если выбрать произвольные $z_0 \in G$, $w_0 \in B_1(0)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ и задать условия нормировки: $f(z_0) = w_0$, $\arg f'(z_0) = \alpha$.

■ При рассмотрении равновеликой цилиндрической проекции было отмечено, что площадь сферической полосы, вырезаемой



двумя параллельными плоскостями, равна площади соответствующей цилиндрической полосы. Это приводит к интересному наблюдению: площадь полосы на глобусе зависит только от расстояния между секущими плоскостями, но не зависит от близости полосы к экватору или полюсу. «Съедобное» толкование: если круглый неочищенный апельсин нарезать на ломтики одинаковой толщины, то и площадь шкурки у всех кусков будет одинакова.

■ Понятие кривизны встречается в нескольких сюжетах книги, геометрический взгляд на это понятие — тема статьи «Искривлённые миры» (стр. 222).

■ Слово «карта» — ядро термина «картография». Оно пришло из латыни (*carta*), а туда попало из Греции как название бумаги из папируса. Географические карты в немецком, русском, французском — от этого корня. А в английском, испанском, итальянском — это, соответственно, *map*, *mapa*, *mappe* (слова тоже родом из латыни, где *mappe* — ткань, салфетка; в латынь это слово пришло из финикийского языка). Расхождение названий связано с материалом, который использовали в разных странах при изготовлении карт —

бумага или ткань. Любопытно, что игральные карты во всех этих странах делали из бумаги (*card, karte, carte* и т. д.).

■ Познакомиться с результатами великих математиков в области картографии можно по изданным на русском языке сборникам их работ: Леонард Эйлер «Избранные картографические статьи» (М.: Изд-во геодезической литературы, 1959); Карл Фридрих Гаусс «Избранные геодезические сочинения» (М.: Изд-во геодезической литературы, 1957, 1958); Пафнутий Львович Чебышев «Полное собрание сочинений» (Т. 5: Прочие сочинения. Биографические материалы. М.: Изд-во АН СССР, 1951).

- Березин В. Н., Смолянский М. Л. Портреты Земли // Журнал «Квант». 1970. № 7. Стр. 10—25.
- Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения. — 2-е изд. — М.: ГИФМЛ, 1960. — (Популярные лекции по математике; Вып. 13). — [Стр. 29—31].
- Куприн А. М. Слово о карте. — М.: Недра, 1987.
- Географический атлас для учителей средней школы. — 4-е изд. — М.: ГУТК, 1985.
- Багров Л. История русской картографии. — М.: Центрполиграф, 2005.
- Бугаевский Л. М. Математическая картография: Учебник для вузов. — М.: Златоуст, 1998.
- Берлянт А. М. и др. Картоведение: учебник для вузов. — М.: Аспект Пресс, 2003. — (Классический университетский учебник).

Калейдоскоп 150

- Винберг Э. Б. Калейдоскопы и группы отражений // Математическое просвещение. Третья серия. 2003. Вып. 7. Стр. 45—63.
- Винберг Э. Б. Калейдоскопы // Соросовский образовательный журнал. 1997. № 2. Стр. 121—127.
- Группа диэдра // Математические этюды. — <http://www.etudes.ru/ru/models/dihedral-group/>

Арифметические фокусы 146

- Кордемский Б. А. Математическая смекалка. — М.: ГИТТЛ, 1954. — [Глава 10 «Математические игры и фокусы»].
- Гарднер М. Математические чудеса и тайны. Математические фокусы и головоломки. — 3-е изд. — М.: Наука, 1978.
- Перельман Я. И. Ящик загадок и фокусов. — М.—Л.: ГПЗ, 1929. — [Переиздание: М.: ИД Мещерякова, 2008].
- Перельман Я. И. Занимательные задачи и опыты. — М.: Детгиз, 1959.

- Гарднер М. Крестики-нолики. — М.: Мир, 1988. — [Глава 18 «Ползунок, $3x + 1$ и другие любопытные вопросы»].
- Хэйес Б. Взлёты и падения чисел-градин // Журнал «В мире науки». 1984. № 3, март. Стр. 102—107. — [Русская версия журнала «Scientific American»].

Игра в «15» 148

- Гарднер М. Математические досуги. — М.: Мир, 1972. — [Глава 33 «Игра в 15 и другие головоломки»].
- Перельман Я. И. Занимательные задачи и опыты. — М.: Детгиз, 1959. — [Глава «Арифметические игры и фокусы»].
- Долгов О. Т. Игра в 15 // Журнал «Квант». 1974. № 2. Стр. 26—33.
- Ионин Ю., Курляндчик Л. Поиск инварианта // Журнал «Квант». 1976. № 2. Стр. 32—35.
- Толпыго А. Инварианты // Журнал «Квант». 1976. № 12. Стр. 19—25.
- Уфнаровский В. А. Математический аквариум. — Кишинёв: Штиинца, 1987. — [Глава 9 «Хоть что-то, но неподвижно»].
- Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. — Киров: АСА, 1994. — [Глава «Инвариант»].

Футбольный мяч 154

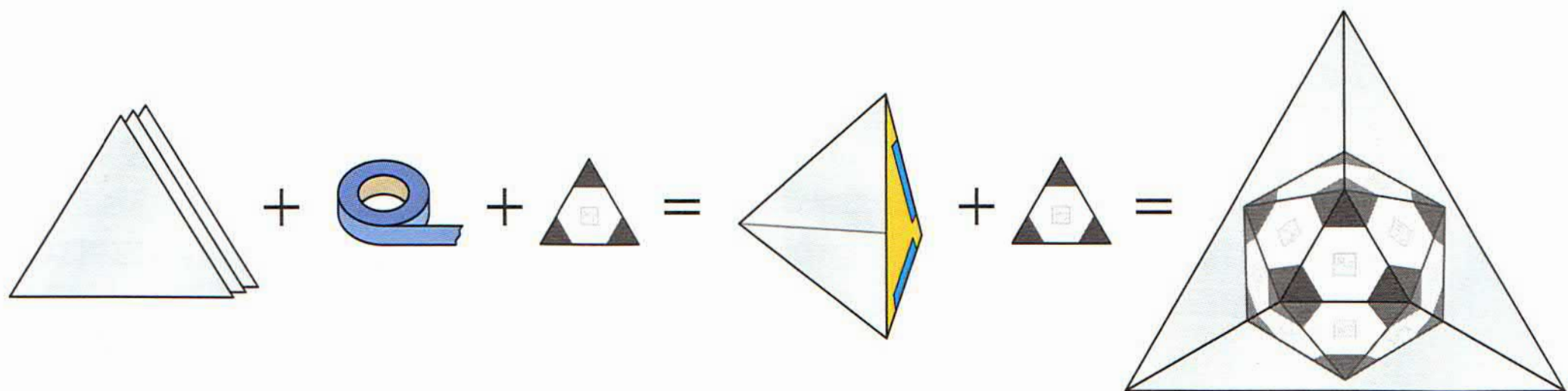
■ Официальный мяч чемпионата мира 2018 года в России назывался «Telstar 18». Его окраска напоминала мяч «Telstar» чемпионата 1970 года в Мексике, и по замыслу ФИФА название «Telstar 18» было данью уважения знаменитому мячу. А по конструкции «Telstar 18» похож на «Бразуку»: его образуют шесть одинаковых панелей, т. е. это мяч-куб. Отличие от мяча бразильского чемпионата — в форме панелей и, как следствие, в длине швов. У «Telstar 18» суммарная длина границ больше, значит, и кривизна больше «размазана» по поверхности мяча. Так что этот мяч с точки зрения математики — более круглый.

■ Соединение двух фактов, по отдельности встречавшихся в книге, позволит создать красивую модель, изготовление которой возможно и в домашних условиях. Первый факт — то, что классический футбольный мяч есть усечённый икосаэдр. Второй — понимание «работы» симметрий, порождённых отражениями в зеркалах (такие элементы теории групп встречались в статье «Калейдоскоп», стр. 150).

Инструкция по изготовлению. Следует взять три одинаковых равнобедренных треугольника из зеркального пластика, в каждом основание равно 10 см, боковые стороны — по 9,5 см. Сложите из них трёхгранный угол так, чтобы зеркальными были внутренние поверхности (грани можно скрепить клейкой лентой). Ещё одна

деталь — правильный треугольник, не очень большой. Этот треугольник надо раскрасить в два цвета, например в чёрный и белый: около каждой вершины закрасить чёрным равносторонний треугольник, сторона которого втрое меньше стороны исходного, а оставшаяся часть (это правильный шестиугольник) будет белой.

Вложив раскрашенный треугольник в зеркальный трёхгранный угол, неожиданно увидим классический чёрно-белый футбольный мяч (<http://www.etudes.ru/ru/models/football-mirror-icosahedron>).



«Виртуальный» мяч будет виден целиком, если сторона треугольника-вкладыша будет не больше трети оснований равнобедренных зеркальных треугольников.

Магия появления футбольного мяча — в точно подобранных параметрах зеркального угла, связывающих его с икосаэдром: пропорции этого угла определяет правильная пирамида, вершина которой — центр икосаэдра, а основание — грань икосаэдра.

Точные пропорции: если a — длина ребра икосаэдра (длина ребра основания в такой пирамиде), то длина бокового ребра пирамиды равна радиусу сферы, описанной около икосаэдра:

$$\frac{1}{4} \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} a \approx 0,95a.$$

Високосное летосчисление 160

■ Цепные дроби стали систематически изучать в XVII веке. И достижением, и толчком в развитии этой теории стала работа Христиана Гюйгенса по созданию модели Солнечной системы с помощью зубчатых колёс (см. «Зубчатые колёса», стр. 58). О характере и стиле этой научной работы Гюйгенса выразительно рассказывается в классической книге А. Я. Хинчина «Цепные дроби» (стр. 39, 40):

«Гюйгенс [...] был поставлен перед задачей определения числа зубцов колёс таким образом, чтобы отношение этих чисел для двух связанных между собою колёс (равное отношению времени полного оборота их) было по возможности близко к отношению α времени обращения соответствующих планет. Вместе с тем число зуб-

цов по техническим причинам не могло, разумеется, быть чрезмерно большим. Таким образом, встал вопрос об отыскании такой рациональной дроби, числитель и знаменатель которой не превосходили бы данного предела и которая вместе с тем возможно ближе лежала бы к данному числу α [...] теория цепных дробей даёт возможность полностью решить поставленную таким образом задачу. »

Александр Яковлевич Хинчин, автор процитированной книги — один из создателей школы теории вероятностей в нашей стране, уделявший много внимания развитию математического образования, популяризации математики.

■ В григорианском календаре в 400-летнем цикле число недель — ровно 20 871. Это период во всех смыслах, на его основе можно создавать «вечные» календари. За 400-летний период тринадцатое число месяца встретится $400 \cdot 12 = 4800$ раз, но распределение по дням недели не будет одинаковым: понедельник встретится 685 раз, вторник — 685, среда — 687, четверг — 684, пятница — 688, суббота — 684, воскресенье — 687. Такое расхождение в частотах связано с тем, что начало каждого цикла — вполне определённый день недели: понедельник (очередной цикл начался 1 января 2001 года).

Следовательно, за длительный период наблюдений среди тринадцатых чисел месяцев чаще других выпадает «пятница, тринадцатое». (Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly», М.: Мир, 1977, задача 303).

- Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. — М.—Л.: Гостехиздат, 1949. — [Параграф «Решётка целых чисел»].
- Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М.: ГИФМЛ, 1949. — [Переиздания: 1960, 1978].
- Арнольд В. И. Цепные дроби. — М.: МЦНМО, 2001. — (Библиотека «Математическое просвещение»; Вып. 14). — [Переиздания: 2009, 2015].
- Климишин И. А. Календарь и хронология. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1990.
- Селешников С. И. История календаря и хронология. — 2-е изд. — М.: Наука, 1972. — [1-е изд.: 1970, 3-е изд.: 1977].
- Нестеренко Ю. В. Юлианский календарь // Журнал «Потенциал». 2015. № 4. Стр. 25—31; № 5. Стр. 34—35.
- Нестеренко Ю. В. Церковные календари и пасхалия (математический подход) // Богословские труды. 2009. Т. 42. Стр. 318—362.
- Нестеренко Ю. В. Лунное течение для новоюлианского календаря // Богословские труды. 2018. Т. 47—48. Стр. 448—479.

■ Среди основных арифметических действий есть сложение и вычитание — простые, «неулучшаемые», а есть умножение и деление — здесь можно бороться за уменьшение числа выполняемых операций. Быстрому умножению посвящена основная статья. Познакомимся теперь с упоминавшимся «быстрым» делением.

Следует различать две ситуации:

— деление одного целого числа на другое с получением неполного частного и остатка;

— получение приближённого значения отношения двух чисел, целых или десятичных.

Здесь мы рассмотрим вторую ситуацию.

Начнём с того, что заметим: общую операцию нахождения частного $c = \frac{a}{b}$ можно свести к специальному случаю — нахождению обратного числа $d = \frac{1}{b}$. После этого искомый ответ получается как результат (быстрого) перемножения: $c = a \times d$.

Найти число, обратное к b , означает решить уравнение $by = 1$.

Предположим, что выбрано начальное приближение — число y_0 , примерно равное решению этого уравнения. Мы увидим, сколько точно это приближение, когда вычислим произведение $b \times y_0$. Оно должно быть близко к 1, что можно представить формулой

$$b \times y_0 = 1 - \varepsilon,$$

где ε — некоторое число с малой абсолютной величиной.

Домножив обе части этого равенства на $1 + \varepsilon$, получим

$$b \times y_0 \times (1 + \varepsilon) = 1 - \varepsilon^2.$$

Это равенство можно интерпретировать так: если $|\varepsilon| < 1$, то число

$$y_1 = y_0 \times (1 + \varepsilon)$$

является более хорошим приближением к $\frac{1}{b}$, чем y_0 , ибо $\varepsilon^2 < |\varepsilon|$.

Заметим, что для вычисления y_1 нам не требуется предварительно находить ε , новое приближение можно вычислить по формуле

$$y_1 = y_0 \times (2 - b \times y_0).$$

Процесс улучшения приближения можно продолжить, вычисляя

последовательно

$$\begin{aligned}y_2 &= y_1 \times (2 - b \times y_1), \\ y_3 &= y_2 \times (2 - b \times y_2)\end{aligned}$$

и т. д. Легко проверить, что

$$b \times y_k = 1 - \varepsilon^{2^k},$$

так что действительно получаются всё более и более точные приближения к $\frac{1}{b}$.

Вот численный пример такого итерационного вычисления. Пусть

$$b = 2,8062865$$

и выбрано начальное приближение $y_0 = 0,4$. Последовательно находим:

$$\begin{aligned}y_1 &= 0,40 \times (2 - 2,8 \times 0,40) = 0,3520, \\ y_2 &= 0,3520 \times (2 - 2,806 \times 0,3520) = 0,356325376, \\ y_3 &= 0,35632538 \times (2 - 2,8062865 \times 0,35632538) = 0,35634280...\end{aligned}$$

Всего три итерации, и мы получили 8 верных цифр числа $\frac{1}{b}$.

Обратите внимание, что на первом шаге использовались лишь 2 значащие цифры чисел b и y_0 , на втором шаге — лишь 4 значащие цифры чисел b и y_1 , и только на третьем шаге вычисления проводились с восьмизначными числами. Бóльшая точность на начальных шагах не требуется, длина используемых там чисел должна соответствовать точности получаемых приближений. В итоге трудоёмкость последнего шага в таком итерационном процессе оказывается большей, чем трудоёмкость всех предыдущих шагов, вместе взятых. Таким образом, работа по нахождению частного $\frac{a}{b}$ с n знаками оказывается не более сложной, чем 5 перемножений n -значных чисел.

Аналогичным образом осуществляется быстрое деление целых чисел с остатком.

По аналогии с описанным выше читатель теперь может самостоятельно свести решение уравнения $by^2 = 1$ к последовательности умножений. Домножение полученного решения на b даст, как легко понять, \sqrt{b} .

- Гашков С. Б. Занимательная компьютерная арифметика. — М.: URSS, 2015.
- Карацуба А. А. Сложность вычислений // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1995. Т. 211. Стр. 169—183. — [История вопроса].

- Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. — М.: Мир, 1979.
- Ахо А. В., Хопкрофт Дж. Э., Ульман Дж. Д. Структуры данных и алгоритмы. — М.—СПб.—Киев: Вильямс, 2007.
- Кнут Д. Искусство программирования. — Т. 2: Получисленные алгоритмы. — М.: Мир, 1977. — [§ 4.3.3 «Насколько быстро можно выполнять умножение»].

Случайные блуждания 170

■ Утверждение, что при случайном блуждании через время t частица в среднем оказывается от начальной точки на расстоянии порядка \sqrt{t} — факт глубокий, но несложно доказываемый.

Действительно, если мы следим только за одной из координат и в каждый момент времени считаем шаги $S_j = \pm 1$ равновероятными, то среднее значение квадрата удаления от начальной точки после t шагов будет равно

$$\mathbb{E}(S_1 + \dots + S_t)^2 = \sum_k \mathbb{E}S_k^2 + \sum_{j \neq k} \mathbb{E}(S_j S_k) = t,$$

поскольку $S_k^2 = 1$, а среднее значение $S_j S_k$ равно нулю ($S_j = \pm 1$ и $S_k = \pm 1$). Символ \mathbb{E} обозначает среднее значение параметра по всем возможным событиям (происходит от французского *espérance*). Итак, в одномерном случае квадрат расстояния имеет среднее значение t , т. е. среднее значение самого расстояния — \sqrt{t} .

Отсюда, по теореме Пифагора, следует, что на плоскости квадрат расстояния имеет среднее значение $2t$, т. е. в двумерном случае среднее значение самого расстояния — порядка \sqrt{t} . Аналогично обстоят дела и в пространствах с бóльшим числом измерений: среднее значение расстояния в задаче о случайных блужданиях имеет порядок \sqrt{t} независимо от размерности.

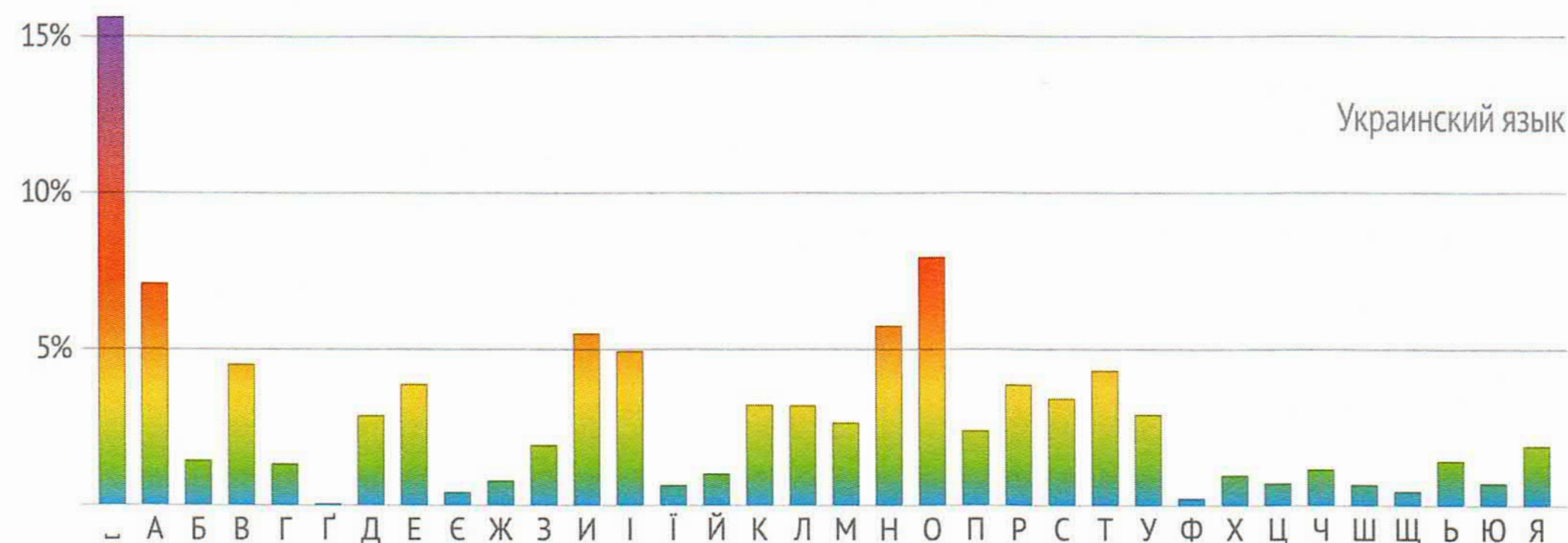
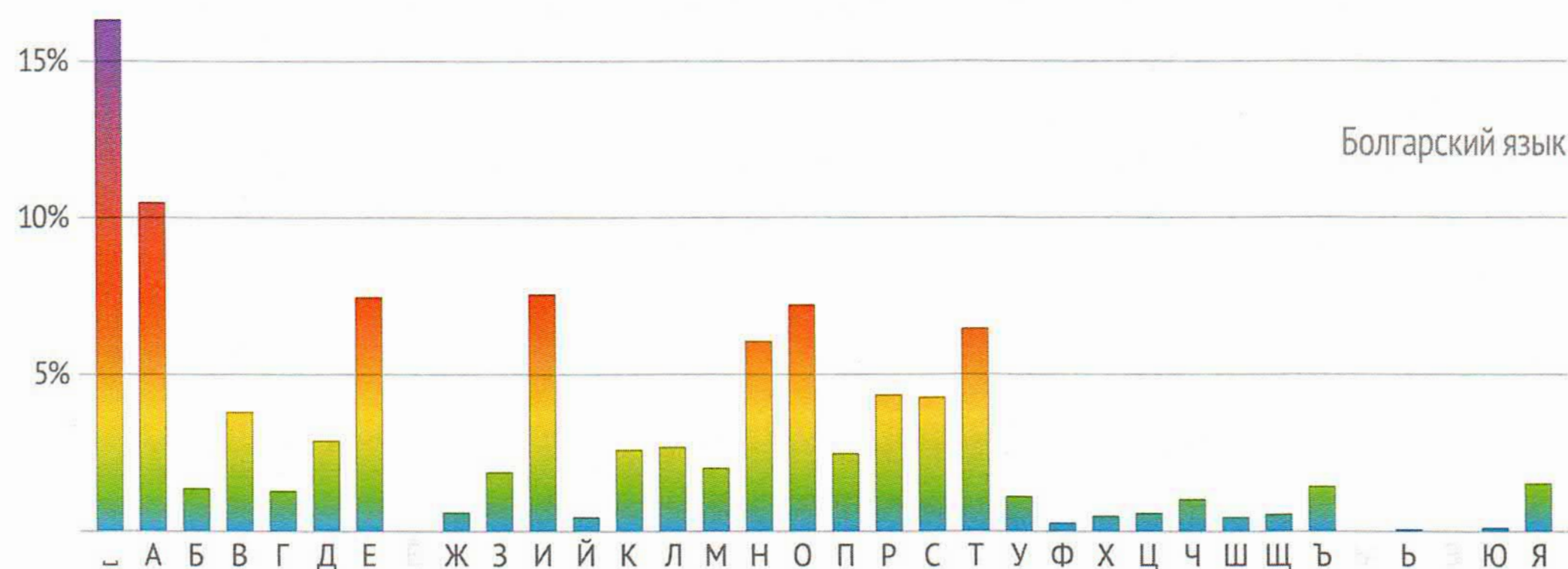
С броуновским движением связаны многие процессы, например теплопроводность — перенос энергии при движении и соударении частиц, молекул. Медленное распространение тепла от радиатора по комнате можно объяснить, используя приведённые вычисления о среднем смещении в броуновском движении.

- Эфрос А. Л. Физика и геометрия беспорядка. — М.: Наука, 1982. — (Библиотечка «Квант»; Вып. 19).

Как случается закономерность 178

- Смородинский Я. А. Температура. — М.: Наука, 1981. — (Библиотечка «Квант»; Вып. 12).

■ Частотность букв действительно является отличительной и притом наглядной характеристикой языка. Приведём гистограммы для трёх славянских языков.



■ Частотность важна в реальной деятельности, например, в прикладной лингвистике и криптологии (в ней две ветви: криптография и криптоанализ), встречается и в беллетристике.

Рассказ Эдгара По «Золотой жук» (1843) — одно из первых популярных (и художественных!) изложений как реального способа шифрования методом подстановки, замены букв какими-то знаками, так и метода его расшифровки — частотного анализа. А в 1903 году Артур Конан Дойл в серии историй о Шерлоке Холмсе опубликовал рассказ «Пляшущие человечки», математически весьма схожий с «Золотым жуком».

- Ляшевская О. Н., Шаров С. А. Частотный словарь современного русского языка (на материалах Национального корпуса русского языка). — М.: Азбуковник, 2009. — [<http://dict.ruslang.ru/freq.php>].
- Прикладная и компьютерная лингвистика / Под ред. И. С. Николаева, О. В. Митрениной, Т. М. Ландо. — М.: Ленанд, 2016.
- Марков А. А. Пример статистического исследования над текстом «Евгения Онегина», иллюстрирующий связь испытаний в цепь // Известия Императорской Академии наук. Сер. 6. 1913. Т. 7. Вып. 3. Стр. 153—162.
- Марков А. А. Об одном применении статистического метода // Известия Императорской Академии наук. Сер. 6. 1916. Т. 10. Вып. 4. Стр. 239—242.

Математика языка 196

- Зализняк А. А. Русское именное словоизменение. — М.: Наука, 1967.
- Зализняк А. А. Лингвистические задачи. — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2018. — [В 3-м издании кроме предисловия В. А. Успенского добавлена статья А. Ч. Пиперски, посвящённая работам А. А. Зализняка].
- Успенский В. А. Труды по нематематике. — 2-е изд. — Кн. 4: Филология. — М.: ОГИ, Математические этюды, 2012. — Стр. 491—509.
- Успенский В. А. Труды по нематематике. — 2-е изд. — Кн. 3: Языкознание. — М.: ОГИ, Математические этюды, 2013. — Стр. 18—32.

Музыкальное исчисление 202

- Танеев С. И. Подвижной контрапункт строгого письма. — Лейпциг, 1909.
- Гельмгольц Г. Учение о слуховых ощущениях как физиологическая основа для теории музыки. — СПб., 1875.

- Ксенакис Я. Формализованная музыка. — СПб.: Санкт-Петербургская гос. консерватория, 2008.
- Теория современной композиции / Под ред. В. С. Ценовой. — М.: Музыка, 2005. — [Учебное пособие для студентов музыкальных вузов].
- Puckette M. The theory and technique of electronic music. — World Scientific, 2007. — [Учебное пособие для студентов музыкального факультета Университета Калифорнии в Сан-Диего].

Математика кораблестроения 212

- Крылов А. Н. Мои воспоминания. — 9-е изд., перераб. и доп. — СПб.: Политехника, 2003. — [1-е изд.: М.: АН СССР, 1942].

Геометрическая кристаллография 214

- Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1972.

Обработка сигналов: от волн к всплескам 228

■ Каждой непрерывной 2π -периодической функции можно сопоставить проекцию на мир «всех» тригонометрических функций — её ряд Фурье:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Значок « \sim » не отвечает ни за совпадение суммы ряда и функции, ни за саму возможность приписать бесконечной сумме, ряду, какое-то значение (сходимость ряда). Частичная сумма

$$(S_n f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

полученная отбрасыванием «хвоста» ряда, совпадает с проекцией на подпространство V_n , является наилучшим приближением функции f тригонометрическими многочленами степени n (по норме $\|g\| = \sqrt{(g, g)}$).

В пространстве функций со скалярным произведением ряд Фурье сходится к функции ($\|f - S_n f\| \rightarrow 0$), т. е. набор коэффициентов Фурье — это полное, исчерпывающее представление функции.

Но необходимо отметить, что в пространстве функций есть и другие виды сходимости: поточечная, равномерная и т. д. Задача о сходимости ряда Фурье относительно этих видов сходимости тоже важна, она хорошо изучена.

■ Французский математик Жан-Батист Жозеф Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768—1830) в наполеоновскую эпоху был руководителем кафедры анализа и механики Политехнической школы в Париже (École Polytechnique). Как было нередко в те времена, Фурье успешно совмещал научную работу с государственной деятельностью. И когда в 1798 году Наполеон решил завоевать Египет (Египетская экспедиция), то в состав экспедиционного корпуса были включены и учёные, члены Института (объединявшего научные академии Франции): Бертолле, Монж, Фурье. Да и сам Наполеон был членом Института по отделению физики и математики!

Из экспедиции Фурье привёз коллекцию древностей, которая впоследствии вдохновила Жана-Франсуа Шампольона на попытку (удавшуюся!) расшифровать египетские иероглифы.

Менее известно, что главное научное достижение самого Фурье — вывод уравнения теплопроводности и применение рядов Фурье для его решения — тоже связано с Египтом! Это уравнение для определения температуры точки физического тела в зависимости от времени.

Согласно легенде, необходимость вывода уравнения была стратегической: в экспедиции вино было необходимой частью рациона солдат, считалось, что оно помогает переносить климатические трудности. Задача формулировалась так: найти глубину винного погреба, в котором средняя температура была бы такой же, как в аналогичных сооружениях во Франции. Так появилось знаменитое уравнение теплопроводности, а поскольку колебания внешней температуры носят сезонный характер (с периодом 365 дней), то возникла счастливая догадка: раз температура — периодическая функция, то и искать решение надо с помощью уже известных периодических функций — тригонометрических.

Правдива ли эта легенда, доподлинно неизвестно. Главное, что Фурье представил свой метод 21 декабря 1807 года в докладе «О распространении тепла в твёрдом теле» на заседании Парижской Академии наук. Окончательное обоснование метода Фурье получил лишь в XX веке. По сей день он остаётся основным для решения уравнения теплопроводности на конечном временном интервале.

- Протасов В. Ю. Синусоида и фрактал: элементы теории обработки сигналов и теории всплесков. — М.: МЦНМО, 2020.
- Сэлмон Д. Сжатие данных, изображений и звука. — М.: Техносфера, 2004. — [Инженерный взгляд на теорию всплесков, приводятся стандарты сжатия данных].
- Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: РХД, 2001. — [Для студентов — учебник от одного из первопроходцев теории всплесков].
- Араго Д. Ф. Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров: В 3 т. — СПб., 1859—1861.

Математика и логика 242

■ Для внимательного читателя дадим несколько пояснений к рассказу об *Entscheidungsproblem*.

Во-первых, в стандартной формулировке Гёделя—Бернайса теория множеств задаётся некоторым конечным набором аксиом, скажем, A_1, \dots, A_n . Тогда вопрос о выводимости данного утверждения A из аксиом теории множеств сводится к доказуемости утверждения $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow A$ в исчислении предикатов.

Во-вторых, из теорем Гёделя о неполноте вытекает, что вопрос о выводимости гипотезы A из аксиом теории множеств, вообще говоря, может быть не равносильна самой гипотезе A . По всей видимости, Гильберт, который рассчитывал построить полную аксиоматизацию теории множеств, эти два вопроса отождествлял. С такой точки зрения, алгоритм решения *Entscheidungsproblem* давал бы, в частности, и решение проблемы простых чисел-близнецов.

■ Добавим несколько штрихов к рассказу об алгоритмических проблемах.

В связи с 10-й проблемой Гильберта, во-первых, отметим, что её решение позволило построить и тот самый целочисленный многочлен, множеством положительных значений которого при натуральных значениях переменных является множество всех простых чисел (см. комментарии к статье «Периодические цикады», стр. 318).

Во-вторых, аналогичный проблеме Гильберта вопрос о рациональных решениях полиномиальных уравнений с рациональными коэффициентами до сих пор открыт. В то же время, вопросы о существовании решений систем полиномиальных уравнений в полях

вещественных и комплексных чисел, соответственно, решаются положительно (в силу результатов А. Тарского). Алгоритмы решения этих задач используются на практике в системах компьютерной алгебры и символьных вычислений.

Алгоритмические проблемы хорошо известны и в других областях математики. Классические алгоритмические проблемы в алгебре — это проблема распознавания равенства элементов в группах, заданных конечным числом порождающих и определяющих соотношений, и проблема распознавания изоморфизма таких групп (проблемы Дена). В топологии — это проблемы распознавания тривиальности узла и гомеоморфизма многообразий. Если для проблемы распознавания тривиальности узла В. Хакеном в конце 1960-х годов было найдено алгоритмическое решение, то для остальных из упомянутых задач была доказана невозможность такого решения: для проблемы равенства в группах это было сделано П. С. Новиковым в 1953 году, для проблемы изоморфизма групп С. И. Адьяном в 1957 году.

Неразрешимость проблемы гомеоморфизма многообразий размерности больше трёх доказана А. А. Марковым в 1958 году. Заметим также, что для двумерных многообразий задача разрешима в силу классических результатов об их классификации. Для трёхмерных многообразий эта проблема, видимо, пока открыта, хотя на основе результатов Г. Я. Перельмана по гипотезе Тёрстона в этом направлении получены существенные продвижения.

■ В связи с теоремой Гёделя о неполноте отметим, что если на множестве вещественных чисел рассмотреть лишь базовые предикаты, выражающие равенство и операции сложения и умножения, то соответствующий язык не будет удовлетворять условию теоремы Гёделя. Формальная теория поля вещественных чисел в этом языке допускает полную и явную (хотя и бесконечную) аксиоматизацию. Однако, в этой теории нельзя выразить понятие натурального числа, формализовать рассуждения по индукции и многое другое. С точки зрения выразительных возможностей такой язык намного беднее языка арифметики.

- Смаллиан Р. М. Принцесса или тигр?. — М.: Мир, 1985. — [Яркое и доступное введение в мир логических идей вокруг теорем Гёделя о неполноте].
- Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. — М.: Мир, 1994. — [Основные сюжеты математической логики, изложенные с подлинным педагогическим мастерством].

- *Верещагин Н. К., Шень А. Х. Лекции по математической логике.* — М: МЦМНО, 2012. — [Исключительно ясно написанный учебник, соответствующий программе вводного курса математической логики, который можно начинать читать уже в старших классах школы].
- *Davis M. Engines of logic: mathematicians and the origin of the computer.* — N.Y.: Norton, 2005. — [Увлекательная история создания компьютера и теории алгоритмов, изложенная младшим современником и участником процесса].
- *Franzén T. Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to its Use and Abuse.* — Wellesley, Massachusetts: A. K. Peters, Ltd., 2005. — [Как надо и как не надо интерпретировать теоремы Гёделя о неполноте. Например, почему теоремы Гёделя *не* говорят о том, что человек в познавательных способностях превосходит компьютер].
- *Halpern J. Y., Harper R., Immerman N., Kolaitis Ph. G., Vardi M. Y., Vianu V. On the Unusual Effectiveness of Logic in Computer Science* // *Bulletin of Symbolic Logic*. 2001. V. 7. N. 2. P. 213—236. — [О практических приложениях логики, статья написана как манифест].

Теория сложности 262

■ Уже говорилось, что между классами P и NP-полных задач, этими своеобразными полюсами в объединяющем классе NP, есть несколько задач, которые пока не классифицированы. Про одну из них, задачу изоморфизма графов, уже после выхода первого издания этой книги в 2015 году венгро-американский математик Л. Бабаи доказал фундаментальный результат: для этой задачи существует «почти полиномиальный» алгоритм, время его работы — $2^{C(\log n)^k}$. Получается, что задача изоморфизма графов находится как минимум недалеко от класса P.

- *Разборов А. А. О сложности вычислений.* // Математическое просвещение. Третья серия. 1999. Вып. 3. Стр. 127—141.
- *Разборов А. А. Алгебраическая сложность.* — 2-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2019.
- *Fortnow L. The Golden Ticket P, NP, and the Search for the Impossible.* — Princeton University Press, 2013. — [<http://goldenticket.fortnow.com>]
- *Lipton R. J. The P = NP Question and Gödel's Lost Letter.* — Springer, 2010. — [По материалам блога <http://rjlipton.wordpress.com/>].

■ Рукопись статьи с авторской правкой хранится в Архиве РАН (фонд 759, опись 1, № 373).

■ Статья прочитана в качестве доклада на Чрезвычайной сессии АН СССР 21 июня 1931 года. Выпущена тогда же отдельной брошюрой Государственным научно-техническим издательством под названием «Прикладная математика и её значение для техники». Воспроизводится по изданию «Собрание трудов академика А. Н. Крылова».

- Собрание трудов академика А. Н. Крылова. — Т. I. Ч. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1951. — Стр. 20—30.
- Крылов А. Н. Мои воспоминания. — 9-е изд., перераб. и доп. — СПб.: Политехника, 2003. — [1-е изд.: М.: АН СССР, 1942].
- Архив РАН. Фонд 759 «Крылов Алексей Николаевич (1863—1945): математик, механик, кораблестроитель, академик АН». — Оп. 1. — № 373.

Указатель

Предлагаемый указатель может служить для нескольких целей.

Во-первых, он поможет читателю в решении «обратной» задачи — определить, какие математические составляющие, из каких областей встречались в сюжетах, приведённых в сборнике. Объединение сюжетов, связанных с одним термином, с одной областью математики, фактически — второе, альтернативное оглавление книги.

Во-вторых, указатель должен помочь важной группе читателей — учащимся и учителям — взглянуть другими глазами на школьный курс математики, на судьбу и значение некоторых понятий и теорем за пределами учебников.

Конечно, в материалах книги отражены далеко не все разделы математики, поэтому и указатель не может претендовать на полноту. В то же время, в указателе могут встретиться понятия, которые были представлены в тексте неявно, но необходимы для настоящего понимания изложенного.

Указатель состоит из двух отделов.

Отдел «Элементарная математика» предназначен в первую очередь для классификации материалов «зелёной» части. В нём сюжеты сгруппированы по ключевым словам — терминам, свойствам, теоремам из тех разделов элементарной математики, которые применяются или встречаются в данном сюжете.

Отдел «Разделы математики» предлагает читателю ориентиры в материалах «синей» и «красной» частей. Сюжеты разделены в соответствии с названиями соответствующих крупных разделов математики.

В скобках после названия статей идут страницы в книге: прямой шрифт номера страницы означает ссылку на саму статью (включая дополнения и комментарии), курсив отправляет только к комментариям.

Отражение сюжетов в «зеркале» указателя присутствует на каждой странице книги. Внизу каждой страницы после слова «Математика» перечисляются либо разделы математики, к которым относятся использованные «инструменты» — так в «синей» и «красной» частях, либо сами математические инструменты — в «зелёной» части. Также на каждой странице в поле «Приложения» перечисляются «потребители и заказчики» представленных математических инструментов. В принципе, среди «приложений» можно встретить любую область человеческих дел и стремлений.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Алгебра и анализ

Натуральные числа. Филлотаксис (78); Арифметические фокусы (146); Разгадывание sudoku (156); Быстрая арифметика (166).

Простые числа, основная теорема арифметики, НОД, НОК, алгоритм Евклида. Периодические цикады (79); Теория сложности (262); Параболическая антенна (297).

Системы счисления. Быстрая арифметика (166).

Числа: рациональные, иррациональные, комплексные. Кватернионы выходят в космос (24); Формат А4 (70); Объем шкурки апельсина (92); Конический фужер (93); Музыкальный строй (96); Шкала ощущений (102); Ориентация в трёхмерном мире (106); Високосное летосчисление (160).

Приближённые вычисления. Формат А4 (70); Измерение штангенциркулем (82); Объем шкурки апельсина (92); Конический фужер (93); Шкала ощущений (102); Расстояние до горизонта (308).

Квадратный корень, корень n -й степени. Расстояние до горизонта (60); Формат А4 (70); Музыкальный строй (96).

Формула квадрата суммы. Расстояние до горизонта (308).

Уравнения, неравенства, их системы. Глубина заложения станций метрополитена (67); Формат А4 (70); Книги-панорамы (74); Измерение штангенциркулем (82); Объем шкурки апельсина (92); Конический фужер (93); Спутниковая навигация (110); Полярный день (112); Созвездия (116); Разгадывание sudoku (156).

Функции: линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая. Математика интернета (16); Параболическая антенна (46); Шуховские башни (88); Шкала ощущений (102); Картографические проекции (136).

Тригонометрические функции. Чистые интервалы (98); Картографические проекции (136); Обработка сигналов: от волн к всплескам (228).

Последовательности, геометрическая прогрессия. Филлотаксис (78); Практическая бесконечность (94); Музыкальный строй (96); Расстояние до горизонта (308); Формат А4 (315).

Многочлен. Гладкие линии (80); Периодические цикады (318).

Функция, график функции. Гладкие линии (80); Чистые интервалы (98); Радуга (118); Радуга (336).

Дроби, цепные дроби. Формат книги (72); Високосное летосчисление (160); Формат А4 (315); Музыкальный строй (328).

Дифференциальное и интегральное исчисления (производная и интеграл). Распространение звуковых волн (14); Математика транспортных потоков (18); Компьютерная томография (20); Оптимальное управление (26); Уравнения электродинамики (30); Теоретическая физика и современная математика (34); Математические модели механики (28); Кривая поворота (52); Причаливание (62); Определение длины пути по карте (64); Гладкие линии (80); Чистые интервалы (98); Как случается закономерность (178); Расстояние до горизонта (308).

Г е о м е т р и я

Треугольник и его свойства. От «безумной» геометрии Лобачевского до GPS-навигаторов (12); Уголковый отражатель (44); Фигуры постоянной ширины (84); Калейдоскоп (150).

Прямоугольный треугольник, теорема Пифагора, синус угла. Расстояние до горизонта (60); Глубина заложения станций метрополитена (67); Далёкое близкое (68); Спутниковая навигация (110).

Параллельность, перпендикулярность прямых. Уголковый отражатель (44); Параболическая антенна (46); Книги-панорамы (74); Масштабирование изображений (128); Невозможные фигуры (129).

Прямоугольник, параллелограмм, трапеция. Поворот передних колёс автомобиля (54); Складывание карт (65); Формат А4 (70); Книги-панорамы (74); Калейдоскоп (150).

Окружность, длина окружности и её дуги. Кривая поворота (52); Колёсные пары железнодорожных составов (53); Поворот передних колёс автомобиля (54); Траектория полёта самолёта (61); Определение длины пути по карте (64); Кратчайший путь (66); Фигуры постоянной ширины (84).

Конические сечения: парабола, эллипс, гипербола. Параболическая антенна (46); Дробление камней в почках (48); Шуховские башни (88); Шкала ощущений (332).

Замечательные кривые. Кривая поворота (52); Зубчатые колёса (58).

Кривая, длина кривой, кривизна кривой. Кривая поворота (52); Резьбовые соединения (56); Зубчатые колёса (58); Траектория полёта самолёта (61); Определение длины пути по карте (64); Гладкие линии (80); Фигуры постоянной ширины (84).

Касательная. Параболическая антенна (46); Дробление камней в почках (48); Расстояние до горизонта (60).

Двугранный угол, многогранный угол. Книги-панорамы (74); Футбольный мяч (154).

Многогранники. Пчелиные соты (76); Футбольный мяч (154); Геометрическая кристаллография (214).

Сфера, шар, объём шара. Расстояние до горизонта (60); Траектория полёта самолёта (61); Объём шкурки апельсина (92); Спутниковая навигация (110); Полярный день (112); Радуга (118); Картографические проекции (136); Футбольный мяч (154); Искривлённые миры (222); Картографические проекции (342).

Конус, объём конуса, усечённый конус. Колёсные пары железнодорожных составов (53); Геометрия пластикового стаканчика (86); Конический фужер (93); Радуга (118); Картографические проекции (136); Объём шкурки апельсина (326).

Базис векторного пространства, размерность. Распространение звуковых волн (14); Цветовые пространства (122).

Декартова система координат, метод координат. Ориентация в трёхмерном мире (106); Спутниковая навигация (110); Цветовые пространства (122).

Векторы. Цветовые пространства (122); Арифметика изображений (126).

Преобразования: подобие, симметрия, поворот. Параболическая антенна (46); Кратчайший путь (66); Формат А4 (70); Шуховские башни (88); Ориентация в трёхмерном мире (106); Масштабирование изображений (128); Орнаменты (130); Калейдоскоп (150); Геометрическая кристаллография (214).

Вероятность и комбинаторика

Вероятность. Обнаружение разладки (22); О применениях математики в криптографии (36); Квантовая информатика (38); Выбор короткой очереди (50); Точность теста (51); Статистика языка (186); Случайные блуждания (170); Как случается закономерность (178); Музыкальное исчисление (202);

Инвариант. Игра в «15» (148).

Графы. От прогулок по Кёнигсбергу до реконструкции генома (13); Математика интернета (16).

Наглядные модели

Колёсные пары железнодорожных составов (53); Резьбовые соединения (56); Складывание карт (65); Книги-панорамы (74); Практическая бесконечность (94); Калейдоскоп (150); Невозможные фигуры (129); Параболическая антенна (297); Расстояние до горизонта (308); Далёкое близкое (314); Пчелиные соты (317); Периодические цикады (318); Шуховские башни (322); Футбольный мяч (344).

РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИКИ

Анализ. Компьютерная томография (20); Определение длины пути по карте (64); Гладкие линии (80); Практическая бесконечность (94); Високосное летосчисление (160); Музыкальное исчисление (202); Математические крылья авиастроения (208); Математика кораблестроения (212); Обработка сигналов: от волн к всплескам (228); Расстояние до горизонта (308); Картографические проекции (342).

Элементарная геометрия. Аналитическая геометрия. От «безумной» геометрии Лобачевского до GPS-навигаторов (12); Ква-тернионы выходят в космос (24); Уголковый отражатель (44); Параболическая антенна (46); Дробление камней в почках (48); Кривая поворота (52); Колёсные пары пары железнодорожных составов (53); Поворот передних колёс автомобиля (54); Резьбовые соединения (56); Расстояние до горизонта (60); Траектория полёта самолёта (61); Определение длины пути по карте (64); Складывание карт (65); Кратчайший путь (66); Глубина заложения станций метрополитена (67); Далёкое близкое (68); Формат А4 (70); Книжки-панорамы (74); Пчелиные соты (76); Фигуры постоянной ширины (84); Геометрия пластикового стаканчика (86); Шуховские башни (88); Чипсы (90); Ломтик пиццы (91); Объём шкурки апельсина (92); Конический фужер (93); Ориентация в трёхмерном мире (106); Спутниковая навигация (110); Полярный день (112); Радуга (118); Цветовые пространства (122); Масштабирование изображений (128); Невозможные фигуры (129); Орнаменты (130); Картографические проекции (136); Калейдоскоп (150); Футбольный мяч (154).

Геометрия и топология. От «безумной» геометрии Лобачевского до GPS-навигаторов (12); Распространение звуковых волн (14); Компьютерная томография (20); Графен (32); Кривая поворота (52); Зубчатые колёса (58); Траектория полёта самолёта (61); Далёкое близкое (68); Геометрия пластикового стаканчика (86); Ломтик пиццы (91); Картографические проекции (136); Футбольный мяч (154); Геометрическая кристаллография (214); Искривлённые миры (222).

Логика. Основания математики. Математика — язык описания возможностей (40); Быстрая арифметика (166); Математика и логика (242); Теория сложности (262).

Алгебра. Кватернионы выходят в космос (24); О применениях математики в криптографии (36); Ориентация в трёхмерном мире (106); Арифметика изображений (126); Орнаменты (130); Калейдоскоп (150); Игра в «15» (148); Быстрая арифметика (166); Музыкальное исчисление (202); Геометрическая кристаллография (214).

Теория чисел. О применениях математики в криптографии (36); Периодические циклады (79); Арифметические фокусы (146); Быстрая арифметика (166); Теория сложности (262).

Дифференциальные уравнения. Уравнения математической физики. Теория оптимального управления. Распространение звуковых волн (14); Оптимальное управление (26); Уравнения электродинамики (30); Теоретическая физика и современная математика (34); Математические модели механики (28); Причаливание (62); Чистые интервалы (98); Как случается закономерность (178); Математические крылья авиастроения (208); Фигуры постоянной ширины (319).

Механика. Математика транспортных потоков (18); Математические модели механики (28); Зубчатые колёса (58); Ориентация в трёхмерном мире (106); Математические крылья авиастроения (208).

Теория вероятностей. Математическая статистика. Обнаружение разладки (22); О применениях математики в криптографии (36); Квантовая информатика (38); Выбор короткой очереди (50); Точность теста (51); Статистика языка (186); Случайные блуждания (170); Как случается закономерность (178); Музыкальное исчисление (202).

Дискретная математика. От прогулок по Кёнигсбергу до реконструкции генома (13); Математика интернета (16); Математика транспортных потоков (18); О применениях математики в криптографии (36); Гладкие линии (80); Игра в «15» (148).

Оглавление

Предисловие	5
Список авторов	8
<hr/>	
От «безумной» геометрии Лобачевского до GPS-навигаторов (А. Н. Паршин)	12
От прогулок по Кёнигсбергу до реконструкции генома (П. А. Певзнер)	13
Распространение звуковых волн (М. В. Фейгин)	14
Математика интернета (А. М. Райгородский)	16
Математика транспортных потоков (А. В. Гасников)	18
Компьютерная томография (А. Г. Сергеев)	20
Обнаружение разладки (А. Н. Ширяев)	22
Кватернионы выходят в космос (Ю. М. Батулин)	24
Оптимальное управление (А. А. Аграчёв)	26
Математические модели механики (А. Г. Куликовский)	28
Уравнения электродинамики (В. В. Козлов)	30
Графен (К. С. Новосёлов)	32
Теоретическая физика и современная математика (С. П. Новиков)	34
О применениях математики в криптографии (А. М. Зубков)	36
Квантовая информатика (А. С. Холево)	38
Математика — язык описания возможностей (Ю. И. Манин)	40
Инструментарий инженера (А. Н. Крылов)	42

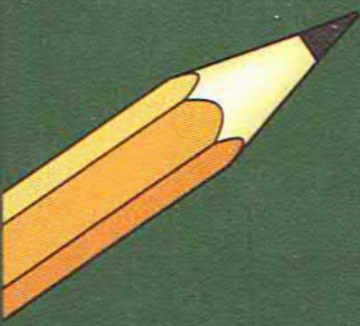
Угловой отражатель	44
Параболическая антенна	46
Дробление камней в почках	48
Выбор короткой очереди	50
Точность теста	51
Кривая поворота	52
Колёсные пары железнодорожных составов	53
Поворот передних колёс автомобиля	54
Резьбовые соединения	56
Стеклоочистители автомобиля	57
Зубчатые колёса	58
Расстояние до горизонта	60
Траектория полёта самолёта	61
Причаливание	62
Определение длины пути по карте	64
Складывание карт	65
Кратчайший путь	66
Глубина заложения станций метрополитена	67
Далёкое близкое	68
Формат A4	70
Формат книги	72
Книги-панорамы	74
Пчелиные соты	76
Филлотаксис	78
Периодические цикады	79
Гладкие линии	80

Измерение штангенциркулем	82
Фигуры постоянной ширины	84
Геометрия пластикового стаканчика	86
Шуховские башни	88
Чипсы	90
Ломтик пиццы	91
Объём шкурки апельсина	92
Конический фужер	93
Практическая бесконечность	94
Музыкальный строй	96
Чистые интервалы	98
Шкала ощущений	102
Ориентация в трёхмерном мире	106
Спутниковая навигация	110
Полярный день	112
Созвездия	116
Радуга	118
Цветовые пространства	122
Арифметика изображений	126
Масштабирование изображений	128
Невозможные фигуры	129
Орнаменты	130
Картографические проекции	136
Калейдоскоп	146
Арифметические фокусы	148
Игра в «15»	150
Футбольный мяч	154
Разгадывание sudoku	156

Високосное летосчисление (В. Г. Сурдин)	160
Быстрая арифметика (Ю. В. Матиясевич)	166
Случайные блуждания (С. К. Смирнов)	170
Как случается закономерность (А. Ю. Окуньков)	178
Статистика языка (А. Ч. Пиперски)	186
Математика языка (В. А. Успенский)	196
Музыкальное исчисление (Г. Г. Амосов)	202
Математические крылья авиастроения (А. М. Гайфуллин)	208
Математика кораблестроения (А. Н. Крылов)	212
Геометрическая кристаллография (Н. П. Долбилин)	214
Искривлённые миры (И. А. Тайманов)	222
Обработка сигналов:	
от волн к всплескам (В. Ю. Протасов)	228
Математика и логика (Л. Д. Беклемишев)	242
Теория сложности (А. А. Разборов)	262
Прикладная математика и техника (А. Н. Крылов)	276

Книжная полка	288
Дополнения, комментарии, литература	294
Указатель	358

АВТОРЫ



А. А. Аграчёв	д. ф.-м. н.
Г. Г. Амосов	д. ф.-м. н.
Ю. М. Батурин	член-корреспондент РАН
Л. Д. Беклемишев	член-корреспондент РАН
А. М. Гайфуллин	член-корреспондент РАН
А. В. Гасников	д. ф.-м. н.
Н. П. Долбилин	д. ф.-м. н.
А. М. Зубков	д. ф.-м. н.
В. В. Козлов	академик РАН
А. Н. Крылов	академик АН СССР
А. Г. Куликовский	академик РАН
Ю. И. Манин	член-корреспондент РАН
Ю. В. Матиясевич	академик РАН
С. П. Новиков	лауреат Филдсовской медали
К. С. Новосёлов	лауреат Нобелевской премии по физике
А. Ю. Окуньков	лауреат Филдсовской медали
А. Н. Паршин	академик РАН
П. А. Певзнер	к. ф.-м. н.
А. Ч. Пиперски	к. ф. н.
В. Ю. Протасов	член-корреспондент РАН
А. А. Разборов	лауреат премии Неванлинны
А. М. Райгородский	д. ф.-м. н.
А. Г. Сергеев	д. ф.-м. н.
С. К. Смирнов	лауреат Филдсовской медали
В. Г. Сурдин	к. ф.-м. н.
И. А. Тайманов	академик РАН
В. А. Успенский	д. ф.-м. н.
М. В. Фейгин	к. ф.-м. н.
А. С. Холево	член-корреспондент РАН
А. Н. Ширяев	академик РАН



Премия
Просветитель
2015



Золотая медаль
Российской академии наук
2017

ISBN 978-5-906825-02-5

